Groupes de réflexions réelles

Alessandra Frabetti

Note d'exposé au groupe de travail de topologie algébrique
sur *Cohomologie rationelle et modulo p des groupes de Lie compacts*,
Université de Lausanne, A.A. 2000-2001

28 février 2001

Abstract

Dans ces notes, on caractérise les groupes de réflexions réelles comme groupes de Coxeter finis. Les groupes de Weyl apparaissent alors comme groupes de Coxeter cristallographiques, c'est à dire comme groupes finis de réflections rationelles, et on retrouve la caractérisation presentée à la fin de l'exposé [J] de Martin Jakob.

1 Réflexions rationelles et groupes de Weyl

On rappelle la définition de réflexion donnée par Martin dans le cas rationel (voir [J]).

Définition 1.1 Une *réflexion* est un automorphisme d'ordre fini s d'un espace vectoriel V de dimension finie qui laisse invariant un hyperplan $H \subset V$. Un *groupe de réflexions* est un sous-groupe W de quelque $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Dans la suite, on appelle groupes de réflexions *réelles* les sous-groupes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, où donc les réflexions sont supposées agir sur un espace vectoriel réel de dimension r. Bien sûr, un cas particulier est celui des groupes de réflexions *rationelles*, les sous-groupes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. De plus, un groupe fini de réflexions sur $\mathbb{Q}$ en fait est un *groupe cristallographique*, au sens qu'il preserve un *réseau entier* de $\mathbb{Q}^r$: un $\mathbb{Z}$-sous-module L de $\mathbb{Q}^r$ tel que $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r$.

Dans la section 5 de son exposé [J], Martin a montré que les groupes de Weyl sont des groupes finis de réflexions rationelles. Cela suit des calcules de cohomologie rationelles de l'espace classifiant BG du groupe G, et du théorème 5.3 de Chevalley-Coxeter-Shephard-Todd sur la théorie des invariants pour les algèbres polynomiales.

En effet, l'inverse est aussi vrai, et on peut résumer le résultat comme suit :

Théorème 1.2 (Caractérisation des groupes finis de réflexions rationelles)

W est un groupe fini de réflexions rationelles	$\Longleftrightarrow$	*W est le groupe de Weyl d'un groupe de Lie G compact et connexe.*

L'implication inverse "$\Longrightarrow$" à celle montré par Martin suit de la classification explicite des groupes finis de réflexions rationelles, que l'on trouve à l'aide de la caractérisation des groupes finis de réflexions réelles comme groupes de Coxeter finis. Cette classification constitue le but de cet exposé.

2 Groupes de réflexions réelles

On commece par décrire explicitement les groupes de Weyl comme groupes de réflexions. Pour cela, on va utiliser la proposition 5.2 de [J], que Martin a prouvé dans le cas rationel, et qui est valable, par les mêmes arguments, aussi dans le cas réel.

Lemme 2.1 (Forme canonique des réflections réelles)
1) Soit s une réflexion sur $\mathbb{R}^n$ qui respecte un produit scalaire $(\ ,\ )$ donné (par exemple le produit euclidien $(x,y) = \sum x_i y_i$), c'est à dire que $(x,y) = (sx, sy)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$sx = x - 2\frac{(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

et le sous-espace orthogonal $H_\alpha = \{v \in \mathbb{R}^n,\ (v, \alpha) = 0\ \}$ est l'hyperplan invariant de s.
2) Si $W \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^n)$ est un groupe fini de reflexions, alors il existe toujours un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ invariant par l'action de W. Donc toutes les réflexions de W s'écrivent comme au point 1) pour quelque α.

Preuve. 1) Soit H l'hyperplan invariant par l'action de s, et soit $\alpha \in V$ un vecteur orthogonal, i.e. $(\alpha, H) = 0$. Alors on a une décomposition $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathbb{R}\alpha$, par rapport a laquelle la reflexion s s'ecrit comme une matrice avec un bloc diagonal de dimension $n-1$ et un autre de dimension 1. D'après la preuve de la proposition 5.2 de Martin, on peut trouver une base de H sur laquelle s agit comme l'identité, et donc s a valeure propre -1 sur $\mathbb{R}\alpha$. On a alors $s\alpha = -\alpha$ et $sy = y$ pour tout $y \in H$.

Pour un quelconque $x = y + \lambda\alpha \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$sx = sy + \lambda s\alpha = y - \lambda\alpha = y + \lambda\alpha - 2\lambda\alpha = x - 2\lambda\alpha.$$

Puisque $(x, \alpha) = (y, \alpha) + \lambda(\alpha, \alpha) = \lambda(\alpha, \alpha)$, on obtient exactement $\lambda = \frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

2) Sur $\mathbb{R}^n$ on peut toujours choisir un produit scalaire $(\ ,\ )$. S'il n'est pas invariant par l'action de W, i.e. il existe un $s \in W$ tel que $(x,y) \neq (s(x), s(y))$, on prend

$$(x,y)' = \sum_{s' \in W} (s'x, s'y),$$

qui est bien defini parceque W est fini. Pour tout $s \in W$ on a alors

$$(sx, sy)' = \sum_{s' \in W} (ss'x, ss'y) \sum_{s'' \in W} (s''x, s''y) = (x,y)'.$$

$\square$

Remarque 2.2 Par définition, une réflexion est toujour une matrice d'ordre fini dans $\mathrm{GL}(V)$. Dans le cas rationel, il suit de la proposition 5.2 de l'exposé de Martin que les réflexions ont toujours ordre 2. Le même argument montre que cela est vrai aussi dans le cas réel.

Dans le cas complexe (ou p-adique), par contre, il existe des réflexions d'ordre different de 2. La proposition 5.2 de Martin reste pourtant valable (si p et l'ordre de la réflexion sont premiers), mais la seule valeure propre differente de 1 peut être une quelconque racine de l'unité $\exp(2\pi i/n)$ (avec n qui divise $p-1$ dans le cas p-adique $\mathbb{Q}_p$). Par conséquent, au moins dans le cas complexe, la forme canonique d'une reflexion sur un espace avec produit scalaire est la même, avec le nombre 2 remplacé par $1 - \exp(2\pi i/n)$.

Les premiers examples de groupes de réflexions réelles sont donc les groupes de Weyl des groupes classiques, qu'on connait déjà. Un nouveau type est le groupe dihédral.

Examples 2.3 1) **Groupe de Weyl de** $\mathrm{U}(n)$**.** Le groupe symétrique Σ_n, pour $n \geq 2$, agit sur $\mathbb{R}^n$ en permutant les élements de la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$. Chaque transposition (ij) envoye le vecteur $e_i - e_j$ dans son opposé $e_j - e_i$ et fixe l'hyperplan othogonal $H_{ij} = \{\sum x_k e_k \in \mathbb{R}^n,\ x_i = x_j\ \}$. Alors (ij) agit comme réflexion, et donc Σ_n est un groupe de réflexions car il est engendré par les transpositions.

2) **Groupe de Weyl de** $\mathrm{SU}(n)$**, type** A_{n-1}**.** L'action de Σ_n sur $\mathbb{R}^n$ décrite ci-dessus a des points fixes : toute la droite $\mathbb{R}(e_1 + e_2 + ... + e_n)$ (cela reflect le fait que $\mathrm{U}(n)$ est un groupe reductible). Donc on peut restreindre l'action de Σ_n : en tant que groupe de Weyl de $\mathrm{SU}(n)$, Σ_n agit sur le sous-espace vectoriel orthogonal à cette droite, $\mathbb{R}^{n-1} \cong \{\sum x_k e_k,\ \sum x_k = 0\}$, sans points fixes non nuls.

3) **Groupe de Weyl de** $\mathrm{SO}(2n+1)$**, type** B_n**.** Pour tout $i = 1, ..., n$, la transformation ϵ_i de $\mathbb{R}^n$ qui envoit e_i dans $-e_i$ est bien sûr une réflexion qui fixe $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, ..., \hat{e_i}, ..., e_n\}$. De plus, Σ_n agit par conjugaison sur le groupe Sign engendré par ces changements de signe (qui est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$). Donc, le produit semidirect $\Sigma_n \ltimes \mathrm{Sign}_n = W(\mathrm{SO}(2n+1))$ est un groupe de réflexions, d'ordre $2^n n!$ et sans points fixes.

4) **Groupe de Weyl de** $\mathrm{SO}(2n)$**, type** D_n**.** Dans le groupe Sign on peut considerer les changements pairs de signe, i.e. les réflexions $e_i + e_j \mapsto -(e_i + e_j)$ pour touts $i \neq j$. Le groupe de Weyl de $\mathrm{SO}(2n)$ est le produit semidirect $\Sigma_n \ltimes \mathrm{Sign}_n^+$ de Σ_n par le sous-groupe Sign^+ engendré par ces changements pair de signe.

5) **Groupe dihédral** $\mathcal{D}(m)$**, type** $I_2(m)$**.** Pour $m \geq 3$, soit $\mathcal{D}(m)$ le groupe des isometries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ qui preservent le polygone regulier avec m arêtes centré en 0. Comme groupe, $\mathcal{D}(m)$ est engendré par m rotations, d'angles $\frac{2\pi k}{m}$ pour $k = 1, ..., m$, et par m réflexions, autour des m diagonales du polygone. En faite, une rotation d'angle $\frac{2\pi}{m}$ peut s'écrire comme composition de deux réflections autour de deux quelconques diagonales qui forment un angle $\frac{\pi}{m}$, donc $\mathcal{D}(m)$ est un groupe de réflexions.

Pour les petites valeurs de m le groupe dihédral est en fait un groupe de Weyl : pour $m = 3$ on retrouve le groupe $\mathcal{D}(3) = W(\mathrm{SU}(3))$ de type A_2, pour $m = 4$ on retrouve le groupe $\mathcal{D}(4) = W(\mathrm{SO}(3))$ de type B_2, et pour $m = 6$ on retrouve un groupe de Weyl exceptionel $\mathcal{D}(6) = W(G_2)$. En vu d'une classification, donc, normalement on considère les groupes dihédreaux $\mathcal{D}(m)$ seulement pour $m = 5$ ou $m \geq 7$.

3 Groupes de Coxeter

Définition 3.1 Un *groupe de Coxeter* est un groupe W definit par générateurs et relations où, si l'on indique par $S \subset W$ l'ensemble des génerateurs, les relations sont du type

$$(s\,s')^{m(s,s')} = 1, \qquad s, s' \in S,$$

avec $m(s,s) = 1$, $m(s,s') \geq 2$ si $s \neq s'$ et $m(s,s') = m(s',s)$. Par convention, on écrit $m(s,s') = \infty$ s'il n'y a pas de relations entre les générateurs s et s'. La donnée du couple (W, S) détermine le *système de Coxeter* du groupe W.

On remarque que $m(s,s') = 2$ si et seulement si $ss' = s's$. Donc les paramètres $m(s,s')$ mesurent la non commutativité des génerateurs. En particulier, si $m(s,s')$ est fini, la relation entre s et s' peut s'écrire comme une relation de tresse :

$$\underbrace{ss'ss'\dots}_{m(s,s')\ \text{terms}} = \underbrace{s'ss's\dots}_{m(s,s')\ \text{terms}}.$$

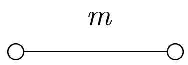
Définition 3.2 Un *graphe de Coxeter* est un graphe fini avec arêtes indexés par des nombres entiers $m \geq 3$ ou par ∞.

On peut associer à chaque groupe de Coxeter (W, S) un graphe de Coxeter Γ comme suit :

- pour chaque générateur $s \in S$ on dessine un sommet de Γ, qu'on indique aussi par s;
- deux sommets s_1 et s_2 ne sont pas liés si les génerateurs correspondants commutent entre eux, i.e. si $m(s_1, s_2) = 2$;
- deux sommets s_1 et s_2 sont liés par un arête indexé par $m(s_1, s_2)$ si $m(s_1, s_2) \geq 3$. (De plus, en géneral on omet l'indice $m = 3$ qui est très fréquent.)

Examples 3.3 1) **Groupe dihédral.** Le groupe dihédral $\mathcal{D}(m)$ est le prototype des groupes de Coxeter, qui s'appellent parfois aussi *groupes dihédraux géneralisés.* Pour reconnaitre le système de Coxeter des génerateurs, on remarque d'abord que $\mathcal{D}(m)$ est isomorphe au produit semidirect $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ agit sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ parmultiplication (changement de signe). Les élements de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont les m rotations, et le chagement de signe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ détermine les réflexions.

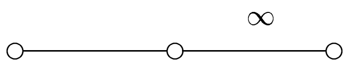
Si on denote par x le génerateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et par y le génerateur de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, un système de Coxeter est decrit par deux génerateurs $S = \{s_1, s_2\}$, avec $s_1 = x$ et $s_2 = xy$. En fait, on trouve $s_1^2 = 1$, $s_2^2 = 1$ et $(s_1 s_2)^m = 1$. Le graphe de Coxeter de $\mathcal{D}(m)$ est donc :



2) Un exemple de groupe de Coxeter *hyperbolique* est le suivant : sur trois génerateurs s_1, s_2, s_3 on considère les relations données par les paramètres

$$m(s_1, s_2) = 3, \qquad m(s_1, s_3) = 2, \qquad m(s_2, s_3) = \infty.$$

Le graphe de Coxeter associé est donc



Ce groupe W est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$, et l'isomorphisme envoit les trois générateurs de W sur les classes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.4 (Caractérisation des groupes finis de réflexions réelles)

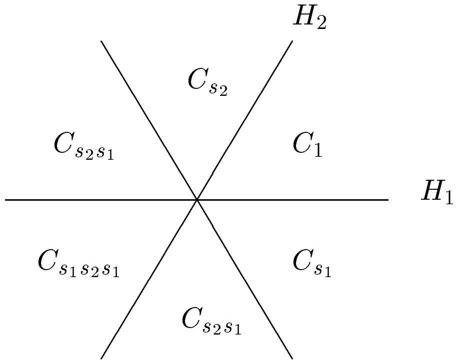
W est un groupe fini de réflexions réelles $\iff$ *W est un groupe de Coxeter fini.*

Preuve. Les détails complets de la preuve demandent beaucoup de résultats preliminaires, que l'on omet. Ici on va seulement donner une idée de la preuve.

D'abord l'implication "$\Longrightarrow$". Soit W un groupe fini de réflexions sur $\mathbb{R}^n$. Il y a au moin deux façons de déterminer l'ensemble S des génerateurs du système de Coxeter associé a W, une emploit la notion de chambres (voir [R], théorème 3.2), et l'autre celle de racines simples (voir [H], théorème 1.9).

Selon la première façon, on considère l'ensemble Hyp des hyperplans de réflexion H de W (ou H_α dans (2.1)), i.e. l'ensemble des $\ker(s-1)$ pour toutes les réflexions de W. L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathrm{Hyp}} H$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes s'appellent *chambres* de W. Pour trouver le système de Coxeter, on choisit une chambre, que l'on appelle C_1. Parmi les hyperplans H de Hyp, on choisit ceux qui sont des *murs* pour C_1, i.e. tels que l'intersection de H avec la fermeture de C_1 soit de codimension 1 (et non ≥ 2) dans $\mathbb{R}^n$. Soit alors S l'ensemble des réflexions autour des murs de C_1. On peut montrer que ces réflexions engendrent W et satisfont à des relations de type Coxeter.

De plus, on peut montrer aussi que W agit transitivement sur l'ensemble des chambres, et que celles-ci sont indexés exactement par les élements de W : pour tout $w \in W$, l'action de w sur C_1 détermine une autre chambre $C_w = wC_1$. Par exemple, voici le système des chambres de $A_2 = \mathrm{SU}(3)$, pour lequel on a vu dans l'example 2) de (2.3) que $W = \Sigma_3$ agit sur $\mathbb{R}^2$:



Maintenant, l'implication inverse "$\Longleftarrow$". Soit (W, S) un groupe de Coxeter. Si S est fini, on peut definir sur l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^S$, avec base canonique $\{e_s\}_{s \in S}$, une forme bilinéaire

$$B(e_s, e_{s'}) = -\cos \frac{\pi}{m(s, s')}.$$

(En particulier, on a $B(e_s, e_s) = 1$.) Pour tout $s \in S$, soit ρ_s la réflexion dans V définite par

$$\rho_s x = x - 2B(e_s, x) e_s.$$

Alors $V = \mathbb{R}e_s \oplus H_s$, où H_s est l'hyperplan othogonal à e_s. L'application $\rho : S \longrightarrow \mathrm{GL}(V), s \mapsto \rho_s$ s'étend à W comme morphisme de groupes, et l'image est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par une série de résultats, qu'on trouve dans la section 6 de [H], on sait que si W est fini alors la forme bilinéaire B est définie positive. Donc V est un espace euclidien, et si on choisit une base orthonormale l'image de ρ est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, qui est compact. Un sous-espace discret d'un compact est fini, et donc W admet une répresentation comme groupe fini de réflexions réelles (la *répresentation de Tits*). $\square$

Définition 3.5 Un groupe de Coxeter W est *irréductible* si son graphe associé est connexe. Les exemples précedents sont irréductibles (sauf le groupe de Weyl de $\mathrm{SO}(4)$, de type D_2).

Si l'ensemble S des génerateurs est l'union disjointe de deux sous-ensembles S_1 et S_2 dont les graphes associés ne sont pas liés, alors W n'est pas irréductible : il est le produit $W_1 \times W_2$ des sous-groupes engendrés par les ensembles S_1 et S_2. Par exemple, le groupe de type D_2 est le produit direct de deux groupes de type A_1, donc $W(\mathrm{SO}(4)) = W(\mathrm{SU}(2)) \times W(\mathrm{SU}(2))$.

Théorème 3.6 (Classification des groupes de Coxeter finis irreductibles) *Les groupes de Coxeter finis irreductibles sont ceux associés aux graphes suivants :*

A_n $\quad (n \geq 1)$

$B_n = C_n$ $\quad (n \geq 2)$

D_n $\quad (n \geq 4)$

E_6

E_7

E_8

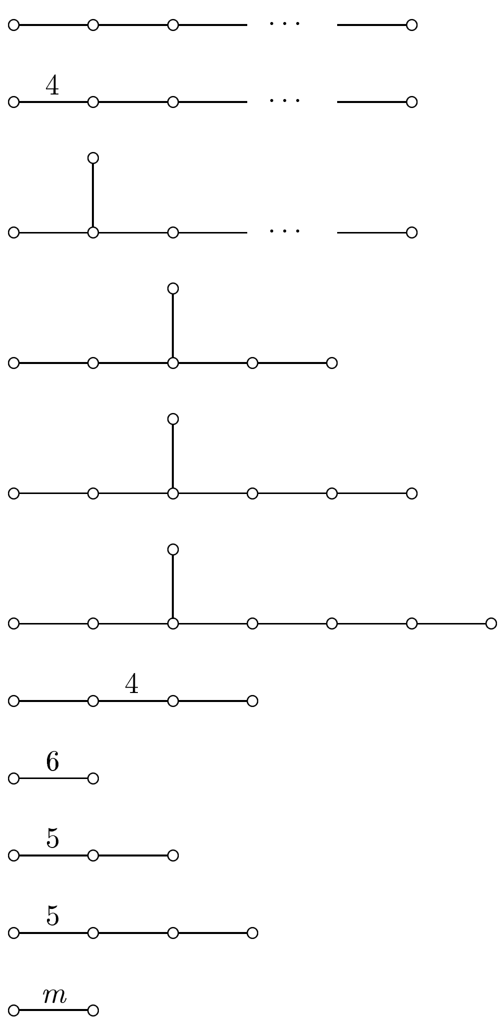
F_4

G_2

H_3

H_4

$I_2(m)$ $\quad (m = 5, m \geq 7)$



Proposition 3.7 *Soit W un groupe fini de réflexions sur $\mathbb{R}^n$, avec système de Coxeter (W, S). Si W est un groupe cristallographique, alors $m(s, s') = 2, 3, 4$ ou 6 pour tous $s, s' \in S$.*

Preuve. Si $s \neq s'$, on sait que $ss' \neq 1$ agit sur le plan engendré par $\ker(1+s) \oplus \ker(1+s')$ comme rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{m(s,s')}$ non nul. Donc, les valeurs propres de ss' sont 1, avec multiplicité $n-2$, et $\exp(\pm i\theta) = \cos\theta$, avec multiplicité 2. Par conséquent, on a

$$\mathrm{trace}(ss') = n - 2 + 2\cos\theta.$$

Si W est cristallographique, cette trace est un entier, et donc $\cos\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, avec $\cos\theta \neq 1$. Les seules possibilités sont $\cos\theta = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1$, qui correspondent à $m(s, s') = 6, 4, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{6}{5}$. Puisque $m(s, s')$ doit aussi être entier, les seuls cas possibles restent $m(s, s') = 2, 3, 4, 6$. $\square$

Les graphes du théorème (3.6) dont tous les arêtes correspondent à $m = 2$ (arête absente) ou $m = 3, 4, 6$ sont exactement les groupes de Weyl A_n, $B_n = C_n$, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2. Cela termine la preuve du théorème (1.2).

References

[H] **J. Humphreys**, *Reflections Groups and Coxeter Groups*, Camb. Stud. Adv. Math. **29** 1997.

[K] **R. Kane**, *The homology of Hopf Spaces*, North-Holland Math. Lib. **40** 1988 (§ 20, 21).

[J] **M. Jakob**, *Calcul de la cohomologie rationelle de BG d'après Dwyer et Wilkerson (suite)*, notes de l'exposé du 12 décembre 2000, au séminaire de topologie algébrique de l'IMA, Lausanne, http://magma.unil.ch/topol/

[R] **R. Rouquier**, *Weyl groupes, affine Weyl groupes and reflection groupes*, dans "Representation of reductive groups", Ed. Carter-Geck, Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press 1998, pp. 21-39.