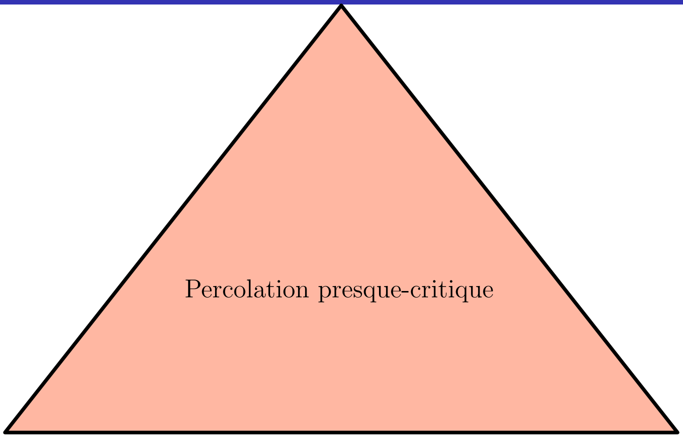
Géométrie presque-critique

Soutenance d'habilitation

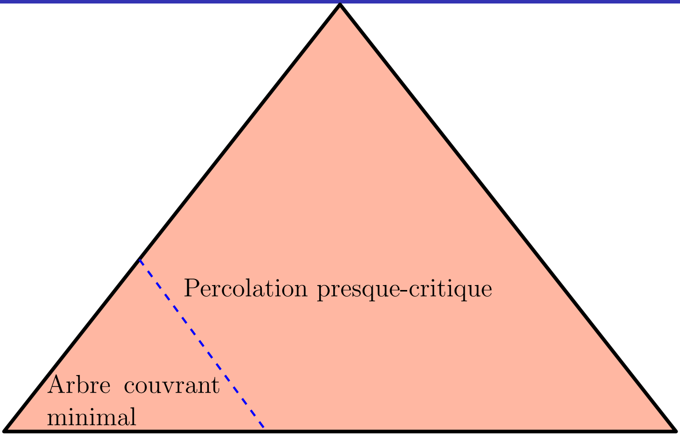
Christophe Garban
ENS Lyon, CNRS

ENS Lyon, le 9 décembre 2013

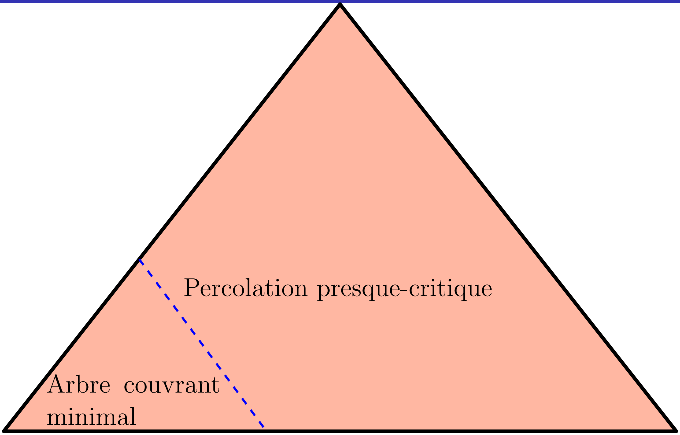
Programme de la soutenance



Programme de la soutenance



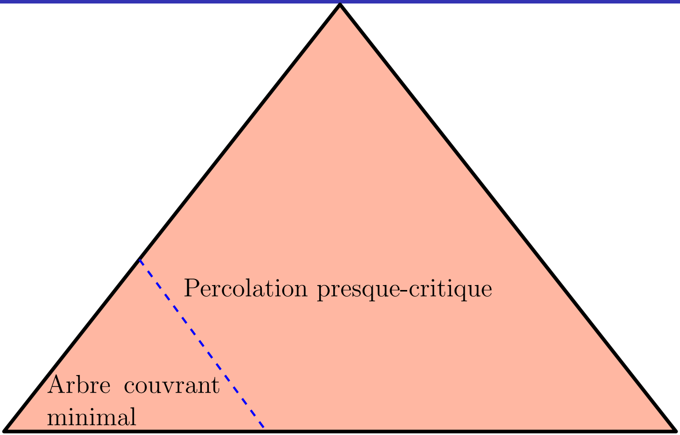
Programme de la soutenance



Ising presque-critique :

- *en température*
- *en champ magnétique*

Programme de la soutenance



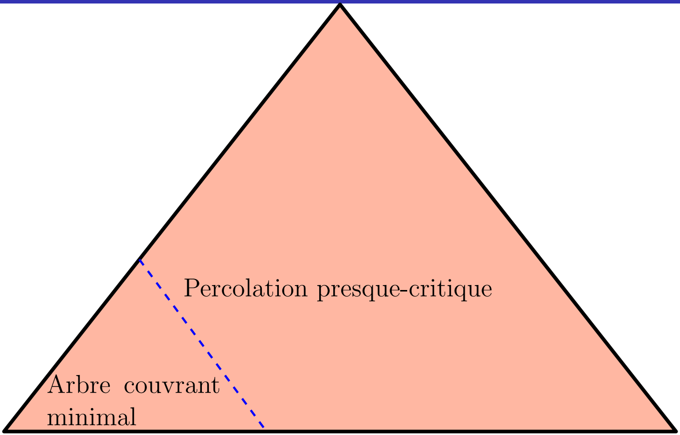
Ising presque-critique :

- *en température*
- *en champ magnétique*

Dynamiques :

- percolation FK
- percolation dynamique conservative

Programme de la soutenance



Ising presque-critique :

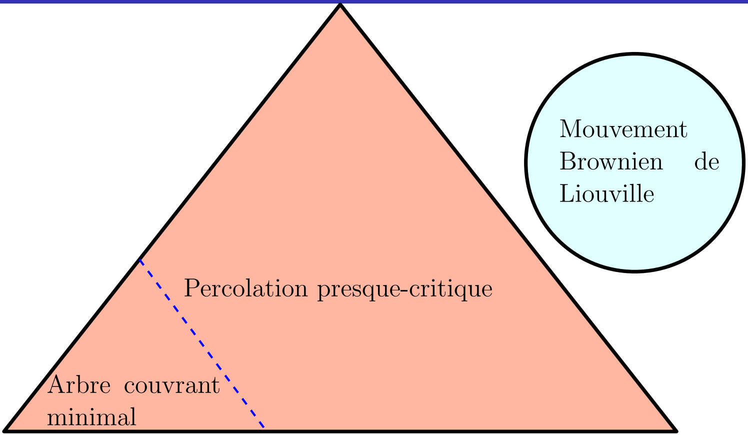
- *en température*
- *en champ magnétique*

Dynamiques :

- percolation FK
- percolation dynamique conservative

Flots coalescents (une nouvelle approche)

Programme de la soutenance



Ising presque-critique :

- *en température*
- *en champ magnétique*

Dynamiques :

- percolation FK
- percolation dynamique conservative

Flots coalescents (une nouvelle approche)

Géométrie presque-critique

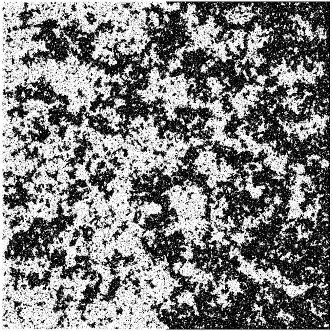
$-2^o C$

$0^o C$

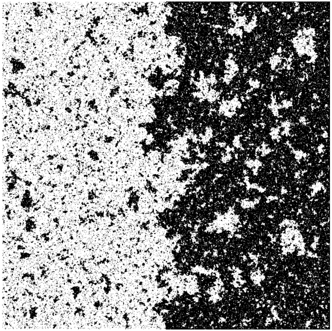
$2^o C$

Géométrie presque-critique (suite)

Le modèle d'Ising près de sa température critique :



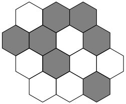
$T = T_c$



$T = T_c - \delta T$

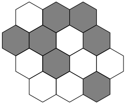
Percolation presque-critique

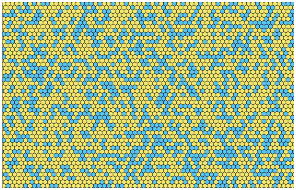
Le modèle de la percolation par site sur $\mathbb{T}$:



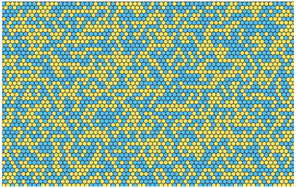
Percolation presque-critique

Le modèle de la percolation par site sur $\mathbb{T}$:

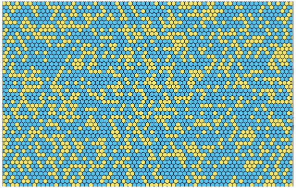




$p < 1/2$



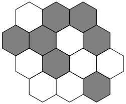
$p = 1/2$

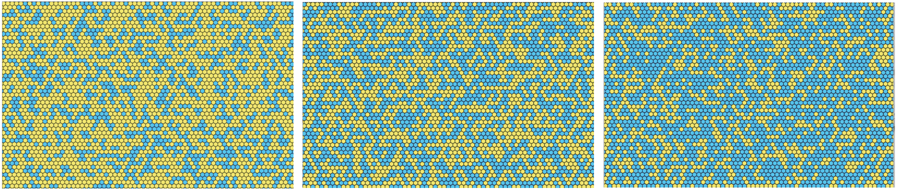


$p > 1/2$

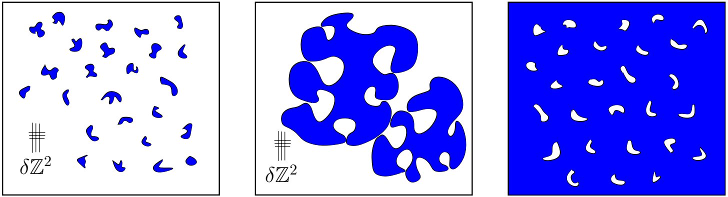
Percolation presque-critique

Le modèle de la percolation par site sur $\mathbb{T}$:

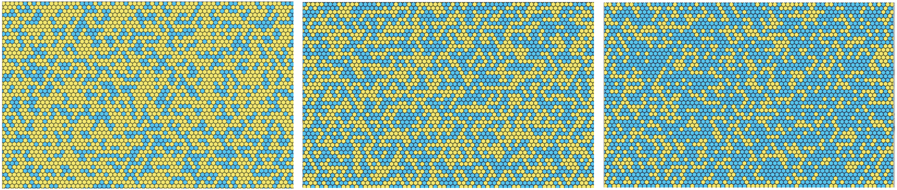




$p < 1/2$ $p = 1/2$ $p > 1/2$

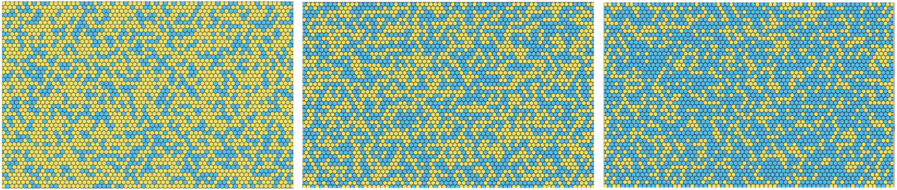


Couplage presque-critique



$\{u_x\}_{x\in\mathbb{T}}$ i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$.
Pour tout $p \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{T}$, $\quad \omega_p(x) := 1_{u_x \leq p}$

Couplage presque-critique



$\{u_x\}_{x \in \mathbb{T}}$ i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$.
Pour tout $p \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{T}$, $\omega_p(x) := 1_{u_x \le p}$

Dans la suite, on va renormaliser notre réseau de la façon suivante $\eta\mathbb{T}$ où η sera toujours la maille du réseau.

$$\boxed{\eta \to 0 \ \ ??}$$

Le bon ZOOM ?

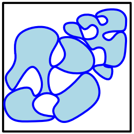
On considère le couplage $\{\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ est la percolation sur $\eta\mathbb{T}$ de paramètre

$$\boxed{p = p_c + \lambda\, r(\eta)}$$

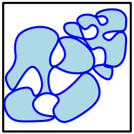
Le bon ZOOM ?

On considère le couplage $\{\omega_\eta^{\mathsf{nc}}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $\omega_\eta^{\mathsf{nc}}(\lambda)$ est la percolation sur $\eta\mathbb{T}$ de paramètre

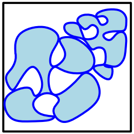
$$\boxed{p = p_c + \lambda\, r(\eta)}$$



$\lambda < 0$



$\lambda = 0$

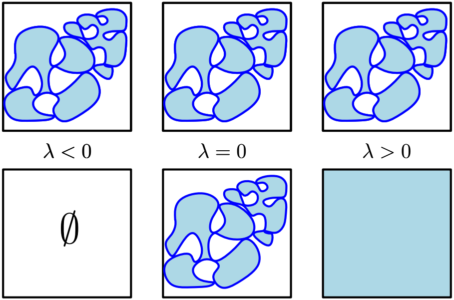


$\lambda > 0$

Le bon ZOOM ?

On considère le couplage $\{\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ est la percolation sur $\eta\mathbb{T}$ de paramètre

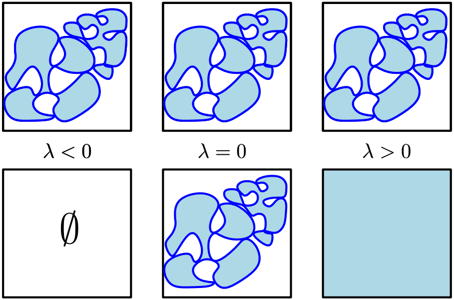
$$\boxed{p = p_c + \lambda\, r(\eta)}$$



Le bon ZOOM ?

On considère le couplage $\{\omega_\eta^{\text{nc}}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $\omega_\eta^{\text{nc}}(\lambda)$ est la percolation sur $\eta\mathbb{T}$ de paramètre

$$\boxed{p = p_c + \lambda\, r(\eta)}$$



Théorème (Kesten, 1987)

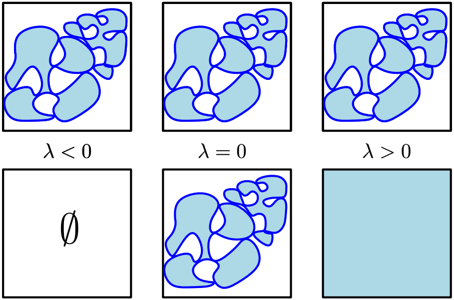
La bonne vitesse est donnée par

$$\begin{aligned} r(\eta) &:= \eta^2 \alpha_4(\eta, 1)^{-1} \\ &= \eta^{3/4+o(1)} \end{aligned}$$

Le bon ZOOM ?

On considère le couplage $\{\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ est la percolation sur $\eta\mathbb{T}$ de paramètre

$$\boxed{p = p_c + \lambda\, r(\eta)}$$



Théorème (Kesten, 1987)

La bonne vitesse est donnée par

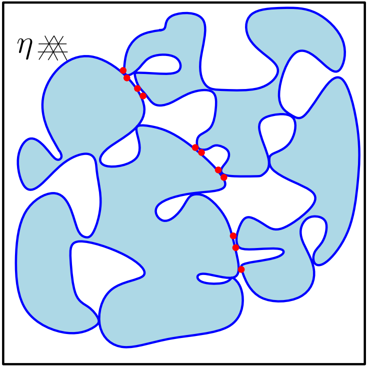
$$\begin{aligned} r(\eta) &:= \eta^2 \alpha_4(\eta, 1)^{-1} \\ &= \eta^{3/4+o(1)} \end{aligned}$$

Définition

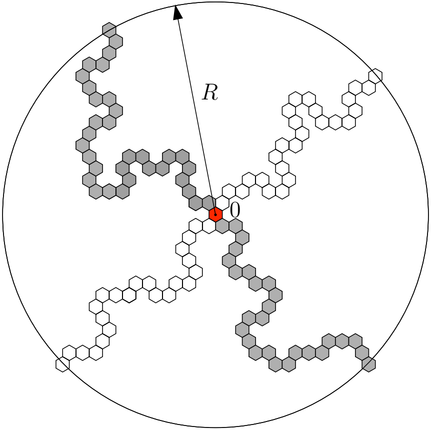
On définit ainsi pour tout $\eta > 0$ un processus càdlàg

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda) \in \{0,1\}^{\eta\mathbb{T}}$$

Zoom et points pivots



$$\sharp = \eta^{-2}\alpha_4(\eta, 1)$$



Limite d'échelle ?

Question

Est-ce que le processus $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \omega_\eta^{\mathsf{nc}}(\lambda)$ *converge (en loi) quand* $\eta \searrow 0$ *vers un processus limite*

$$\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathsf{nc}}(\lambda) \ ?$$

On verrait ainsi la transition de phase vue depuis le "continu".

Question

Est-ce que le processus $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \omega_\eta^{\mathsf{nc}}(\lambda)$ *converge (en loi) quand* $\eta \searrow 0$ *vers un processus limite*

$$\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathsf{nc}}(\lambda) \ \ ?$$

On verrait ainsi la transition de phase vue depuis le "continu".

- Il faut préciser quel est le **cadre** !

Limite d'échelle ?

Question

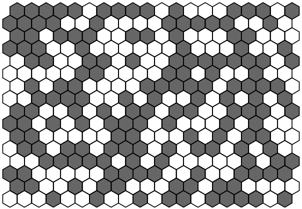
Est-ce que le processus $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ *converge (en loi) quand* $\eta \searrow 0$ *vers un processus limite*

$$\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda) \ \ ?$$

On verrait ainsi la transition de phase vue depuis le "continu".

- Il faut préciser quel est le **cadre** !
- On cherche un espace Polonais (E, d) dont les points $\omega \in E$ sont naturellement identifiés à des **configurations de percolation**.
- De nombreuses approches on été proposées !

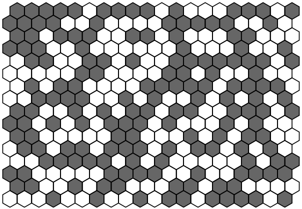
Une première idée naturelle



Cette configuration sur $\eta\mathbb{T}$ est naturellement codée par la distribution

$$X_\eta := \eta \sum_{x \in \eta\mathbb{T}} \sigma_x \, \delta_x$$

Une première idée naturelle

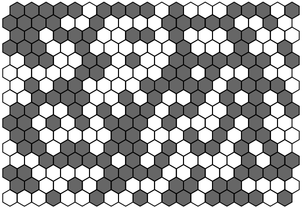


Cette configuration sur $\eta\mathbb{T}$ est naturellement codée par la distribution

$$X_\eta := \eta \sum_{x \in \eta\mathbb{T}} \sigma_x \, \delta_x$$

Par ailleurs $\{X_\eta\}_\eta$ est tendue dans $\mathcal{H}^{-1-\varepsilon}$ et converge vers le **bruit blanc Gaussien** sur $\mathbb{R}^2$.

Une première idée naturelle



Cette configuration sur $\eta\mathbb{T}$ est naturellement codée par la distribution

$$X_\eta := \eta \sum_{x\in\eta\mathbb{T}} \sigma_x \, \delta_x$$

Par ailleurs $\{X_\eta\}_\eta$ est tendue dans $\mathcal{H}^{-1-\varepsilon}$ et converge vers le **bruit blanc Gaussien** sur $\mathbb{R}^2$.

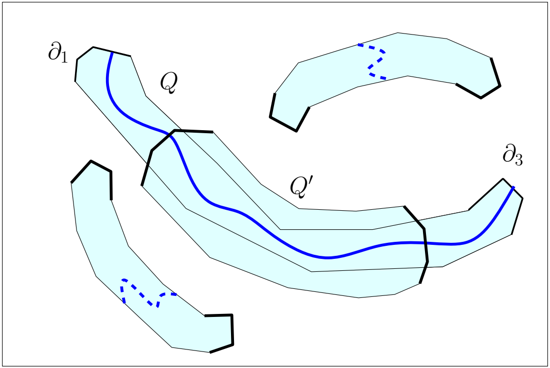
Théorème (Benjamini, Kalai, Schramm, 1999)

Ce cadre n'est pas le bon pour conserver à la limite l'information sur les "clusters". (Les observables naturelles pour la percolation sont très discontinues pour la topologie induite par $\| \cdot \|_{\mathcal{H}^{-1-\varepsilon}}$).

Quelques approches historiques

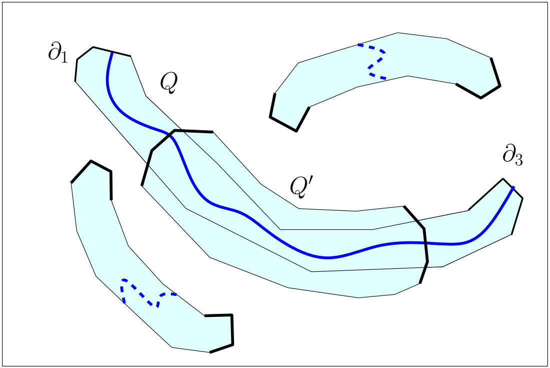
1. Aizenman 1998 et Aizenman, Burchard 1999.
2. Camia, Newman 2006.
3. L'espace topologique $(\mathscr{H}, \mathcal{T})$ de **Schramm-Smirnov** 2011

L'espace $\mathscr{H}$ de Schramm-Smirnov



- Soit $(\mathcal{Q}, d_{\mathcal{Q}})$ l'espace de tous les **quads** (ou tubes).
- On pourrait considérer l'espace $\{0,1\}^{\mathcal{Q}}$

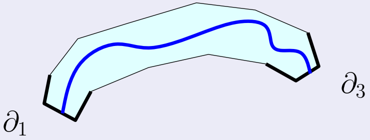
L'espace $\mathscr{H}$ de Schramm-Smirnov



- Soit $(\mathcal{Q}, d_{\mathcal{Q}})$ l'espace de tous les **quads** (ou tubes).
- On pourrait considérer l'espace $\{0,1\}^{\mathcal{Q}}$
- On considère plutôt un espace $\mathscr{H} \subset \{0,1\}^{\mathcal{Q}}$ qui respect l'**ordre partiel** sur $\mathcal{Q}$: $Q > Q'$

L'espace $\mathscr{H}$ de Schramm-Smirnov

Définition

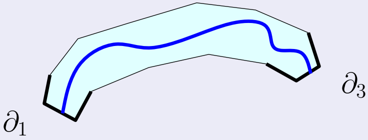


À chaque tube $Q \in \mathcal{Q}$, on associe ***l'événement de croisement***

$$\boxminus_Q := \{\omega \in \mathscr{H}, Q \in \omega\}$$

L'espace $\mathscr{H}$ de Schramm-Smirnov

Définition



*À chaque tube $Q \in \mathcal{Q}$, on associe **l'événement de croisement***

$$\boxminus_Q := \{\omega \in \mathscr{H}, Q \in \omega\}$$

Théorème (Schramm, Smirnov)

L'espace $\mathscr{H}$ peut être muni d'une topologie naturelle $\mathcal{T}$ ($\approx$ topologie de Fell) pour laquelle, $(\mathscr{H}, \mathcal{T})$ est :

- *compact, Hausdorff et métrisable*
- *on fixera un distance non-explicite $d_{\mathscr{H}}$*

La "feuille critique" $\omega_\infty \sim \mathbb{P}_\infty$

Définition ($\lambda = 0$)

Pour chaque maille $\eta > 0$, on peut voir $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ comme un point aléatoire dans l'espace compact $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$.

La "feuille critique" $\omega_\infty \sim \mathbb{P}_\infty$

Définition ($\lambda = 0$)

Pour chaque maille $\eta > 0$, on peut voir $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ comme un point aléatoire dans l'espace compact $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$.

Théorème (Smi 2001, CN 2006, GPS 2013)

$\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ converge en loi dans $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$ vers une **percolation continue** *$\omega_\infty \sim \mathbb{P}_\infty$.*

$\Rightarrow$ ça règle le cas $\lambda = 0$

Hors de la “feuille critique”

- Question 1 : soit $\lambda > 0$ fixé.

$$\text{Rappel : } p = p_c + \lambda r(\eta)$$

Est-ce que $\omega_\eta^{\text{nc}}(\lambda)$ converge en loi dans $\mathscr{H}$ vers un objet limite ?

Hors de la "feuille critique"

- Question 1 : soit $\lambda > 0$ fixé.

$$\text{Rappel : } p = p_c + \lambda r(\eta)$$

Est-ce que $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ converge en loi dans $\mathscr{H}$ vers un objet limite ?

Théorème (Nolin, Werner 2009)

Soit $\lambda \neq 0$ fixé. Toutes les valeurs d'adhérence $\omega_{\eta_k}^{\mathrm{nc}}(\lambda) \stackrel{(d)}{\rightarrow} \tilde{\omega}_\infty(\lambda)$ sont telles que leurs **interfaces** *sont* **singulières** *par rapport aux courbes SLE_6 !*

Hors de la "feuille critique"

- Question 1 : soit $\lambda > 0$ fixé.

$$\text{Rappel : } p = p_c + \lambda r(\eta)$$

Est-ce que $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ converge en loi dans $\mathscr{H}$ vers un objet limite ?

Théorème (Nolin, Werner 2009)

Soit $\lambda \neq 0$ fixé. Toutes les valeurs d'adhérence $\omega_{\eta_k}^{\mathrm{nc}}(\lambda) \stackrel{(d)}{\to} \tilde{\omega}_\infty(\lambda)$ sont telles que leurs **interfaces** *sont* **singulières** *par rapport aux courbes SLE_6 !*

- Question 2 : qu'en est-il de la convergence du processus càdlàg $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$?

Hors de la "feuille critique"

- Question 1 : soit $\lambda > 0$ fixé.

$$\text{Rappel : } p = p_c + \lambda r(\eta)$$

Est-ce que $\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ converge en loi dans $\mathscr{H}$ vers un objet limite ?

Théorème (Nolin, Werner 2009)

Soit $\lambda \neq 0$ fixé. Toutes les valeurs d'adhérence $\omega_{\eta_k}^{\mathrm{nc}}(\lambda) \overset{(d)}{\to} \tilde{\omega}_\infty(\lambda)$ sont telles que leurs **interfaces** *sont* **singulières** *par rapport aux courbes SLE_6 !*

- Question 2 : qu'en est-il de la convergence du processus càdlàg $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$?

On introduit **l'espace de Skorohod** Sk des trajectoires càdlàg à valeurs dans $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$.

Résultats principaux

Théorème (G., Pete, Schramm 2013)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé.*

$$\omega_\eta^{\mathsf{nc}}(\lambda) \xrightarrow{(d)} \omega_\infty^{\mathsf{nc}}(\lambda)$$

La convergence en loi a lieu dans l'espace $(\mathscr{H}, \mathsf{d}_{\mathscr{H}})$.

Résultats principaux

Théorème (G., Pete, Schramm 2013)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda) \xrightarrow{(d)} \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$$

La convergence en loi a lieu dans l'espace $(\mathscr{H}, \mathrm{d}_{\mathscr{H}})$.

Théorème (G., Pete, Schramm 2013)

Le processus càdlàg $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ converge en loi vers $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ pour la topologie de Skorohod sur $\mathscr{H}$.

Résultats (suite)

Modèle de la percolation dynamique : $t \mapsto \omega(t)$

Résultats (suite)

Modèle de la percolation dynamique : $t \mapsto \omega(t)$
Si $\eta \searrow 0$, on peut aussi considérer une percolation dynamique renormalisée

$$t \mapsto \omega_\eta(t) \in \mathscr{H}$$

C'est un processus càdlàg à l'équilibre dans $\mathscr{H}$.

Résultats (suite)

Modèle de la percolation dynamique : $t \mapsto \omega(t)$
Si $\eta \searrow 0$, on peut aussi considérer une percolation dynamique renormalisée

$$t \mapsto \omega_\eta(t) \in \mathscr{H}$$

C'est un processus càdlàg à l'équilibre dans $\mathscr{H}$.

Théorème (GPS 2013)

$t \mapsto \omega_\eta(t)$ *converge en loi dans* Sk *vers une* **percolation dynamique continue** $t \mapsto \omega_\infty(t)$.

Résultats (suite)

Modèle de la percolation dynamique : $t \mapsto \omega(t)$
Si $\eta \searrow 0$, on peut aussi considérer une percolation dynamique renormalisée

$$t \mapsto \omega_\eta(t) \in \mathscr{H}$$

C'est un processus càdlàg à l'équilibre dans $\mathscr{H}$.

Théorème (GPS 2013)

$t \mapsto \omega_\eta(t)$ *converge en loi dans* Sk *vers une* **percolation dynamique continue** $t \mapsto \omega_\infty(t)$.

- Approches possibles
- Stratégie
- Difficultés
- Propriétés des objets limites

Approches possibles

Rappel du cas $\lambda = 0$ (cas critique). On a $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ et on veut montrer un résultat de limite d'échelle.

- tension, $\checkmark$
- **unicité** ??
- ingrédient principal pour l'unicité : la **formule de Cardy/Smirnov** !

Approches possibles

Rappel du cas $\lambda = 0$ (cas critique). On a $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ et on veut montrer un résultat de limite d'échelle.

- tension, ✓
- **unicité** ??
- ingrédient principal pour l'unicité : la **formule de Cardy/Smirnov** !

1. Cela suggère l'approche suivante pour le cas $\lambda \neq 0$: Pour tout $p \neq p_c(\mathbb{T}) = 1/2$, trouver une **observable** F_p, **massive harmonique**

$$\boxed{\Delta F_p(x) \approx m(p) F_p(x)}$$

La "masse" $m(p)$ se comporterait alors en $|p - p_c|^{8/3}$.

Approches possibles

Rappel du cas $\lambda = 0$ (cas critique). On a $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ et on veut montrer un résultat de limite d'échelle.

- tension, ✓
- **unicité** ??
- ingrédient principal pour l'unicité : la **formule de Cardy/Smirnov** !

1. Cela suggère l'approche suivante pour le cas $\lambda \neq 0$: Pour tout $p \neq p_c(\mathbb{T}) = 1/2$, trouver une **observable** F_p, **massive harmonique**

$$\boxed{\Delta F_p(x) \approx m(p) F_p(x)}$$

La "masse" $m(p)$ se comporterait alors en $|p - p_c|^{8/3}$.

2. Pour la limite de la percolation dynamique

$$\mathrm{Cov}\big[f_\eta^1(\omega_\eta(0)) f_\eta^2(\omega_\eta(t))\big] = \sum_S \hat{f}_\eta^1(S) \hat{f}_\eta^2(S) e^{-t|S|}$$

Approches possibles

Rappel du cas $\lambda = 0$ (cas critique). On a $\omega_\eta \sim \mathbb{P}_\eta$ et on veut montrer un résultat de limite d'échelle.

- tension, $\checkmark$
- **unicité** ??
- ingrédient principal pour l'unicité : la **formule de Cardy/Smirnov** !

1. Cela suggère l'approche suivante pour le cas $\lambda \neq 0$: Pour tout $p \neq p_c(\mathbb{T}) = 1/2$, trouver une **observable** F_p, **massive harmonique**

$$\boxed{\Delta F_p(x) \approx m(p) F_p(x)}$$

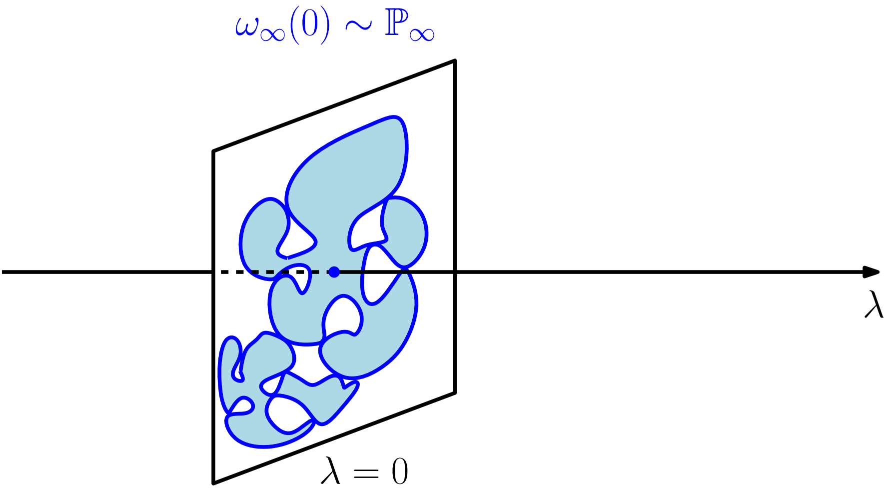
   La "masse" $m(p)$ se comporterait alors en $|p - p_c|^{8/3}$.

2. Pour la limite de la percolation dynamique

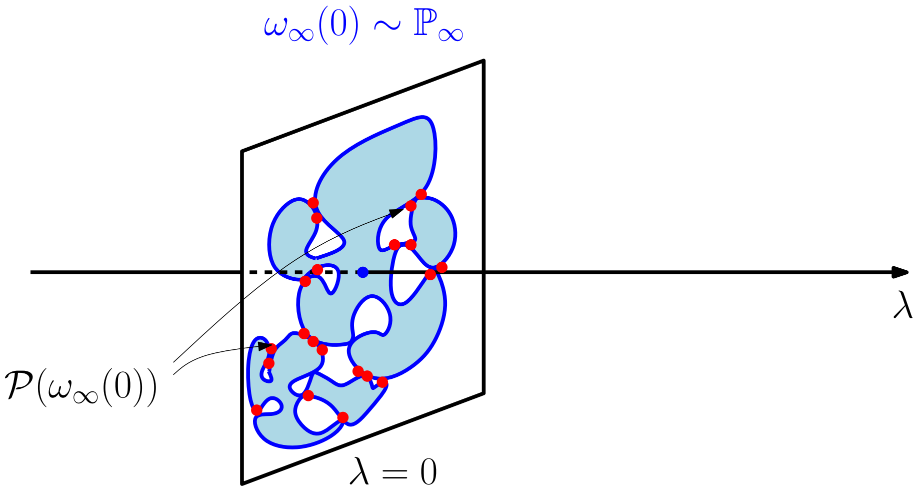
$$\mathrm{Cov}\big[f_\eta^1(\omega_\eta(0)) f_\eta^2(\omega_\eta(t))\big] = \sum_S \hat{f}_\eta^1(S) \hat{f}_\eta^2(S) e^{-t|S|}$$

3. Une approche "perturbative".

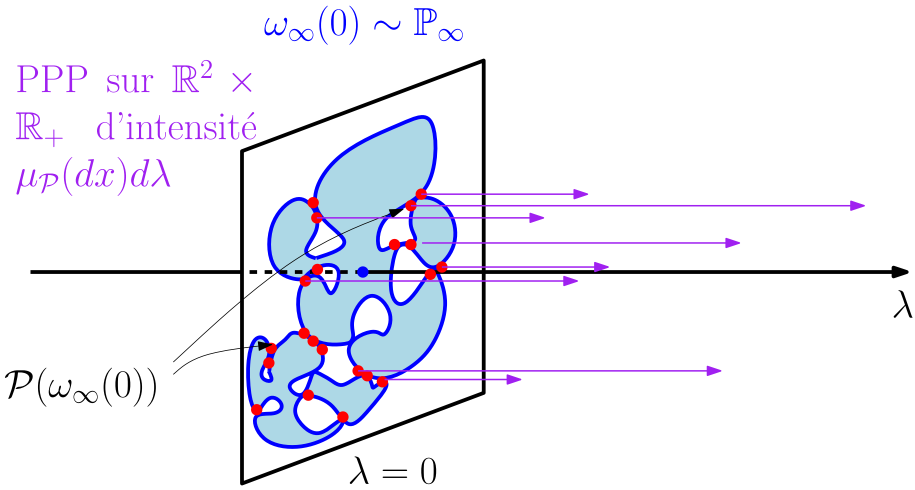
Stratégie naïve pour construire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$



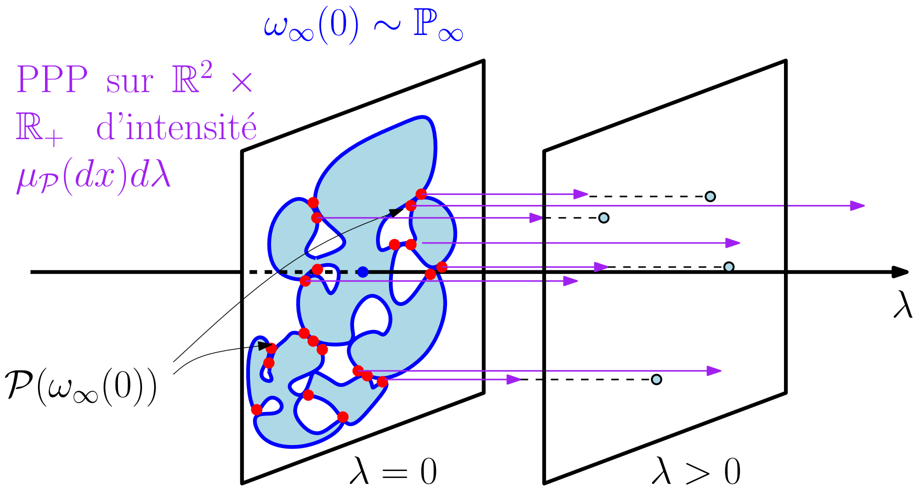
Stratégie naïve pour construire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$



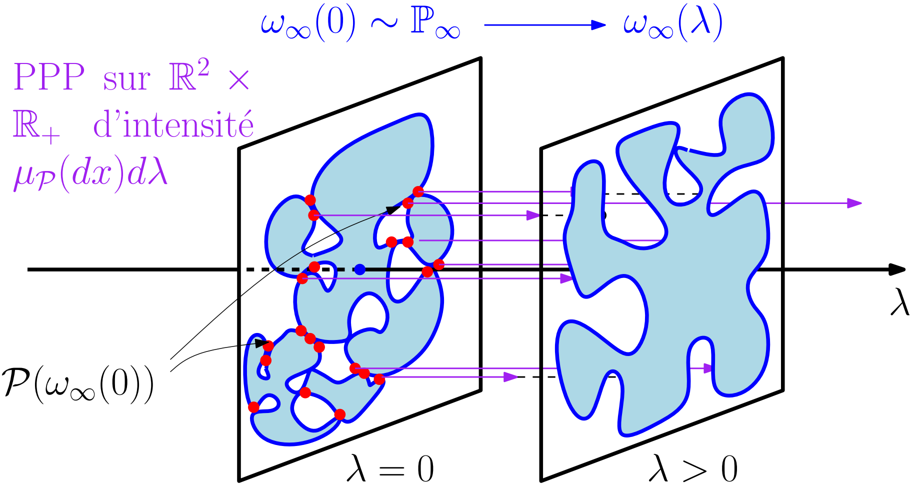
Stratégie naïve pour construire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{nc}(\lambda)$



Stratégie naïve pour construire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$



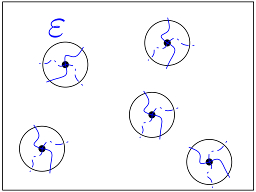
Stratégie naïve pour construire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\text{nc}}(\lambda)$



Difficulté 1 : "trop" de points pivots

La mesure de masse μ est dégénérée (∞) (les points pivots sont denses dans le plan).

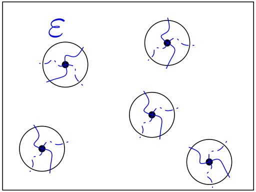
$\Rightarrow$ on introduit un cut-off $\varepsilon > 0$ et on cherche à définir μ^ε, une mesure de masse sur les points pivots $\mathcal{P}^\varepsilon$.



Difficulté 1 : "trop" de points pivots

La mesure de masse μ est dégénérée (∞) (les points pivots sont denses dans le plan).

$\Rightarrow$ on introduit un cut-off $\varepsilon > 0$ et on cherche à définir μ^ε, une mesure de masse sur les points pivots $\mathcal{P}^\varepsilon$.

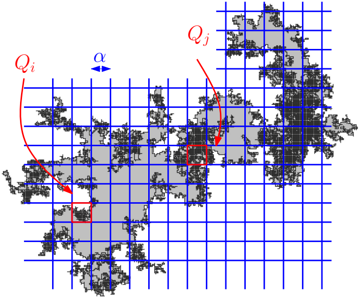


Théorème (GPS 2013)

On peut définir une application mesurable μ^ε de $\mathscr{H}$ dans l'espace des mesures localement finies telle que

$$(\omega_\eta, \mu^\varepsilon(\omega_\eta)) \xrightarrow{(d)} (\omega_\infty, \mu^\varepsilon(\omega_\infty))$$

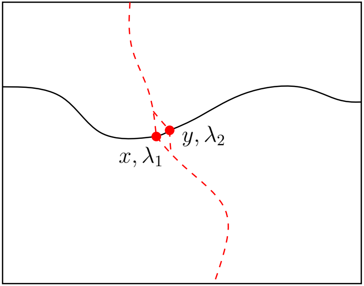
quand $\eta \searrow 0$



!!! L'application $\omega \mapsto \mu^\varepsilon(\omega)$ n'est pas continue !!!

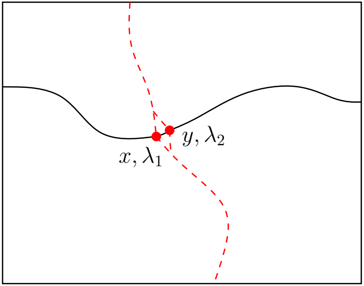
Difficulté 2 : Stabilité lorsque $\varepsilon \to 0$

Au niveau discret, cela équivaut à considérer une dynamique approchée $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathsf{nc},\varepsilon}(\lambda) \Rightarrow$ Pb de STABILITÉ lorsque $\varepsilon \searrow 0$?



Difficulté 2 : Stabilité lorsque $\varepsilon \to 0$

Au niveau discret, cela équivaut à considérer une dynamique approchée $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda) \Rightarrow$ Pb de STABILITÉ lorsque $\varepsilon \searrow 0$?

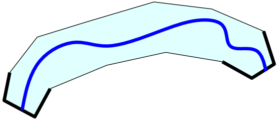


Théorème (GPS 2013)

Il existe une fonction continue $\psi : [0,1] \to [0,1]$, *avec* $\psi(0) = 0$ *telle que unif. en* $0 < \eta < \varepsilon$,

$$\mathbb{E}\left[d_{\mathsf{Sk}}(\omega_\eta(\cdot), \omega_\eta^\varepsilon(\cdot))\right] \leq \psi(\varepsilon)$$

Difficulté 3 : quelles sont les observables sur $\mathscr{H}$?

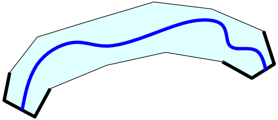


1. Rappel : $\boxminus_Q := \{\omega \in \mathscr{H}, Q \in \omega\}$

Théorème (Schramm-Smirnov 2011)

$$\mathbb{P}_\infty\left[\partial \boxminus_Q\right] = 0 \;\Rightarrow \mathbb{P}_\eta\left[\boxminus_Q\right] \longrightarrow \mathbb{P}_\infty\left[\boxminus_Q\right]$$

Difficulté 3 : quelles sont les observables sur $\mathscr{H}$?



1. Rappel : $\boxminus_Q := \{\omega \in \mathscr{H}, Q \in \omega\}$

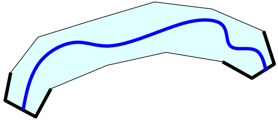
Théorème (Schramm-Smirnov 2011)

$$\mathbb{P}_\infty\left[\partial \boxminus_Q\right] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\eta\left[\boxminus_Q\right] \longrightarrow \mathbb{P}_\infty\left[\boxminus_Q\right]$$

2. !!! tout n'est pas observable dans $\mathscr{H}$: par exemple le **Bruit blanc**.

Difficulté 3 : quelles sont les observables sur $\mathscr{H}$?

1. Rappel : $\boxminus_Q := \{\omega \in \mathscr{H}, Q \in \omega\}$



Théorème (Schramm-Smirnov 2011)

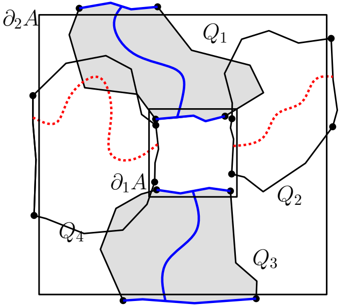
$$\mathbb{P}_\infty\left[\partial \boxminus_Q\right] = 0 \;\Rightarrow \mathbb{P}_\eta\left[\boxminus_Q\right] \longrightarrow \mathbb{P}_\infty\left[\boxminus_Q\right]$$

2. !!! tout n'est pas observable dans $\mathscr{H}$: par exemple le **Bruit blanc**.
3. **Les événements à plusieurs bras**

Théorème (GPS 2013)

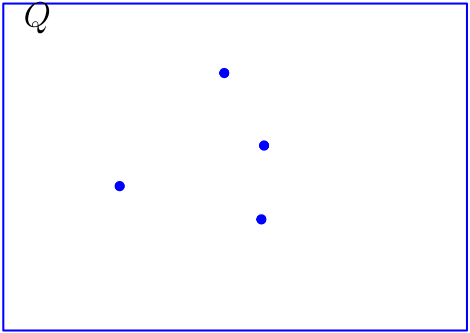
On peut définir $\mathcal{A}_4(A)$ un ouvert de $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$ tel que

$$\mathbb{P}_\eta\left[\mathcal{A}_4(A)\right] \longrightarrow \mathbb{P}_\infty\left[\mathcal{A}_4(A)\right]$$

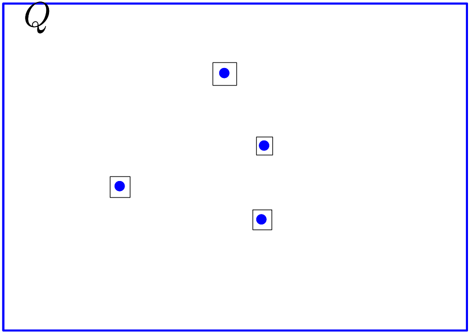


Difficulté 4 : Suivre l'évolution de $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$

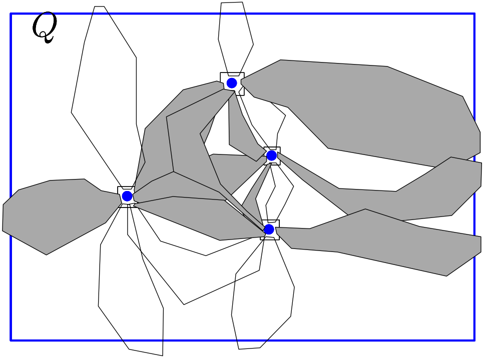
Si on connaît $\omega_\infty(0) \sim \mathbb{P}_\infty$ ainsi que $\mathrm{PPP}^\varepsilon = \mathrm{PPP}^\varepsilon(\mu^\varepsilon)$, comment définir la trajectoire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}$?



Si on connaît $\omega_\infty(0) \sim \mathbb{P}_\infty$ ainsi que $\mathrm{PPP}^\varepsilon = \mathrm{PPP}^\varepsilon(\mu^\varepsilon)$, comment définir la trajectoire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}$?

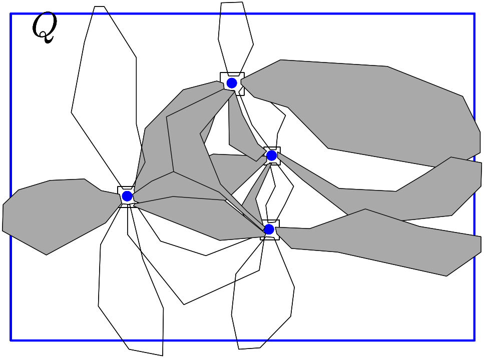


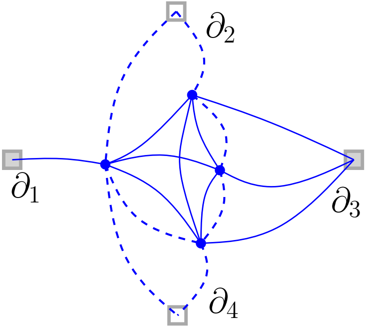
Si on connaît $\omega_\infty(0) \sim \mathbb{P}_\infty$ ainsi que $\mathrm{PPP}^\varepsilon = \mathrm{PPP}^\varepsilon(\mu^\varepsilon)$, comment définir la trajectoire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}$?



Difficulté 4 : Suivre l'évolution de $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$

Si on connaît $\omega_\infty(0) \sim \mathbb{P}_\infty$ ainsi que $\mathrm{PPP}^\varepsilon = \mathrm{PPP}^\varepsilon(\mu^\varepsilon)$, comment définir la trajectoire $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc},\varepsilon}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}$?





Propriété 1 : invariance par changement d'échelle

Théorème

L'application $z \mapsto \alpha \cdot z$ *agit de la façon suivante sur la percolation presque-critique :*

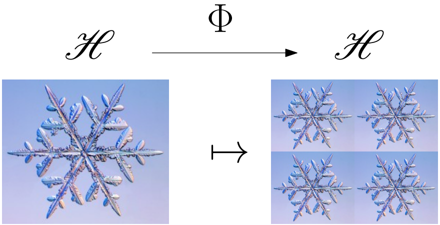
$$\Big(\lambda \mapsto \alpha \cdot \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)\Big) \overset{(d)}{=} \Big(\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\alpha^{-3/4}\lambda)\Big)$$

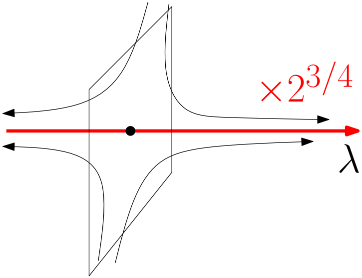
Propriété 1 : invariance par changement d'échelle

Théorème

L'application $z \mapsto \alpha \cdot z$ *agit de la façon suivante sur la percolation presque-critique :*

$$\left(\lambda \mapsto \alpha \cdot \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)\right) \overset{(d)}{=} \left(\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\alpha^{-3/4}\lambda)\right)$$





Propriété 2 : covariance conforme

Théorème

L'image d'une percolation dynamique $\omega_\infty(\cdot)$ *par une application conforme* $\phi : D \to \tilde{D}$ *est à nouveau une percolation dynamique* $\tilde{\omega}_\infty(\cdot)$ *dans* $\tilde{D}$ *mais dont "l'horloge spatiale" tourne à vitesse* $|\phi'(z)|^{-3/4}$.

Propriété 2 : covariance conforme

Théorème

L'image d'une percolation dynamique $\omega_\infty(\cdot)$ *par une application conforme* $\phi : D \to \tilde{D}$ *est à nouveau une percolation dynamique* $\tilde{\omega}_\infty(\cdot)$ *dans* $\tilde{D}$ *mais dont "l'horloge spatiale" tourne à vitesse* $|\phi'(z)|^{-3/4}$.

"Relativistic invariance" O Schramm, ICM 2006.

Propriétés 3 : percolation par gradient

On obtient une limite d'échelle pour la **percolation par gradient**

Propriété 4 : MARKOV

$t \mapsto \omega_\eta(t)$ et $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ sont clairement Markoviens dans $\mathscr{H}$.
Qu'en est-il de leur limite ??

$t \mapsto \omega_\eta(t)$ et $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ sont clairement Markoviens dans $\mathscr{H}$.
Qu'en est-il de leur limite ??

Theorem

- $t \mapsto \omega_\infty(t)$ *est un Process de Markov réversible pour la mesure* $\mathbb{P}_\infty$.
- $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ *est un Process de Markov* ***homogène en temps****, non-reversible.*

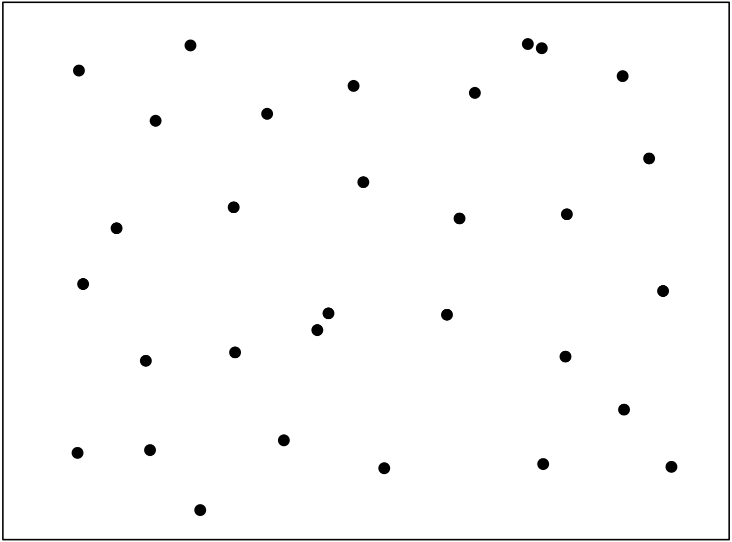
Propriété 4 : MARKOV

$t \mapsto \omega_\eta(t)$ et $\lambda \mapsto \omega_\eta^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ sont clairement Markoviens dans $\mathscr{H}$.
Qu'en est-il de leur limite ??

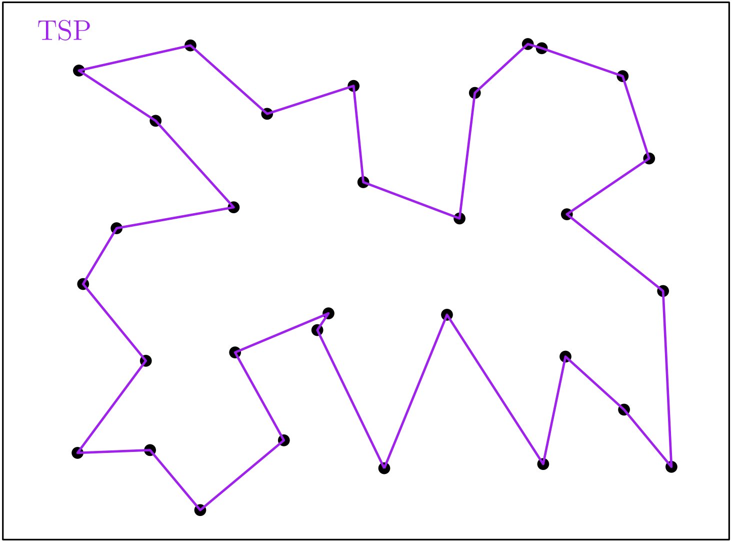
Theorem

- *$t \mapsto \omega_\infty(t)$ est un Process de Markov réversible pour la mesure $\mathbb{P}_\infty$.*
- *$\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$ est un Process de Markov **homogène en temps**, non-reversible.*
- *On obtient ainsi des **diffusions** naturelles sur $(\mathscr{H}, \mathrm{d}_{\mathscr{H}})$. !!! Ce ne sont PAS des processus de Feller.*

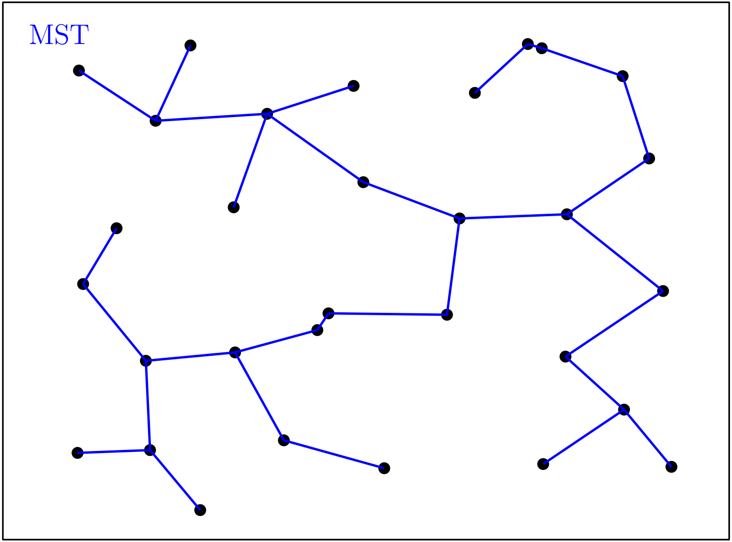
Arbre couvrant minimal (MST)



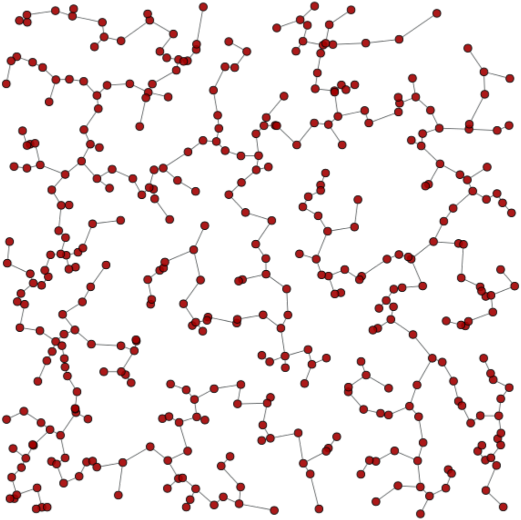
Arbre couvrant minimal (MST)



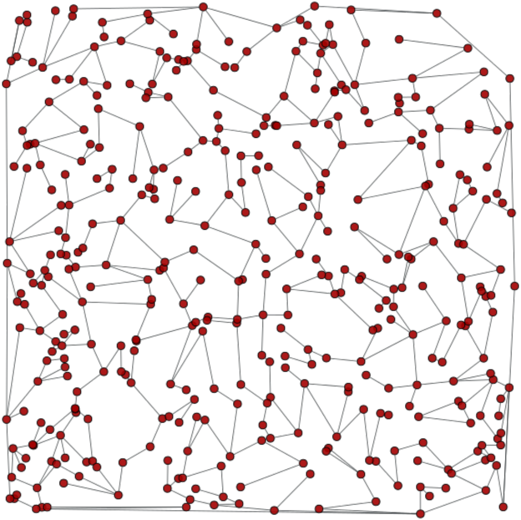
Arbre couvrant minimal (MST)



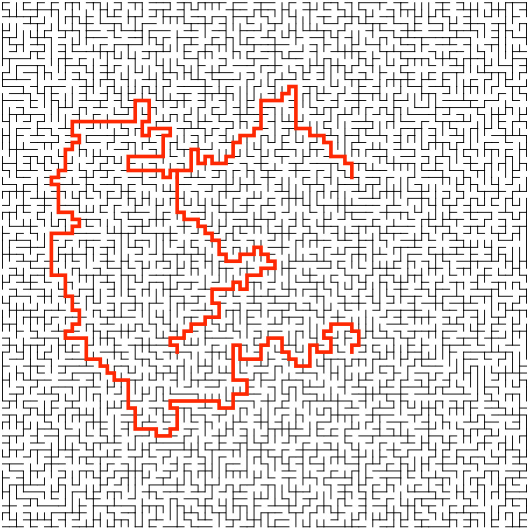
UST v.s. MST



UST v.s. MST



Arbre couvrant minimal sur $\mathbb{Z}^2$



Théorème limite pour le MST

Théorème

MST_η *converge en loi vers* MST_∞ *(pour la topologie de ABNW 1999)*

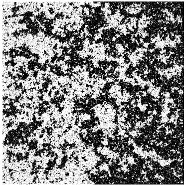
Théorème limite pour le MST

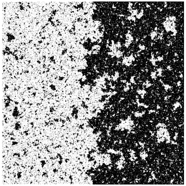
Théorème

MST$_\eta$ *converge en loi vers* MST$_\infty$ *(pour la topologie de ABNW 1999)*

"Preuve" : on part de $\lambda = -\infty$ et on suit le processus de coalescence induit par $\lambda \mapsto \omega_\infty^{\mathrm{nc}}(\lambda)$.

Modèle d'Ising presque-critique

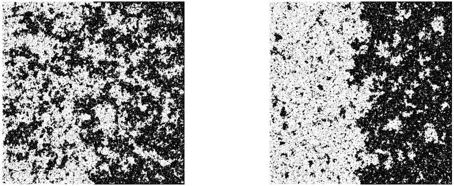




La **percolation FK** :

$$\mathbb{P}_{p,q}\big[\omega\big] \propto p^{o}\,(1-p)^{f}\ \ {\color{red}q^{\sharp\text{clusters}}}$$

Modèle d'Ising presque-critique

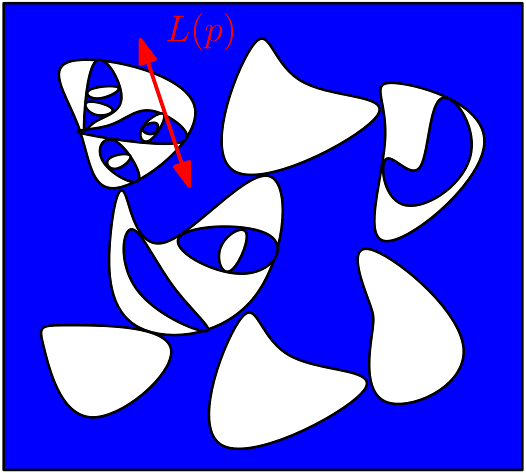


La **percolation FK** :

$$\mathbb{P}_{p,q}\left[\omega\right] \propto p^{o}\,(1-p)^{f}\ q^{\sharp\text{clusters}}$$

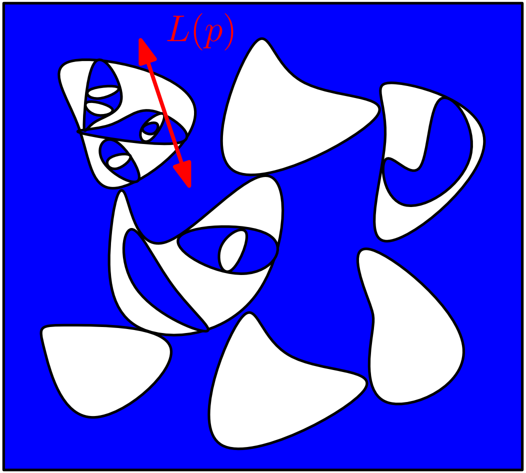
- Modèle d'Ising $\leftrightarrow$ FK avec $q = 2$
- Dans ce cas $p = 1 - e^{-2\beta}$
- $p_c(q=2) = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$
- Modèle d'Ising presque-critique $=$ percolation FK presque-critique $p = p_c(2) + \delta p$

Notion de longueur de correlation



$$p = p_c + \delta p$$

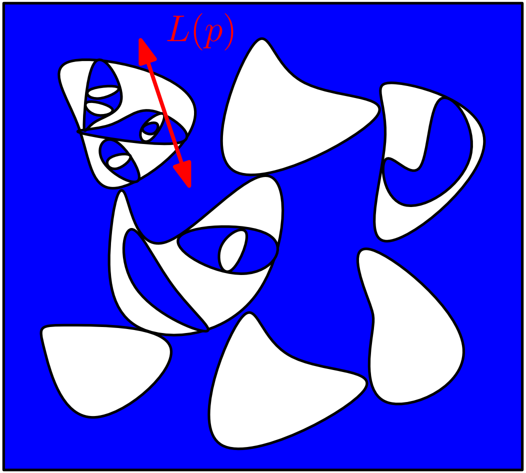
Notion de longueur de correlation



$$p = p_c + \delta p$$

$$L(p) = \left|\frac{1}{p-p_c}\right|^{\nu+o(1)}$$

Notion de longueur de correlation



$$p = p_c + \delta p$$

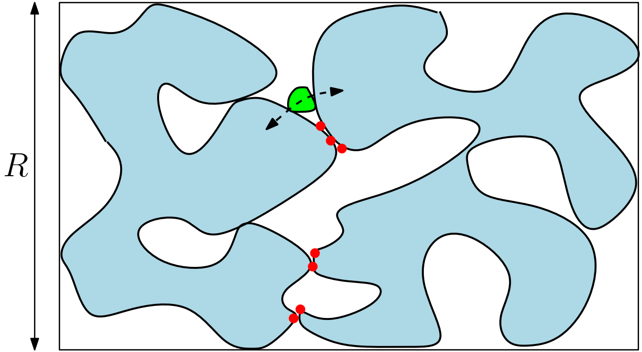
$$L(p) = |\frac{1}{p-p_c}|^{\nu+o(1)}$$

Example (critical percolation):

Theorem (Smirnov-Werner 2001):

$$L(p) = |\frac{1}{p-p_c}|^{4/3+o(1)}$$

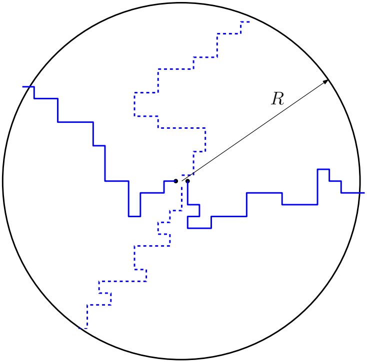
Recette pour intuiter la longeur de corrélation



Soit $p = p_c + \delta p$. On cherche une échelle $R = L(p)$ telle que :

$$|p - p_c|\, L(p)^2 \alpha_4(L(p)) \asymp 1$$

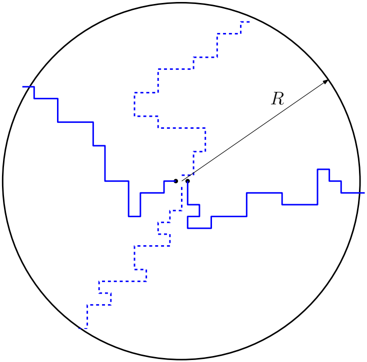
Longeur de corrélation pour la percolation FK



Conjecture ("travail en cours" avec H. Duminil-Copin)

$$\alpha_4^{\mathrm{FK}}(R) = R^{-\frac{35}{24}+o(1)}$$

Longeur de corrélation pour la percolation FK



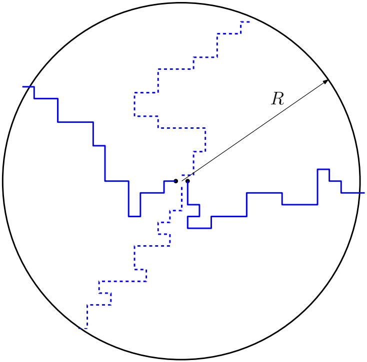
Conjecture ("travail en cours" avec H. Duminil-Copin)

$$\alpha_4^{\mathrm{FK}}(R) = R^{-\frac{35}{24}+o(1)}$$

En utilisant la RECETTE ci-dessus, on trouve

$$L(p) = \left|\frac{1}{p - p_c(2)}\right|^{24/13+o(1)}$$

Longeur de corrélation pour la percolation FK



Conjecture ("travail en cours" avec H. Duminil-Copin)

$$\alpha_4^{\mathrm{FK}}(R) = R^{-\frac{35}{24}+o(1)}$$

En utilisant la RECETTE ci-dessus, on trouve

$$L(p) = \left|\frac{1}{p-p_c(2)}\right|^{24/13+o(1)}$$

En contradiction avec les résultats connus depuis Onsager qui suggèrent

$$L(p) \approx \left|\frac{1}{p-p_c}\right| \ll \left|\frac{1}{p-p_c}\right|^{24/13}$$

Explication

Trois hypothèses possibles :

Explication

Trois hypothèses possibles :

1. Onsager s'est trompé (en 1944 ...)

Explication

Trois hypothèses possibles :

1. Onsager s'est trompé (en 1944 ...)
2. On s'est trompé dans le calcul de l'exposant α_4^{FK}

Explication

Trois hypothèses possibles :

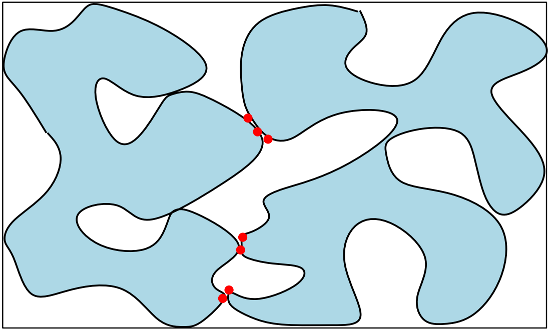
1. Onsager s'est trompé (en 1944 ...)
2. On s'est trompé dans le calcul de l'exposant α_4^{FK}
3. Le mécanisme qui sous-tend le régime presque-critique est plus subtil qu'en percolation presque-critique.

Explication

Trois hypothèses possibles :

1. Onsager s'est trompé (en 1944 ...)
2. On s'est trompé dans le calcul de l'exposant α_4^{FK}
3. Le mécanisme qui sous-tend le régime presque-critique est plus subtil qu'en percolation presque-critique.

$\Rightarrow$ **couplages monotones** de Grimmett



Ce qu'on peut démontrer

Théorème (Duminil-Copin, G., Pete, 2011)

On fixe $q = 2$. Il existe une constante $c > 0$ t.q.

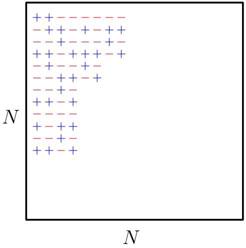
$$c \, \frac{1}{|p - p_c|} \leq L(p) \leq c^{-1} \frac{1}{|p - p_c|} \log \frac{1}{|p - p_c|}$$

pour tout $p \neq p_c$.

Technique de preuve :

- Sans passer par l'étude du phénomène d'auto-organisation
- On utilise l'observable para-fermionique de Smirnov hors de $p = p_c$ (on suit ici les travaux antérieurs de Beffara, Duminil-Copin).

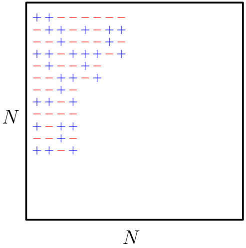
Champ magnétique critique du modèle d'Ising



Théorème (Camia, G., Newman, 2012)

(i) $m_N := \frac{\sum \sigma_x}{N^{15/8}} \xrightarrow{(d)} m_\infty$

(ii) *La distribution* $\Phi_N := \sum_{x \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2} N^{-15/8} \sigma_x \delta_x$ *converge en loi (pour la topologie de* $\mathcal{H}^{-3}$*) vers* Φ_∞



Théorème (Camia, G., Newman, 2012)

(i) $m_N := \frac{\sum \sigma_x}{N^{15/8}} \xrightarrow{(d)} m_\infty$

(ii) *La distribution* $\Phi_N := \sum_{x \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2} N^{-15/8} \sigma_x \delta_x$ *converge en loi (pour la topologie de* $\mathcal{H}^{-3}$*) vers* Φ_∞

Théorème

On obtient ainsi un modèle d'Ising presque-critique en pondérant par $e^{h \langle \Phi_\infty, 1_{\Lambda_L} \rangle}$.

preuve :

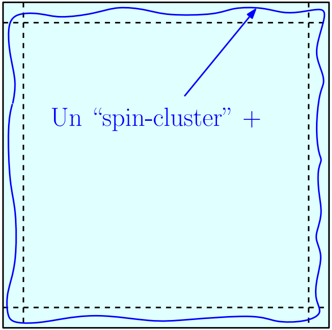
1. Mesures d'aires sur les clusters FK
2. En utilisant les fonctions à k-points de Chelkak, Hongler et Izyurov

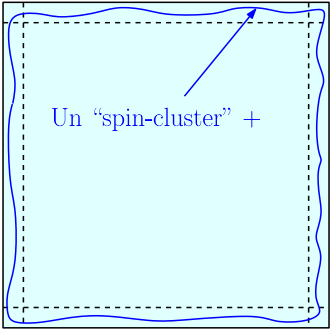
Champ magnétique critique (suite)

Théorème

$$\mathbb{P}\left[m_\infty > x\right] \approx e^{-C\,x^{16}}\,,$$

où la constante C ne dépend PAS des conditions au bord.





Théorème

$$\mathbb{P}\big[m_\infty > x\big] \approx e^{-C\, x^{16}},$$

où la constante C ne dépend PAS des conditions au bord.

Résultats presque-critiques classiques :

Théorème (Smirnov, Werner, 2001)

$$\theta_{\mathbb{T}}(p) = (p-1/2)_+^{5/36+o(1)}$$

Théorème (Onsager 1944)

$$\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ \asymp (\beta - \beta_c)_+^{1/8}$$

Théorème (CGN 2012)

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta_c, h} \asymp h^{\frac{1}{15}}$$

Une dynamique à l'équilibre pour FK

- $\tilde{L}(p) \approx \left|\frac{1}{p-p_c}\right|^{24/13}$ ne décrit PAS la longueur de corrélation du système presque-critique.

Une dynamique à l'équilibre pour FK

- $\tilde{L}(p) \approx \left|\frac{1}{p-p_c}\right|^{24/13}$ ne décrit PAS la longueur de corrélation du système presque-critique.
- En revanche, elle décrit bien une **longueur de corrélation** pour la dynamique non-locale (type "heat-bath") qui préserve FK critique !

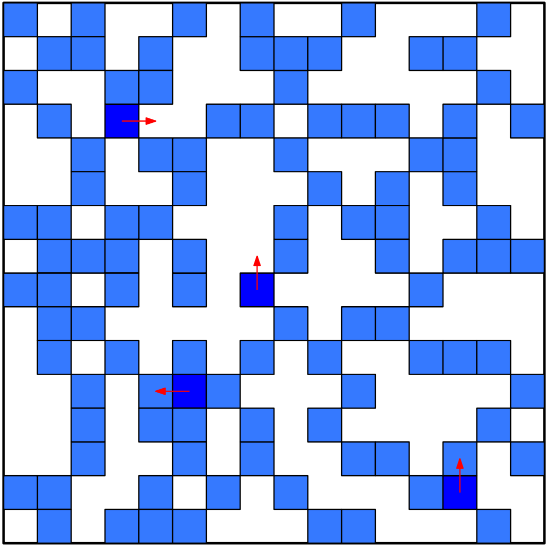
Une dynamique à l'équilibre pour FK

- $\tilde{L}(p) \approx \left|\frac{1}{p-p_c}\right|^{24/13}$ ne décrit PAS la longueur de corrélation du système presque-critique.
- En revanche, elle décrit bien une **longueur de corrélation** pour la dynamique non-locale (type "heat-bath") qui préserve FK critique !

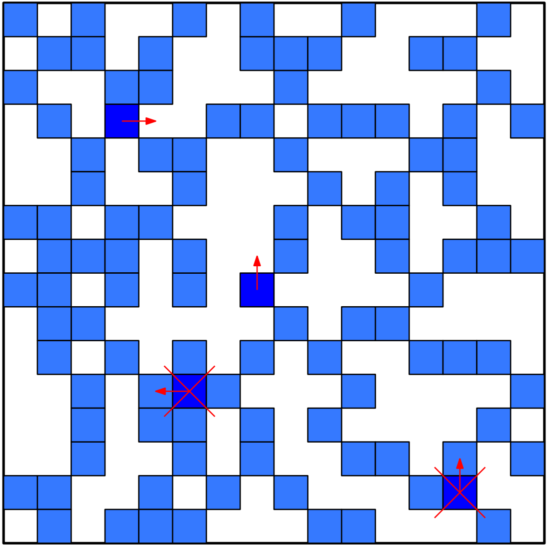
Théorème (en cours avec G. Pete)

Si $t \mapsto \omega^{\mathrm{FK}}(t)$ est la dynamique critique (de type "heat-bath") à l'équilibre, alors l'ensemble des ***temps exceptionnels*** *où une composante connexe infinie apparaît est p.s. de dimension $\leq \frac{10}{13}$.*

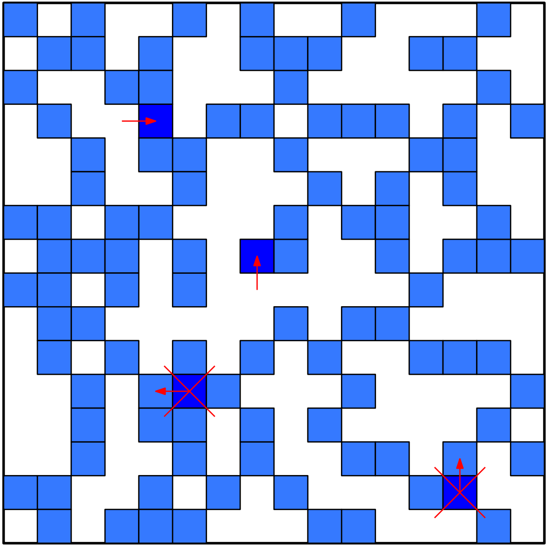
Percolation dynamique conservative



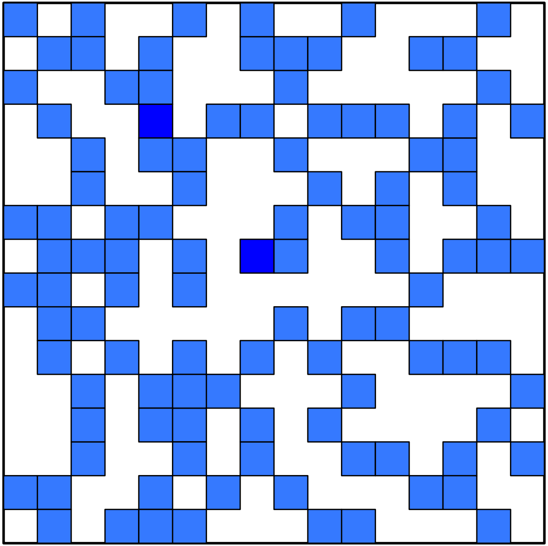
Percolation dynamique conservative



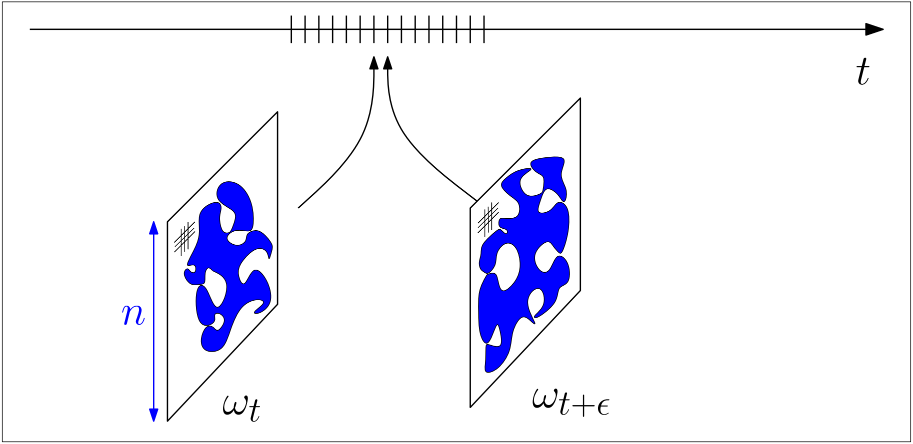
Percolation dynamique conservative



Percolation dynamique conservative



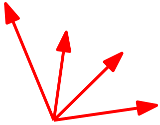
Sensibilité au bruit



Difficulté : étude spectrale

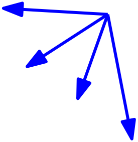
$$f_n : \{-1, 1\}^{n^2} \to \{0, 1\}$$

i.i.d. basis:



$(\chi_S)_{S\subset[m]}$

"exclusion" basis:



Résultat

Théorème (Broman, G., Steif, 2011)

Si le noyau est tel que

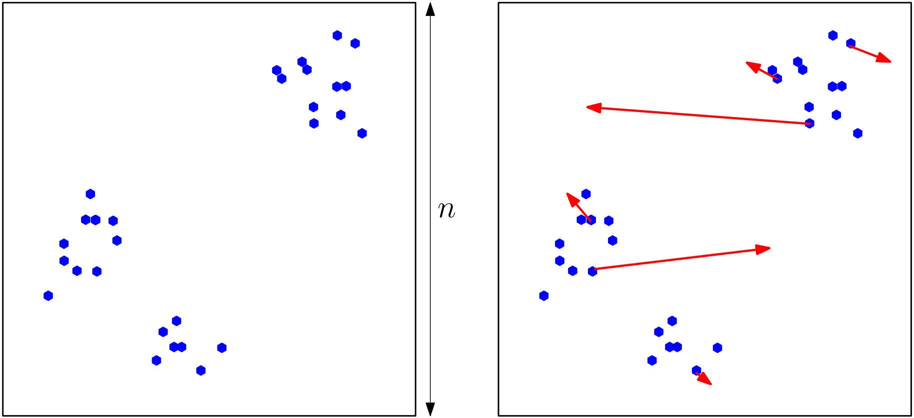
$$P(x,y) \asymp \frac{1}{\|x-y\|^{2+\alpha}}$$

pour un exposant $\alpha > 0$, *alors sur* $\mathbb{Z}^{2,\mathrm{site}}$, $\mathbb{Z}^{2,\mathrm{bond}}$ *ou* $\mathbb{T}$, *au point critique, on a*

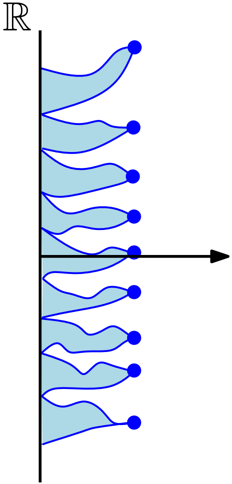
$$\mathrm{Cov}\left[f_n(\omega_0^P),\ f_n(\omega_t^P)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

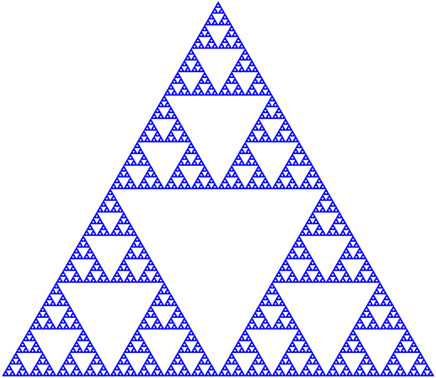
De plus on peut choisir $t = t_n \geq n^{-\beta(\alpha)}$.

"Preuve" : étudier la diffusion du spectre de Fourier sous le processus d'exclusion

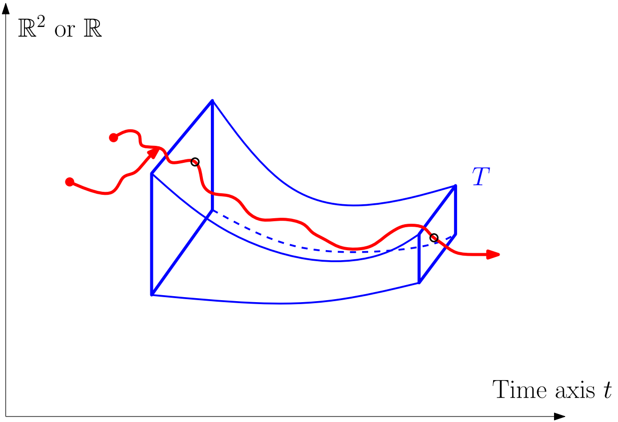


Flots coalescents





Nouvel espace pour les flots coalescents, inspiré de l'espace de Schramm-Smirnov $\mathscr{H}$



Aperçu des résultats

Théorème (Berestycki, G, Sen, 2013)

(i) *On définit un flot coalescent* ξ_∞^S *sur le* triangle de Sierpinski

(ii) **principe d'invariance :**

$$\xi_\eta^S \xrightarrow{(d)} \xi_\infty^S$$

Aperçu des résultats

Théorème (Berestycki, G, Sen, 2013)

(i) *On définit un flot coalescent* ξ_∞^S *sur le* triangle de Sierpinski

(ii) **principe d'invariance :**

$$\xi_\eta^S \xrightarrow{(d)} \xi_\infty^S$$

Théorème (Bel Houri, Mountford, Sun, Valle 2006)

Pour la convergence vers le Brownian Web en $d = 1$

- $\mathbb{E}\left[X^{3+\varepsilon}\right] < \infty$ *est suffisant pour un* **principe d'invariance**
- $\mathbb{E}\left[X^{3-\varepsilon}\right] < \infty$ *est nécessaire !*

Aperçu des résultats

Théorème (Berestycki, G, Sen, 2013)

(i) *On définit un flot coalescent* ξ_∞^S *sur le* triangle de Sierpinski

(ii) **principe d'invariance :**

$$\xi_\eta^S \xrightarrow{(d)} \xi_\infty^S$$

Théorème (Bel Houri, Mountford, Sun, Valle 2006)

Pour la convergence vers le Brownian Web en $d = 1$

- $\mathbb{E}\left[X^{3+\varepsilon}\right] < \infty$ *est suffisant pour un* **principe d'invariance**
- $\mathbb{E}\left[X^{3-\varepsilon}\right] < \infty$ *est nécessaire !*

Théorème (BGS 2013)

On montre un **principe d'invariance** *vers le Brownian Web si et seulement si*

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2 < \infty$$

Aperçu des résultats

Théorème (Berestycki, G, Sen, 2013)

(i) *On définit un flot coalescent* ξ_∞^S *sur le* triangle de Sierpinski

(ii) **principe d'invariance :**

$$\xi_\eta^S \xrightarrow{(d)} \xi_\infty^S$$

Théorème (Bel Houri, Mountford, Sun, Valle 2006)

Pour la convergence vers le Brownian Web en $d = 1$

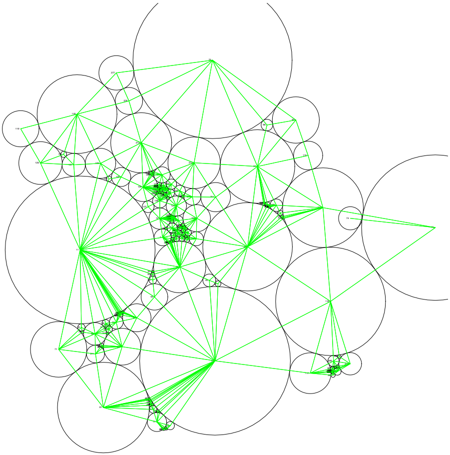
- $\mathbb{E}\left[X^{3+\varepsilon}\right] < \infty$ *est suffisant pour un* **principe d'invariance**
- $\mathbb{E}\left[X^{3-\varepsilon}\right] < \infty$ *est nécessaire !*

Théorème (BGS 2013)

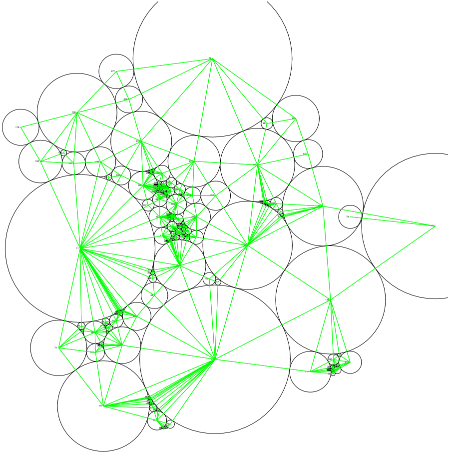
On montre un **principe d'invariance** *vers le Brownian Web si et seulement si*

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sigma^2 < \infty$$

Gravité quantique de Liouville



Gravité quantique de Liouville



Conjecture

La mesure empirique de ce plongement tend en loi vers la **mesure de Liouville** $\mu := \exp\left[\sqrt{8/3}\, h\right]$ *où h est un* **champ libre Gaussien**

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2} h} dW_t$"

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Kahane (1985)
Duplantier-Sheffield
Benjamini-Schramm
Rhodes-Vargas

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2} h} dW_t$"

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Kahane (1985)
Duplantier-Sheffield
Benjamini-Schramm
Rhodes-Vargas

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

????????

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2} h} dW_t$"

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Kahane (1985)
Duplantier-Sheffield
Benjamini-Schramm
Rhodes-Vargas

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

????????

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2}h} dW_t$"

ILL-POSED

G.-Rhodes-Vargas

Kahane (1985)
Duplantier-Sheffield
Benjamini-Schramm
Rhodes-Vargas

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

????????

?

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2} h} dW_t$"

ILL-POSED

G.-Rhodes-Vargas

Trois objets Riemanniens naturels sur $\mathbb{S}^2$ muni d'un GFF

Une FORME VOLUME

"$e^{\gamma h} dx dy$"

Kahane (1985)
Duplantier-Sheffield
Benjamini-Schramm
Rhodes-Vargas

Une métrique Riemannienne

"$e^{\gamma h}(dx^2 + dy^2)$"

????????

?

Stollmann
Sturm

Une DIFFUSION

"$dB_t = e^{-\frac{\gamma}{2} h} dW_t$"

ILL-POSED

G.-Rhodes-Vargas

Résultat principal

Théorème (G., Rhodes, Vargas 2013)

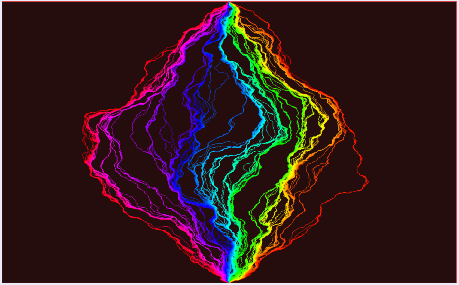
Pour tout $\gamma < \gamma_c = 2$, *étant donné un* **champ libre Gaussien** *h sur* $\mathbb{S}^2$, *on peut définir un* **semi-groupe** P_t^h *sur* $\mathbb{S}^2$ *tel que, p.s. en h :*

(i) $(P_t^h)_{t\geq 0}$ *est un processus de Feller sur* $\mathbb{S}^2$

(ii) (P_t^h) *est réversible par rapport à la* **mesure de Liouville** M_γ

Théorème (Juhan Aru, 2013)

Il existe des ensembles qui dépendent naturellement du champ libre h et pour lesquels la relation KPZ n'est PAS satisfaite !



- Formules de KPZ pour les lignes de niveaux/flots (SLE_κ, $\kappa \in [0, 8]$).
- Etude des moments exponentiels du winding des processus SLE_κ
- Pour plus de détails : Juhan Aru, arXiv:1312.1324