UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 7
Intégrales

Dans ce chapitre:

1. Primitives
2. Intégrale de Riemann et aire
3. Relation entre primitives et intégrales
4. Techinques d'intégration: par parties et par changement de variable. Cas des fonctions circulaires et des fractions rationnelles.

1. Primitives

Définition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Une **primitive de** f **sur** $[a,b]$ est une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

On note $F(x) = \int f(x)\,dx$, mais attention ! (voir la suite)

Remarque: Toute autre primitive de f diffère de F par une constante.

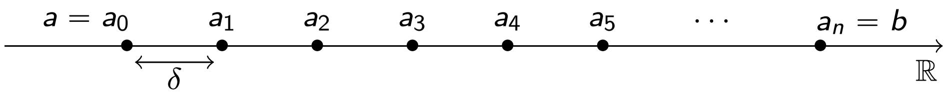
Exemples: cf. le tableau des dérivées lu au contraire:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$	$\int e^x\,dx = e^x$
$\int \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$		

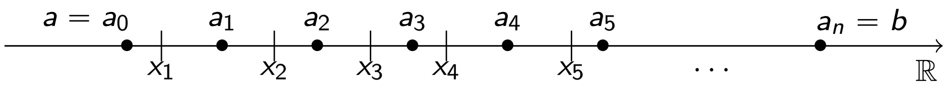
2. Somme de Riemann d'une fonction

Définition – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Une **subdivision** $\mathcal{S}_n$ de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, \ldots, n$) de longueur $\delta = \frac{b-a}{n}$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.

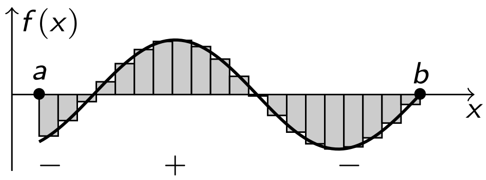


- Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$



on appelle **somme de Riemann de** f la somme

$$\boxed{R_n(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \delta}$$



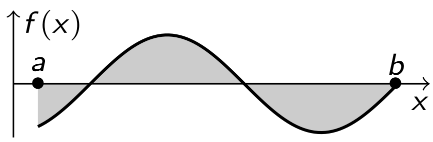
Chaque terme $f(x_i)\,\delta$ est l'**aire algébrique** ($= \pm$ aire) du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.

Intégrale de Riemann

Définition:

- Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f; \{x_i\})$ existe, c'est un nombre réel (pas $\pm\infty$), et elle est indépendante du choix des points x_i, on l'appelle **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{tout } x_i}} R_n(f; \{x_i\})}$$



et on dit que f est **intégrable selon Riemann sur** $[a, b]$.

- Toujours pour $a < b$, on pose aussi $\boxed{\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx}$

Nota: Le symbol $\int$ rappelle la somme, et dx représente la variation infinitesimale de x et s'appelle **différentielle de** x.

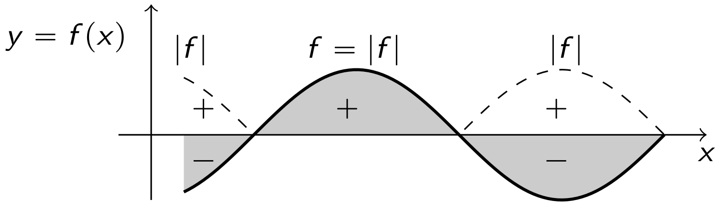
Exemples:

- Les fonctions continues et celles à forme d'escalier sont intégrables.
- La fonction de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ n'est pas intégrable selon Riemann, car la limite de $R_n(f; \{x_i\})$ dépend du choix des points x_i.

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

Corollaire:

- $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire "algébrique" sous le graphe de } f}$
- $\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)

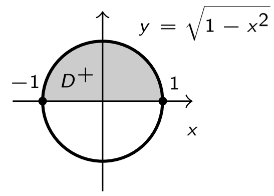


Exemple: L'aire du disque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

se calcule comme une intégrale:

$$\mathrm{Aire}(D) = 2\,\mathrm{Aire}(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$



D'autres proprietés des intégrales

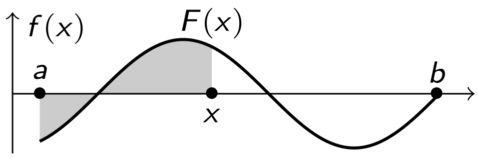
Proprietés:

- $\boxed{\int_a^b 0\,dx = 0}$
- $\boxed{\int_a^b dx = b - a = \text{longueur de } [a,b]}$
- $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx}$
- $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx}$

3. Relation entre intégrale et primitives

Théorème fondamental du calcul intégral:
Soit f une fonction intégrable selon Riemann sur $[a,b]$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie en tout $x \in [a,b]$ par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c}$$



est une primitive de f (i.e. $F'(x) = f(x)$) telle que $F(a) = c$.

En mots: l'aire sous le graphe de f entre a et x donne une primitive $F(x)$.

Corollaire: On peut donc calculer l'intégrale de f si on connait une primitive F de f, avec la formule

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b}$$

Il ne reste plus qu'à apprendre les techniques d'intégration pour trouver la primitive.

4. Calcul de primitives et intégrales

Pour calculer les primitives et les intégrales, on part des cas connus et on modifie la fonction à intégrer en utilisant les théorèmes suivants.

1) Si l'intégrand est une somme de fonctions

Théorème:

- primitive: $\boxed{\int (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\, dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx}$
- intégrale: $\boxed{\int_a^b (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx}$

Exemple:
$$\begin{aligned}\int (3\cos x + 5\sin x)\, dx &= 3\int \cos x\, dx + 5 \int \sin x\, dx \\ &= 3\sin x - 5\cos x.\end{aligned}$$

Par conséquent:
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (3\cos x + 5\sin x)\, dx &= \Big[3\sin x - 5\cos x\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \big(3\sin(\pi/2) - 5\cos(\pi/2)\big) - \big(3\sin 0 - 5\cos 0\big) \\ &= (3-0) - (0-5) = 8\end{aligned}$$

Intégration par parties

2) Si l'intégrand est un produit de fonctions

Théorème (Intégration par parties):

- primitive: $\boxed{\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\; g(x)\, dx}$
- intégrale: $\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \Big[f(x)\; g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx}$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int x \sin x\, dx$, on pose

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \sin x$$

et on calcule

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x.$$

On a alors:

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Par conséquent:

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx = \big[-x\, \cos x + \sin x \big]_0^\pi = -\pi\, \cos \pi + \sin \pi + 0 - \sin 0 = \pi.$$

Exercice

Exercice: *Calculer la primitive* $\int \cos^2 x\, dx$ *par parties.*

Réponse: Posons $f(x) = \cos x$ et $g'(x) = \cos x$.

On a alors $f'(x) = -\sin x$ et $g(x) = \int \cos x\, dx = \sin x$, et donc

$$\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x\, dx.$$

Puisque $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x\, dx &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx \\ &= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x\, dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx \end{aligned}$$

d'où suit

$$2 \int \cos^2 x\, dx = x + \sin x \cos x$$

et par conséquent

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$$

Changement de variable

3) Si l'intégrand contient une composée de fonctions

Définition: Un **changement de variable de** $x \in [a,b]$ **en** $t \in [\alpha,\beta]$ est l'expression de x comme fonction de t:

$$\boxed{x = h(t)}$$

où $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est un **difféomorphisme**, c'est-à-dire une fonction dérivable (sauf en α et β) avec réciproque $h^{-1} : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ aussi dérivable (sauf en a et b), qui exprime t comme fonction de x:

$$\boxed{t = h^{-1}(x)}.$$

On a alors: $\boxed{dx = h'(t)\, dt}$ et $\boxed{dt = \big(h^{-1}\big)'(x)\, dx}$.

Exemples:

- $x = t^3$ est un changement de variable de $x \in [0,8]$ en $t \in [0,2]$, avec
$$t = \sqrt[3]{x}, \quad dx = 3t^2\, dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$$
- $x = t^3$ n'est pas un changement de variable de $x \in [-1,1]$ en $t \in [-1,1]$, car la réciproque $t = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$ (cf. dt).

Intégration par changement de variable

Théorème (Intégration par changement de variable I):

- primitive: $$\boxed{\int f(x)\, dx = \int f\big(h(t)\big)\, h'(t)\, dt \Big|_{t=h^{-1}(x)}}$$
- intégrale: $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\, h'(t)\, dt}$$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int \sqrt{x+1}\, dx$, on pose

$$t = \sqrt{x+1} = h^{-1}(x) \quad \text{donc} \quad x = t^2 - 1 = h(t).$$

On a alors $dx = 2t\, dt$ et par conséquent

$$\int \sqrt{x+1}\, dx = \int 2t^2\, dt \Big|_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}.$$

Pour l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$ on a alors

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \int_{\sqrt{0+1}}^{\sqrt{1+1}} 2t^2\, dt = \Big[\frac{2}{3} t^3\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Intégration par changement de variable

Théorème (Intégration par changement de variable II):

- primitive: $\boxed{\int f\big(h(x)\big)\, h'(x)\, dx = \int f(u)\, du\Big|_{u=h(x)}}$
- intégrale: $\boxed{\int_a^b f\big(h(x)\big)\, h'(x)\, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(u)\, du}$

Exemple: Pour calculer la primitive $\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$, on pose

$$u = \ln x = h(x) \quad \text{donc} \quad du = \frac{1}{x}\, dx.$$

On a alors

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int u^2\, du\Big|_{u=\ln x} = \frac{1}{3} u^3\Big|_{u=\ln x} = \frac{1}{3} \ln^3 x.$$

Pour l'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$, on a

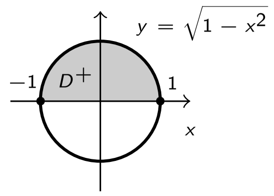
$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2} u^2\, du = \left[\frac{1}{3} u^3\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} \ln^3 2.$$

Exercice: aire d'un disque

Exercice: *Calculer l'aire du disque*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

Réponse: Comme on a déjà observé, l'aire du disque se trouve comme l'intégrale



$$\mathrm{Aire}(D) = 2\mathrm{Aire}(D^+) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Celui-ci se calcule par changement de variable: on pose

$$x = \sin t \quad \text{avec} \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

car $\quad t = \arcsin x \quad$ donne $\quad \arcsin(-1) = -\pi/2 \quad$ et $\quad \arcsin(1) = \pi/2$.

Alors $\quad \sqrt{1 - x^2} = \cos t \quad$ et $\quad dx = \cos t\, dt, \quad$ donc

$$\mathrm{Aire}(D) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \Big[t + \sin t \cos t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \big(\pi/2 + 0 + \pi/2 - 0\big) = \pi.$$

Changement de variable pour fonctions circulaires

4) Si l'intégrand contient seulement des fonctions circulaires

Règle 1:

- $\boxed{\displaystyle\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\sin x}}$ avec $\boxed{\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x\,dx \end{aligned}}$
- $\boxed{\displaystyle\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(t)\,dt\Big|_{t=\cos x}}$ avec $\boxed{\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x\,dx \end{aligned}}$

Exemple:
$$\int \frac{\sin x}{cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{t^2}\,dt\Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{t}\Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Règle 2: Dans les autres cas, on pose $\boxed{t = \tan(x/2)}$, et on a:

$$\boxed{\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}}, \quad \boxed{\sin x = \tfrac{2t}{1+t^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{dx = \tfrac{2}{1+t^2}\,dt}.$$

Exemple:
$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\tan(x/2)} = \int \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=\tan(x/2)}$$
$$= \ln(t)\Big|_{t=\tan(x/2)} = \ln(\tan(x/2)).$$

Exercice

TMB
A. Frabetti
7 Intégrales
Primitives
Intégrales
Relation Prim/Int
Calculs
Par parties
Chmt variable
Fcts circulaires
Fractions

Exercice: *Calculer les primitives suivantes:*

- $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

Réponse:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx \\
&= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx \\
&= -\cos x + \int t^2\,dt\Big|_{t=\cos x} \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}t^3\Big|_{t=\cos x} \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x.
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

- $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\, dx$

Réponse: On pose $t = \tan(x/2)$, alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\sin x}\, dx &= \int \frac{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{(1+t^2)}{2t} \frac{2}{(1+t^2)}\, dt\Big|_{t=\tan(x/2)} \\
&= \int \frac{(1+t^2-1+t^2)}{(1+t^2+1-t^2)} \frac{1}{t}\, dt\Big|_{t=\tan(x/2)} \\
&= \int t\, dt\Big|_{t=\tan(x/2)} \\
&= \frac{1}{2} t^2\Big|_{t=\tan(x/2)} \\
&= \frac{1}{3} \tan^2(x/2).
\end{aligned}$$

Changement de variable pour fractions rationnelles

5) Si l'intégrand contient seulement des fractions rationnelles

Définition: Une **fraction rationnelle** est le quotient $\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$ de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle, $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, on se ramène aux quatre cas qu'on connait:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x}$

b) si $n \geqslant 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}}$

c) $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x}$

d) si $n \geqslant 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx}$

(intégration par parties, à partir de $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx$).

1er cas: $\deg P < \deg Q$

Règle 1: Dans les cas suivants, qu'on appelle **éléments simples**, on pose $t = u(x)$ et $dt = u'(x)\,dx$:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln u(x)}$

Exemple: $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \ln(x^3+1)$

b) si $n \geqslant 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\,u(x)^{n-1}}}$

Exemple: $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+1}$

c) $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,dx = \arctan u(x)}$

Exemple: $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx = \arctan(x^3)$

d) si $n \geqslant 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{(1+u(x)^2)^n}\,dx = \cdots}$ trop long, on l'omet.

1er cas: décomposition en éléments simples

TMB
A. Frabetti
7 Intégrales
Primitives
Intégrales
Relation Prim/Int
Calculs
Par parties
Chmt variable
Fcts circulaires
Fractions

Dans tout autre cas où $\deg P < \deg Q$, le dénominateur $Q(x)$ n'est pas irréductible, car les polynômes réels irréductibles sont:

- de degré 1 de la forme $ax+b = u(x)$ avec $u'(x) = a \quad \Rightarrow \quad$ cas a),
- de degré 2 de la forme $c\big((ax+b)^2+1\big) = c\big(u(x)^2+1\big) \quad \Rightarrow \quad$ cas b).

Règle 2: On factorise $Q(x)$ en polynômes irréductibles:

$$\boxed{Q(x) = Q_1(x)^{n_1}\,Q_2(x)^{n_2}\cdots Q_r(x)^{n_r}}.$$

La priitive $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ s'écrit alors comme somme d'éléments simples, de la forme a), b), c) ou d), qui ont au dénominateur les polynômes

$$\boxed{Q_i(x),\ Q_i(x)^2, \ldots,\ Q_i(x)^{n_i}}, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, r$$

avec $\boxed{Q_i(x) = ax+b = u(x)}$ ou bien $\boxed{Q_i(x) = c\big(1+u(x)^2\big)}$, et au numérateur des polynômes de la forme

$$\boxed{K\ u'(x)}, \quad \text{où } K \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Exemple

Exemple: $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$

Le dénominateur $Q(x) = x^4 + x^2$ se factorise comme $x^2(x^2+1)$.
Par conséquent, il existe trois constantes a, b et c telles que

$$(*) \qquad \frac{1}{x^4+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^2+1},$$

cherchons-les. On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^2+1} &= \frac{ax(x^2+1) + b(x^2+1) + cx^2}{x^2(x^2+1)} \\ &= \frac{ax^3 + (b+c)x^2 + ax + b}{x^4+x^2} \end{aligned}$$

donc $(*)$ est vérifiée si et seulement si

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Alors

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x.$$

2ème cas: $\deg P \geqslant \deg Q$

Règle 3: En utilisant l'algorithme de division euclidienne pour les polynômes, on divise $P(x)$ par $Q(x)$ et on trouve une solution de la division $S(x)$ et un reste $R(x)$ tel que $\deg R < \deg Q$.
On peut donc écrire

$$\boxed{P(x) = Q(x)S(x) + R(x)}$$

et

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx},$$

où

- $\displaystyle\int S(x)\,dx$ est facile à calculer car $S(x)$ est un polynôme.
- $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ est du 1er cas et se calcule avec les règles 1 ou 2.

Exemple

Exemple: $\displaystyle\int \frac{4x^3+6x^2+1}{2x-1}\,dx$

On divise $\quad P(x) = 4x^3+6x^2+1 \quad$ par $\quad Q(x) = 2x-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3+6x^2+0\cdot x+1 & 2x-1 \\
\underline{4x^3-2x^2} & \overline{2x^2+4x+2} \\
\qquad 8x^2+0\cdot x+1 & \\
\qquad \underline{8x^2-4x} & \\
\qquad\qquad 4x+1 & \\
\qquad\qquad \underline{4x-2} & \\
\qquad\qquad\quad 3 &
\end{array}
$$

Alors $\quad S(x) = 2x^2+4x+2 \quad$ et $\quad R(x) = 3.\quad$ Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x^3+6x^2+1}{2x-1}\,dx &= \int (2x^2+4x+2)\,dx + \int \frac{3}{2x-1}\,dx \\
&= \frac{2}{3}x^3+2x^2+2x+\frac{3}{2}\ln(2x-1).
\end{aligned}
$$