UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 8
Équations différentielles

Dans ce chapitre:

1. Caractéristiques des équations différentielles: ordre, équations linéaires, à coefficients constants, homogènes ou avec second membre.
2. Équations différentielles du 1er ordre linéaires, avec condition initiale.
3. Équations différentielles du 1er ordre non linéaires à variables séparées.
4. Équations différentielles du 2ème ordre, linéaires et à coefficients constants, avec conditions initiales.

1. Équations différentielles et ordre

Définition: Une **équation différentielle** (e.d.) est une équation dont <u>l'inconnue est une fonction réelle</u> $x : t \mapsto x(t)$, de variable t, de la forme

$$(E) \qquad \boxed{F\big(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)\big) = 0}$$

où F est une expression quelconque réliant la variable t, la fonction x et ses dérivées x', x'', etc (aussi inconnues), jusqu'à un ordre maximale de dérivation $n \geqslant 1$ qui s'appelle **ordre de l'e.d** (E).

Exemples:

- $\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ fonction x de variable t, ordre 1
- $t^2\, u''(t) + u'(t) + t^3\, u(t) = 0$ fonction u de variable t, ordre 2
- $y'(x) + 4\,\big(y(x)\big)^2 + x^2 = 0$ fonction y de variable x, ordre 1
- $f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ fonction f de variable z, ordre 3
- $x''(\theta)\big(x'(\theta)\big)^2 + \sin\theta\; x(\theta) + \cos\theta = 0$ fonction x de variable θ, ordre 2

But: résoudre l'e.d. (E), c'est-à-dire trouver la fonction inconnue x qui satisfait (E). La méthode dépend des caractéristiques de l'e.d.

Équations différentielles linéaires et coefficients

Définition:

- L'e.d. (E) est dite **polynômiale** (de degré d) si F est un polynôme (de degré d) dans les inconnues $x, x', \dots, x^{(n)}$.

  En particulier, (E) est **linéaire** si F est un polynôme de degré 1.

Exemples:

$\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ n'est pas polynômiale

$t^2\, u''(t) + u'(t) + t^3\, u(t) = 0$ et $f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ sont linéaires

$y'(x) + 4\,(y(x))^2 + x^2 = 0$ est polynômiale de degré 2

$x''(\theta)\big(x'(\theta)\big)^2 + \sin\theta\; x(\theta) + \cos\theta = 0$ est polynômiale de degré 3

- Si (E) est polynômiale, on appelle **coefficients de** (E) les facteurs des inconnues $x, x', \dots, x^{(n)}$. Ce sont des fonctions de la variable t, éventuellement constantes.

Exemples:

$t^2\, u''(t) + u'(t) + t^3\, u(t) = 0$ coefficients: t^2, 1 et t^3

$y'(x) + 4\big(y(x)\big)^2 + x^2 = 0$ coefficients constants: 1 et 4

$x''(\theta)\big(x'(\theta)\big)^2 + \sin\theta\; x(\theta) + \cos\theta = 0$ coefficients: 1 et $\sin\theta$

Équations différentielles homogènes

TMB
A. Frabetti
8 Équations différentielles
Équa. diff.
ordre
linéaires
homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

Définition:

- On appelle **second membre de** (E) le terme (sommant) qui ne contient aucune inconnue $x, x', \dots, x^{(n)}$. C'est une fonction de t, qui peut être constante et même nulle. Si le second membre est nul l'e.d. (E) est dite **homogène**.

Exemples:

$\sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0$ second membre: $-\sin t$

$t^2\, u''(t) + u'(t) + t^3\, u(t) = 0$ e.d. homogène

$y'(x) + 4\,(y(x))^2 + x^2 = 0$ second membre: x^2

$f'''(z) + \frac{1}{z} f''(z) = 0$ e.d. homogène

$x''(\theta)\big(x'(\theta)\big)^2 + \sin\theta\; x(\theta) + \cos\theta = 0$ second membre: $\cos\theta$

- On appelle **équation homogène associée à** (E) l'équation (E_0) obtenue en supprimant le second membre.
  Si (E) est homogène, on a $(E_0) = (E)$.

Exemples:

$(E)\quad \sin(x'(t)) + x(t) - \sin t = 0 \quad\Rightarrow\quad (E_0)\quad \sin(x'(t)) + x(t) = 0$

$(E)\quad y'(x) + 4\,(y(x))^2 + x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad (E_0)\quad y'(x) + 4\,(y(x))^2 = 0$

Exercice

Exercice: *Pour les équations différentielles (E) suivantes, dire quel est l'ordre, si elles sont linéaires, quels sont les coefficients, si elles sont homogène ou quel est l'équation homogène associée (E_0).*

- $(E) \qquad (t+1)\,x'(t) + t^2\,x(t) + t^3 = 0$

Réponse: 1er ordre, linéaire, à coefficients non constants (les coefficients sont $t+1$ et t^2), non homogène (le second membre est t^3) et

$$(E_0) \qquad (t+1)\,x'(t) + t^2\,x(t) = 0.$$

- $(E) \qquad u''(t) - 2u'(t) + u(t) - \sin t = 0$

Réponse: 2ème ordre, linéaire, à coefficients constants, non homogène et

$$(E_0) \qquad u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0$$

- $(E) \qquad y'(t)y'''(t) - \dfrac{1}{1+t}\,y(t) = 0$

Réponse: 3ème ordre, non linéaire (polynômiale de degré 2), à coefficients non constants (à cause de $\frac{1}{1+t}$) et homogène, $(E_0) = (E)$.

2. Équations différentielles du 1er ordre linéaires

But: résoudre l'e.d. du 1er ordre linéaire

$$(E) \qquad \boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)}$$

où a et b sont des fonctions continues sur $D = D_a \cap D_b \subset \mathbb{R}$.

Théorème 1: Les solutions $x(t)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)} \qquad \text{définies pour } t \in D,$$

où $x_0(t)$ est une solution générale de l'e.d. homogène (E_0), et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Nota: Une solution **générale** dépend d'un paramètre réel λ qui détérmine toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ donne une solution. Une solution générale est donc une famille de solutions.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

Solution générale de l'équation homogène

Théorème 2: La solution générale de (E_0) $\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t)}$ est la fonction

$$\boxed{x_0(t) = \lambda\, e^{A(t)}} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

où $A(t) = \int a(t)\,dt$ est une primitive de $a(t)$.

Preuve: On écrit (E_0) comme

$$(*) \qquad \frac{x'(t)}{x(t)} = a(t)$$

et on intègre en t pour calculer les primitives à gauche et à droite. À gauche, en utilisant le changement de variable $u = x(t)$, avec $du = x'(t)\,dt$, on obtient:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \ln x(t) + c_1.$$

À droite, on a:

$$\int a(t)\,dt = A(t) + c_2.$$

De l'égalité $(*)$ suit alors

$$\ln x(t) = A(t) + c \quad \text{et donc} \quad x(t) = e^{A(t)+c} = e^c e^{A(t)} = \lambda\, e^{A(t)}.$$

Exemple de solution générale

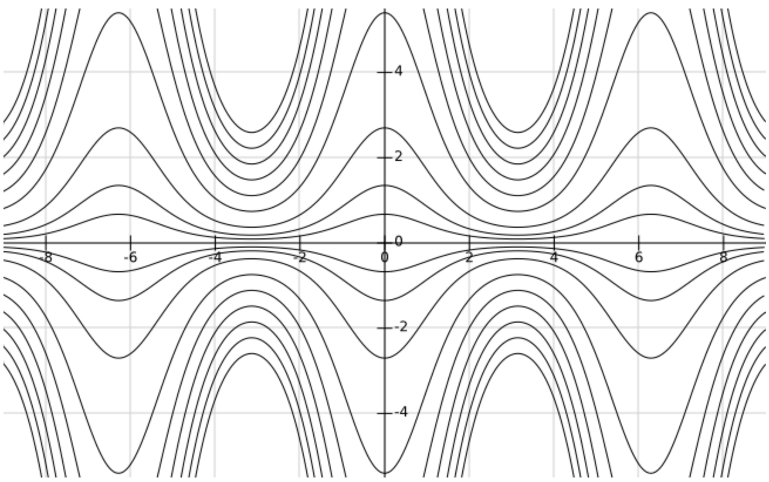
Exemple: L'équation homogène $x'(t) + \sin t\; x(t) = 0$ s'écrit comme

$$(E_0) \qquad x'(t) = -\sin t\; x(t)$$

et a donc comme solution les fonctions

$$x_0(t) = \lambda\, e^{-\int \sin t\,dt} = \lambda\, e^{\cos t}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Voici le graphe de x_0 pour plusieurs valeurs de λ positives et négatives:



TMB
A. Frabetti
8 Équations différentielles
Équa. diff.
ordre
linéaires
homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

Solution particulière de l'équation complète

Théorème 3: L'e.d. (E) $\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)}$ a une solution particulière de la forme

$\boxed{x_p(t) = \lambda(t)\,e^{A(t)}}$ **(variation de la constante)**,

où $A(t) = \int a(t)\,dt$ et $\boxed{\lambda(t) = \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}\,dt}$.

Preuve: Cherchons $\lambda(t)$ telle que $x_p(t) = \lambda(t)\,e^{A(t)}$ soit solution de (E). Dans (E), on remplace $x_p(t) = \lambda(t)\,e^{A(t)}$ et

$$x_p'(t) = \lambda'(t)\,e^{A(t)} + \lambda(t)\,A'(t)\,e^{A(t)}$$

où $A'(t) = a(t)$. On trouve:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t)\,e^{A(t)} + \lambda(t)\,a(t)\,e^{A(t)} = a(t)\,\lambda(t)\,e^{A(t)} + b(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(t)\,e^{A(t)} = b(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = \frac{b(t)}{e^{A(t)}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(t) = \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}\,dt.
\end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t) = \left(\lambda + \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}\,dt\right) e^{A(t)}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple de solution particulière

TMB
A. Frabetti
8 Équations différentielles
Équa. diff. ordre
linéaires homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

Exemple: L'e.d. $x'(t) + \sin t\; x(t) = \sin t$ s'écrit comme

$$(E) \qquad x'(t) = -\sin t\; x(t) + \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation homogène (E_0) $x'(t) = -\sin t\; x(t)$ sont

$$x_0(t) = \lambda\,e^{\cos t}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

et on cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$x_p(t) = \lambda(t)\,e^{\cos t}.$$

La fonction $\lambda(t)$ est la primitive

$$\lambda(t) = \int \frac{\sin t}{e^{\cos t}}\,dt = \int \sin t\, e^{-\cos t}\,dt$$

qui se calcule avec le changement de variable $u = -\cos t$ car on a $du = \sin t\,dt$ et

$$\lambda(t) = \int \sin t\, e^{-\cos t}\,dt = \int e^u\,du\Big|_{u=-\cos t} = e^{-\cos t}.$$

Par conséquent

$$x_p(t) = e^{-\cos t}\,e^{\cos t} = 1.$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = \lambda\,e^{\cos t} + 1, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Condition initiale

But: résoudre une e.d. du 1er ordre linéaire avec une condition initiale

$$(EC) \qquad \boxed{\begin{cases} x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t) \\ x(t_*) = x_* \end{cases}}$$

Théorème 4: Le système (EC) a une solution unique

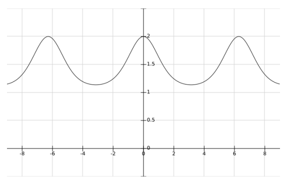
$$\boxed{x(t) = \left(\lambda_* + \int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}\,dt\right) e^{A(t)}}$$

où λ_* est la valeur de λ que l'on obtient en impostant la condition $(C) \quad x(t_*) = x_*$ aux solutions $x(t)$ de (E) dépendent de λ.

Exemple: L'e.d. avec condition initiale $(EC) \begin{cases} x'(t) + \sin t\; x(t) = \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$

a solution $\quad x(t) = \lambda\, e^{\cos t} + 1 \quad$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$x(0) = \lambda\, e + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\, e = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1/e.$$



La solution de (EC) est donc $\quad x(t) = \frac{1}{e}\, e^{\cos t} + 1.$

3. Équa. diff. du 1er ordre non linéaires

Remarque: Pour une e.d. du 1er ordre non linéaire de la forme générale $\boxed{x'(t) = F\big(t, x(t)\big)}$ une méthode de résolution n'existe pas toujours. On considère un cas résoluble qui couvre plusieurs exemples en physique.

But: résoudre une e.d. du 1er ordre **à variables séparées**

$$(E) \qquad \boxed{x'(t) = a\big(x(t)\big)\, b(t)}$$

où a est une fonction continue.

Théorème: Soit A une primitive de la fonction $1/a$ et A^{-1} sa réciproque. Alors une solution $x(t)$ de (E) est

$$\boxed{x(t) = A^{-1}\left(\int b(t)\,dt + \lambda\right)} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve: On écrit (E) comme $\quad \frac{x'(t)}{a(x(t))} = b(t) \quad$ et on intègre en t avec le changement de variable $\quad u = x(t)$:

$$\int \frac{x'(t)}{a\big(x(t)\big)}\,dt = A\big(x(t)\big) = \int b(t)\,dt + \lambda,$$

d'où suit le résultat.

Exemples

Exemples:

- L'e.d. $(E)\quad x'(t) = 2t\,x(t)^2$ s'écrit comme $\dfrac{x'(t)}{x(t)^2} = 2t$.

  On intègre en t avec le changement de variable $u = x(t)$:

  $$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2}\,dt = \int \frac{1}{u^2}\,du\Big|_{u=x(t)} = -\frac{1}{x(t)} = \int 2t\,dt = t^2 + \lambda$$

  d'où suit

  $$x(t) = -\frac{1}{t^2+\lambda}, \qquad t^2 + \lambda \neq 0.$$

- L'e.d. $(E)\quad x'(t) = \dfrac{1}{\cos x(t)}$ s'écrit comme $\cos x(t)\,x'(t) = 1$.

  On intègre en t avec le changement de variable $u = x(t)$:

  $$\int \cos x(t)\,x'(t)\,dt = \int \cos u\,du\Big|_{u=x(t)} = \sin x(t) = \int dt = t + \lambda$$

  d'où suit

  $$x(t) = \arcsin(t+\lambda), \qquad -1 \leqslant t + \lambda \leqslant 1.$$

4. Équations différentielles du 2ème ordre linéaires

But: résoudre l'e.d. du 2ème ordre linéaire

$$(E) \qquad \boxed{x''(t) + a_1\,x'(t) + a_0\,x(t) = b(t)}$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ sont constantes et b est une fonction continue sur D.

Théorème 1: Les solutions $x(t)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)} \qquad \text{définies pour } t \in D,$$

où $x_0(t)$ est une solution générale de l'e.d. homogène (E_0), et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Nota: Une solution **générale** dépend de deux paramètres réels λ et μ qui détérminent toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ et μ donne une solution.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

Solution générale de l'équation homogène

Théorème 2: La solution générale de l'équation homogène

$$(E_0) \qquad \boxed{x'' + a_1 x' + a_0 x = 0}$$

dépend des racines du **polynôme caractéristique**

$$P(X) = X^2 + a_1 X + a_0,$$

c'est-à-dire les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0$:

- Si $P(X)$ a <u>deux racines réelles distinctes</u> $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{x_0(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a <u>une racine réelle double</u> $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{x_0(t) = (\lambda + \mu\, t)\, e^{rt}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a <u>deux racines complexes</u>, elles sont forcement conjuguées, <u>c'est-à-dire</u> de la forme $r \pm i\, s \in \mathbb{C}$ (cf. ch.1), alors

$$\boxed{x_0(t) = \big(\lambda \cos(s\, t) + \mu \sin(s\, t)\big) e^{r\, t}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemples de solution générale

TMB
A. Frabetti
8 Équations différentielles
Équa. diff.
ordre
linéaires
homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

Exemples:

- $(E_0) \quad x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 0$

  Les racines de $\quad P(X) = X^2 - 3X - 10 \quad$ sont

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{array} \right. .$$

  On a deux racines réelles distinctes $\quad r_1 = 5$ et $r_2 = -2$, donc

$$x_0(t) = \lambda\, e^{5t} + \mu\, e^{-2t} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0 \quad$ s'écrit $\quad (E_0) \quad y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4} y(t) = 0$

  Les racines de $\quad P(X) = X^2 + X + 1/4 \quad$ sont

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1/4}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

  On a une racine réelle double $\quad r = -1/2$, donc

$$y_0(t) = (\lambda + \mu\, t)\, e^{-t/2} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemples de solution générale (suite)

- $(E_0) \quad u''(\theta) - 6\,u'(\theta) + 13\,u(\theta) = 0$

  Les racines de $\quad P(X) = X^2 - 6X + 13 \quad$ sont

  $$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4\,i}{2} = 3 \pm 2\,i.$$

  On a deux racines complexes conjuguées, avec partie réelle $r = 3$ et partie imaginaire $s = 2$:

  $$u_0(\theta) = \big(\lambda\, \cos(2\theta) + \mu\, \sin(2\theta)\big)\, e^{3\theta} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Second membre simple

Remarque: Pour trouver une solution particulière de l'e.d. (E), avec second membre, il existe la méthode de la <u>variation des constantes</u> λ et μ dans la solution générale x_0 de (E_0), mais pour les e.d. du 2ème ordre cette méthode est compliquée, nous traitons des cas particuliers.

But: Trouver une solution particulière de l'e.d.

$$(E) \qquad \boxed{x''(t) + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) = b_1(t) + \cdots + b_k(t)}$$

quand le second membre est la somme de termes de la forme

$$\boxed{b_i(t) = P(t)\, e^{\alpha t}\, \big(K_1\, \cos(\beta t) + K_2\, \sin(\beta t)\big)},$$

où $P(t)$ est un polynôme et α, β, K_1 et K_2 sont des constantes.

Exemple: Le second membre

$$b(t) = 4t^3 - te^{3t} + 5e^t \cos(2t)$$

est la somme des trois termes suivants:

$b_1(t) = 4t^3$, avec $P(t) = 4t^3$, $\alpha = 0$ et $K_1 = K_2 = 0$
$b_2(t) = -te^{3t}$, avec $P(t) = -t$, $\alpha = 3$ et $K_1 = K_2 = 0$
$b_3(t) = 5e^t \cos(2t)$, avec $P(t) = 5$, $\alpha = 1$, $K_1 = 1$, $K_2 = 0$ et $\beta = 2$

Solution particulière avec second membre simple

Théorème 3: La solution particulière de (E) est la somme

$$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_k(t)$$

de fonctions correspondantes à chaque $b_i(t)$, de la forme suivante (où Q est un polynôme à trouver, avec $\deg Q = \deg P$):

- Si $b_i(t) = P(t)$, alors
$$x_i(t) = \begin{cases} Q(t) & \text{si } a_0 \neq 0 \\ t\,Q(t) & \text{si } a_0 = 0 \text{ et } a_1 \neq 0 \\ t^2\,Q(t) & \text{si } a_0 = a_1 = 0 \end{cases}$$
- Si $b_i(t) = P(t)\,e^{\alpha t}$, alors
$$x_i(t) = \begin{cases} Q(t)\,e^{\alpha t} & \text{si } \alpha \neq r_1, r_2 \\ t\,Q(t)\,e^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r_1 \text{ ou } \alpha = r_2 \\ t^2\,Q(t)\,e^{\alpha t} & \text{si } \alpha = r \end{cases}$$
- Si $b_i(t) = P(t)\,e^{\alpha t}\big(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)\big)$, alors
$$x_i(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}\big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\big) & \text{si } \alpha \pm i\beta \neq r \pm is \\ t\,e^{\alpha t}\big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\big) & \text{si } \alpha \pm i\beta = r \pm is \end{cases}$$

Exemples de solution particulière

Exemples:

- $(E) \quad x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = (72t^2 - 1)\,e^t \qquad (P(t) = 72t^2 - 1 \text{ et } \alpha = 1)$

  L'équation (E_0) a solution $x_0(t) = \lambda\,e^{5t} + \mu\,e^{-2t}$ et on a $\alpha \neq r_1, r_2$.
  On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme
  $$x_p(t) = (at^2 + bt + c)\,e^t.$$
  On calcule
  $$x_p'(t) = \big(at^2 + (2a+b)t + (b+c)\big)\,e^t$$
  $$x_p''(t) = \big(at^2 + (4a+b)t + (2a+2b+c)\big)\,e^t$$
  et on remplace dans (E). On obtient:
  $$(E) \iff \big(-12at^2 + (-2a - 12b)t + (2a - b - 12c)\big)\,e^t = (72t^2 - 1)\,e^t$$
  $$\iff \begin{cases} -12a = 72 \\ -a - 6b = 0 \\ 2a - b - 12c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$
  $$\iff x_p(t) = (-6t^2 + t - 1)\,e^t$$
  En conclusion, les solutions de (E) sont
  $$x(t) = \lambda\,e^{5t} + \mu\,e^{-2t} + (-6t^2 + t - 1)\,e^t.$$

TMB
A. Frabetti
8 Équations différentielles
Équa. diff.
ordre
linéaires
homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

Exemples de solution particulière (suite)

- $(E)\quad 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 16\, e^{-t/2} \qquad (P(t) = 16$ et $\alpha = -1/2)$

  L'équation (E_0) a solution $y_0(t) = (\lambda + \mu\, t)\, e^{-t/2}$ et on a $\alpha = r$.
  On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme

  $$y_p(t) = at^2\, e^{-t/2}.$$

  On calcule

  $$y_p'(t) = \left(-\frac{1}{2}at^2 + 2at\right)e^{-t/2}$$
  $$y_p''(t) = \left(\frac{1}{4}at^2 - 2at + 2a\right)e^{-t/2}$$

  et on remplace dans (E). On obtient:

  $$\begin{aligned}(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad 4\left(-\frac{1}{2}at^2+2at\right)e^{-t/2} + 4\left(\frac{1}{4}at^2 - 2at+2a\right)e^{-t/2} + at^2 e^{-t/2} = 16\, e^{-t/2} \\ &\Longleftrightarrow \quad 8a = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad y_p(t) = 2t^2\, e^{-t/2}.\end{aligned}$$

  En conclusion, les solutions de (E) sont

  $$x(t) = (\lambda + \mu\, t + 2t^2)\, e^{-t/2}.$$

Exemples de solution particulière (suite)

TMB

A. Frabetti

8 Équations différentielles
Équa. diff. ordre linéaires homogènes
1er ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiale
1er ordre non lin.
2ème ordre lin.
sol. générale
sol. particulière
cond. initiales

- $(E_0)\quad u''(\theta) - 6\,u'(\theta) + 13\,u(\theta) = 75\cos(2\theta) \qquad (\alpha = 0$ et $\beta = 2)$

  L'équation (E_0) a solution $\quad u_0(\theta) = \big(\lambda\, \cos(2\theta) + \mu\, \sin(2\theta)\big)\, e^{3\theta}$
  et on a $\alpha \pm i\beta \neq r \pm is$.

  On cherche donc une solution particulière de (E) de la forme

  $$u_p(\theta) = a\cos(2\theta) + b\sin(2\theta).$$

  On calcule

  $$u_p'(\theta) = -2a\sin(2\theta) + 2b\cos(2\theta)$$
  $$u_p''(\theta) = -4a\cos(2\theta) - 4b\sin(2\theta)$$

  et on remplace dans (E). On obtient:

  $$\begin{aligned}(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad (9a - 12b)\cos(2\theta) + (12a + 9b)\sin(2\theta) = 75\cos(2\theta) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 9a - 12b = 75 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad u_p(\theta) = 3\cos(2\theta) - 4\sin(2\theta).\end{aligned}$$

  En conclusion, les solutions de (E) sont

  $$u(\theta) = \big(\lambda\, \cos(2\theta) + \mu\, \sin(2\theta)\big)\, e^{3\theta} + 3\cos(2\theta) - 4\sin(2\theta).$$

Conditions initiales

But: résoudre une e.d. du 2ème ordre linéaire avec deux conditions initiales

$$(EC) \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x''(t) + a_1\, x(t) + a_0\, x(t) = b(t) \\ x(t_*) = x_* \quad \text{et} \quad x'(t_*) = x'_* \end{array} \right.}$$

Théorème 4: Le système (EC) a une solution unique $x(t)$ (donnée au théorème 3) déterminée par la valeur λ_* et μ_* des constantes λ et μ que l'on obtient en impostant les conditions (C).

Exemple: L'e.d. $(EC) \left\{ \begin{array}{l} x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = (72t^2 - 1)\, e^t \\ x(0) = 2 \quad \text{et} \quad x'(0) = 1 \end{array} \right.$

a solution $\quad x(t) = \lambda\, e^{5t} + \mu\, e^{-2t} - (6t^2 - t + 1)\, e^t \quad$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Sa dérivée est

$$x'(t) = 5\lambda\, e^{5t} - 2\mu\, e^{-2t} - (6t^2 - t + 1 + 12t - 1)\, e^t,$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = \lambda + \mu - 1 = 2 \\ x'(0) = 5\lambda - 2\mu = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 3 \\ 5\lambda - 2\mu = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{array} \right.$$

La solution de (EC) est donc $\quad x(t) = e^{5t} + 2\, e^{-2t} - (6t^2 - t + 1)\, e^t$.