Ex 1 a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\-3\end{pmatrix} = 14+0-3 = 11$ 0,5

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}7\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-0\\-(-6-7)\\0-(-7)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\13\\7\end{pmatrix}$ 0,5

b) • f n'est pas linéaire car deux composantes non lin: $(x,y,z)\mapsto xz$ et $(x,y,z)\mapsto y^2+z$. 0,5

• g est linéaire car toutes ses composantes le sont (pol. de degré 1 sans termes const. $\neq 0$)

Alternative: preuve que g est linéaire : $g(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda g(\vec{u})+\mu g(\vec{v})$ $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ 0,

• La matrice A associée à g est telle que $g(x,y,z) = A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

On a $g(x,y,z) = \begin{pmatrix}2x-z\\2y+z\\x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, donc $A = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. 0,5

$\det A = 2\det\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix} = 2(0-(-1))-(0-2) = 2+2 = 4$. 0,5

c) • La matrice B t.q. $T(x,y,z) = \begin{pmatrix}x\\ \frac{\sqrt3}{2}y-\frac12 z\\ \frac12 y+\frac{\sqrt3}{2}z\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est $B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt3/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt3/2\end{pmatrix}$ 1

• T est une rotation ssi B est orthogonale ($B^{-1}=B^t$, i.e. $B\cdot B^t = B^t\cdot B = \mathbb{1}$) et $\det B = 1$.

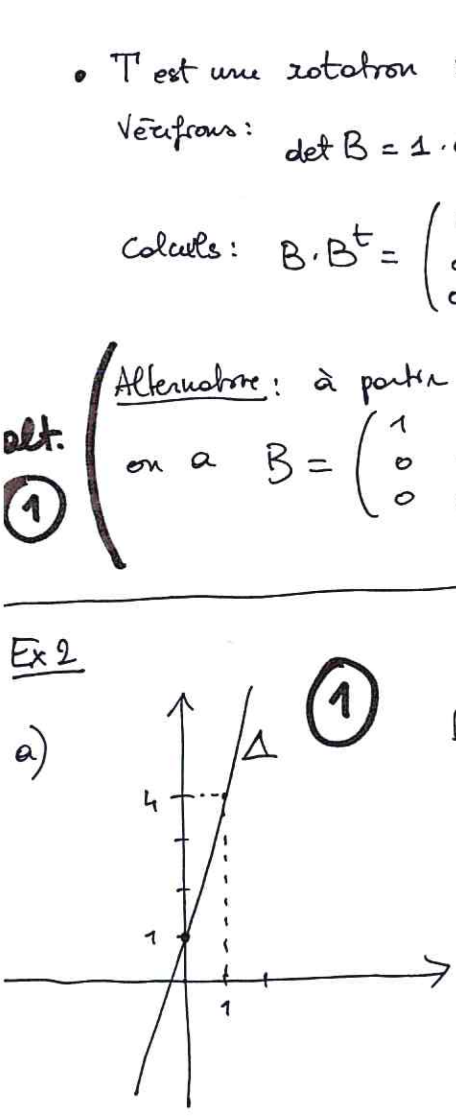
Vérifions: $\det B = 1\cdot\det\begin{pmatrix}\sqrt3/2&-1/2\\1/2&\sqrt3/2\end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 - \frac12\cdot\left(-\frac12\right) = \frac34+\frac14 = 1$. 0,5

Calculs: $B\cdot B^t = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt3/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt3/2&1/2\\0&-1/2&\sqrt3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, donc $B^{-1}=B^t$. 0,5

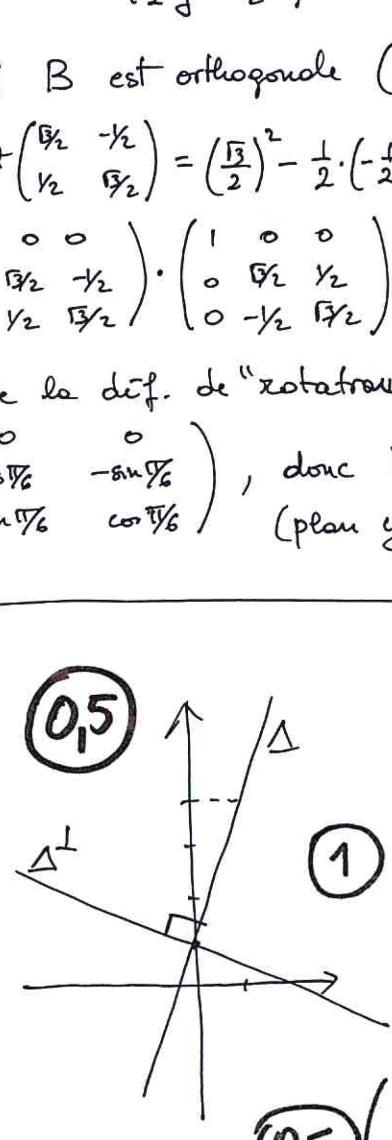
alt. 1 (<u>Alternative</u>: à partir de la déf. de "rotation" : puisque $\frac{\sqrt3}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\frac12 = \sin\frac{\pi}{6}$, on a $B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\pi/6&-\sin\pi/6\\0&\sin\pi/6&\cos\pi/6\end{pmatrix}$, donc B représente une rotation d'axe $\vec{i}$ (plan yOz) d'angle $\pi/6$ (sens antihoraire).

Ex 2

a) 1



b) 0,5



1 $\Delta : 3x-y+1=0$

un vecteur normal à Δ est $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\Delta^\perp$:

$\Delta^\perp : x+3y+c=0$

0,5 $\Delta^\perp$ passe par $(0,1)$ ssi $0+3\cdot1+c=0$

i.e. ssi $c=-3$

Donc l'éq. de $\Delta^\perp$ est $x+3y-3=0$.

2/

Ex3 $u(t) = t\sqrt{1-t^2}$

- $D_u = \{t \in \mathbb{R} \mid 1-t^2 \geq 0\}$ 0,5 $1-t^2=0$ ssi $t=\pm 1$

signe de $1-t^2$: $-$ (avant -1), $+$ (entre -1 et 1), $-$ (après 1)

donc $D_u = \{t\in\mathbb{R} \mid -1 \leq t \leq 1\} = [-1,1]$ 0,5

- $u'(t) = 1\cdot\sqrt{1-t^2} + t\cdot\frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-t^2-t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$. 1 = 0,5 formule + 0,5 calculs

- $u''(t) = \frac{-4t\sqrt{1-t^2} - (1-2t^2)\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} = \frac{-4t(1-t^2)+(1-2t^2)t}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{-3t+4t^2-2t^3}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$

2 = 0,5 formule + 1,5 calculs

Ex4 $\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\cdot\cos\theta\, d\theta$

0,5 $= \int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = \left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$. 0,5

$x = \sin\theta \Rightarrow$
- $dx = \cos\theta\, d\theta$ 0,5
- $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-x^2$ 0,5
- $\cos^4\theta = (1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$ 0,5
- $\begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow x = \sin 0 = 0 \\ \theta = \pi/2 \Rightarrow x = \sin\pi/2 = 1 \end{cases}$ 0,5

Ex.5 (E) $\dot{x}(t) = \frac{1}{1-t}x(t) + 6t$, $t \in]-\infty, 1[$

La sol. gen. de (E) est $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ où :

- x_0 est sol. gen. de (E_0) $\dot{x}(t) = \frac{1}{1-t}x(t)$, donc

$x_0(t) = \lambda e^{\int\frac{1}{1-t}dt}$ 0,5 $= \lambda e^{-\ln|1-t|}$ 0,5 $=$ ← $t<1 \Rightarrow 1-t>0 \Rightarrow |1-t| = 1-t$

$= \lambda e^{-\ln(1-t)}$ 0,5 $= \lambda e^{\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)} = \frac{\lambda}{1-t}$ 0,5 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

- x_p est sol. part. de (E), de la forme $x_p(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t}$ 0,5

Cherchons $\lambda(t)$ t.q. $x_p(t)$ soit sol. de (E) :

1
$x_p'(t) = \frac{\lambda'(t)}{1-t} - \lambda(t)\cdot\frac{(-1)}{(1-t)^2} = \frac{\lambda'(t)}{1-t} + \frac{\lambda(t)}{(1-t)^2}$

(E) $\Leftrightarrow \frac{\lambda'(t)}{1-t} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{(1-t)^2}} = \cancel{\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\lambda(t)}{1-t}} + 6t \Leftrightarrow \lambda'(t) = 6t(1-t) \Leftrightarrow \lambda(t) = \int 6t(1-t)\,dt$

Alternative (formule de cours) : $\lambda(t) = \int\frac{6t}{\frac{1}{1-t}}dt = \int 6t(1-t)\,dt$.

Dans les deux cas : $\lambda(t) = \int(6t-6t^2)\,dt = 3t^2-2t^3$.

Donc $x_p(t) = \frac{3t^2-2t^3}{1-t}$ 0,5 est une sol. part. de (E).

- Les sol. de (E) sont : $x(t) = \frac{\lambda+3t^2-2t^3}{1-t}$, $t<1$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

1