

CONTRÔLE TERMINAL 2ème SESSION – Mercredi 21 juin 2017

**Règlement** – L'épreuve dure 1 heure et demi. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une feuille A4 recto-verso. Entre parenthèses est indiqué le barème sur 20 points.

**Exercice 1** [5 pts = 2+3] – On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , avec base canonique  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

a) Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs

$$\vec{u} = (3, 1, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (2, 0, 1).$$

b) Les deux applications  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suivantes,

$$f(x, y, z) = (-y, x + 3z, 2y - 5x) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = (x^2y, y^2 - z^2, z + 1),$$

sont-elles linéaires ? (Justifier la réponse pour les deux.)

Pour celle(s) linéaire(s), trouver la matrice associée  $A$  et calculer son déterminant.

**Exercice 2** [5 pts = 1+1+1+2] – Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}.$$

a) Trouver le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Calculer la dérivée  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

c) Calculer la dérivée seconde  $f''(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

d) Écrire le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 2 au point  $x = 0$ .

**Exercice 3** [5 pts] – Calculer l'intégrale suivante, à l'aide du changement de variable  $x = \sin \theta$  :

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cos \theta \sin \theta e^{2 \sin \theta} d\theta.$$

**Exercice 4** [5 pts = 4+1] –

a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad \dot{u}(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} u(t) + 3$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

b) Trouver l'unique solution  $u(t)$  de (E) telle que

$$u(0) = 7.$$