<u>Nota Bene</u> :

Pour des questions de droits de reproduction, des illustrations ont été retirées de cette version de la thèse.

Thèse de Doctorat de
L'Université Paris VI - Pierre et Marie Curie

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Sébastien Gauthier

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)

Thèse dirigée par :
Catherine Goldstein
et soutenue à Paris le 17 décembre 2007

JURY :

M. Sinnou David	Examinateur
Mme Catherine Goldstein	Directrice
M. Philippe Nabonnand	Examinateur
M. Norbert Schappacher	Rapporteur
M. Joachim Schwermer	Examinateur

Rapporteur non présent à la soutenance : M. John Stillwell

Remerciements

De nombreuses personnes ont permis que ce travail de thèse ressemble finalement à quelque chose. Au moment où la rédaction se termine et qu'il s'agit de les remercier j'ai peur d'oublier quelqu'un, j'espère que l'on ne m'en tiendra pas rigueur.

Il est évident que je ne serais pas arrivé au bout de cette thèse (elle n'aurait d'ailleurs certainement jamais commencé) sans ma rencontre avec Catherine Goldstein. Mon entêtement à échapper à un mémoire de Maîtrise plein de simulations sur ordinateur m'a finalement conduit dans son bureau, j'ai depuis la chance de bénéficier de ses conseils. Je la remercie de sa disponibilité ainsi que de ne jamais avoir perdu patience à relire mes brouillons et à corriger mes fautes d'orthographe toujours trop nombreuses !

J'ai reçu aussi un excellent accueil de la part des autres membres du projet Histoire des Sciences Mathématiques ; merci donc à Liliane Alfonsi, David Aubin, Jean Delcourt, Christian Gilain, Martine Gouny, Juliette Leloup et Laurent Mazliak.

J'ai fait mes débuts dans l'enseignement grâce à un demi-poste d'ATER à Paris VIII. Je remercie Marie-José Durand-Richard, Daniel Goldberg et Jim Ritter pour leur aide et leurs conseils lors de mon passage dans cette université.

Merci à Dominique Flament, Philippe Nabonnand et Klaus Volkert dont les invitations m'ont permis de faire mes premiers pas dans des colloques, séminaires etc. J'ai pu ainsi participer au groupe de travail sur "les fondements et la justification" et je remercie les autres membres, Jacqueline Boniface, José Ferreirós et Javier Legris, d'avoir accepté que je prenne part à leurs discussions.

Je veux aussi remercier June Barrow-Green qui a bien voulu extraire de sa base de données *Britmath* des informations sur l'université de Manchester, Moritz Epple qui a pris le temps de discuter de ma thèse lors de son passage à Paris en décembre 2006, ainsi que Della Fenster qui m'a donné des indications sur Blichfeldt.
Ma reconnaissance va également au Professeur John W.S. Cassels qui a répondu avec générosité à mes questions à propos de Mordell.

Les chapitres de la thèse consacrés à Mordell et Davenport ont été significativement améliorés grâce à des archives conservées à Cambridge. Merci aux personnels de la Wren Library (Trinity College) et de la bibliothèque de St John's College d'avoir permis la consultation des archives de Davenport et de Mordell. Je tiens à remercier plus particulièrement Jonathan Harrison (Special Collections Librarian, St John's College) pour son efficacité et sa gentillesse.
Merci aussi à Patricia White, archiviste à la bibliothèque de l'université de Stanford, d'avoir bien voulu me faire parvenir des copies de cours de Blichfeldt.

Norbert Schappacher et John Stillwell ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs remarques et leurs suggestions. Merci également à Sinnou David, Philippe Nabonnand et Joachim Schwermer pour leur participation au jury.

Je ne peux pas laisser passer l'occasion de faire un petit clin d'oeil à Bertrand et Hakim. On se suit déjà depuis... et nous voilà bientôt tous les trois au bout, courage Bertrand !

Pour terminer, un grand merci à ma famille ; d'abord à mes parents pour leur soutien, Frédéric mon conseiller en informatique particulier et Alexandre qui veut absolument être cité ici.

Table des matières

Introduction

Sommaire

0.1 Les paradoxes de la géométrie des nombres

Un étudiant en mathématiques entend parler de géométrie des nombres pour la première fois assez tard dans sa formation. Ce constat apparaît déjà comme paradoxal car beaucoup de mathématiciens ont insisté sur le caractère simple et intuitif de la géométrie des nombres[1]. Ce premier contact se passe en général dans des cours de théorie des nombres avancés[2] et la géométrie des nombres y est surtout présente comme préliminaire, à travers un résultat servant à démontrer certains théorèmes plus centraux pour ces cours. Ce résultat, attribué au mathématicien Hermann Minkowski, est présenté actuellement de la façon suivante. Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et notons μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soit maintenant L un réseau de $\mathbb{R}^n$ d'origine O et dont une base est $(e_1, \ldots, e_n)$. Une maille du réseau L est alors

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \, , \, 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$$

[1]Ce paradoxe est souligné par Mordell dès 1940 : « The geometry of numbers, or Diophantine approximation, apart from classic results mostly associated with continued fractions, is still an uncommon feature of elementary books despite the simplicity, the generality and the richness of application of some of the results », Mordell 1940a p.295.

[2]En France, la géométrie des nombres ne semble jamais apparaître dans les programmes universitaires avant la première année de Master.

et le volume de cet ensemble $|\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n)|$ ne dépend pas de la base du réseau choisie ; notons-le $\mathrm{Vol}(L)$. On a alors :

Lemme. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable et telle que $\mu(A) > Vol(L)$, il existe a et a' dans A tels que la différence $a - a'$ appartienne à L.*

Ce lemme implique le théorème dit de Minkowski :

Théorème. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe mesurable, symétrique par rapport à l'origine O et telle que $\mu(A) > 2^n\ Vol(L)$. Il existe alors un point a différent de O dans l'intersection $A \cap L$.*

Dans le livre de Pierre Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, par exemple, ce théorème intervient dans un paragraphe intitulé « Préliminaires sur les groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ » ; il sert à établir la preuve de la finitude du groupe des classes d'idéaux et celle du théorème des unités[3].

Pourtant, plusieurs indicateurs suggèrent que la géométrie des nombres est un domaine de recherche autonome, stabilisé et qu'il est donc possible d'identifier et d'enseigner en soi. Même s'ils sont peu nombreux, des livres consacrés spécifiquement à ce sujet ont été publiés et témoignent de son existence en tant que discipline. Les commentaires faits dans ces livres présentent la géométrie des nombres comme un domaine à part entière à l'intérieur de la théorie des nombres et dont l'origine est le travail de Minkowski :

> « This new branch of number theory, which Minkowski christened "The Geometry of Numbers", has developed into an independent branch of number-theory which, indeed, has many applications elsewhere but which is well worth studying for its own sake[4]. »

> « Cette idée extrêmement originale, fondamentale malgré sa simplicité, constitue l'acte de naissance de la géométrie des nombres, branche nouvelle des mathématiques dont l'existence autonome peut être datée de 1896, année de parution du livre *Geometrie der Zahlen* de Minkowski[5]. »

> « The geometry of numbers is a branch of number theory that originated with the publication of Minkowski's seminal work in 1896 and ultimately established itself as an important field of study in its own right[6]. »

[3] Samuel 2003, chapitre IV.
[4] Cassels 1959 p.1.
[5] Martinet 1996 p.8.
[6] Olds et al. 2000 p.xiii.

Cette place de la géométrie des nombres au sein de la théorie des nombres est confirmée par la classification des *Mathematical Reviews*. Dans cette classification, la géométrie des nombres est la sous-section 11H – la théorie des nombres occupe toute la section 11 – et elle est mise au même niveau par exemple que les équations diophantiennes (section 11D) ou les corps de nombres globaux (section 11R).
En plus de ces indices explicites sur l'autonomie du sujet et de son importance, nous trouvons aussi des références à un vocabulaire propre à la géométrie des nombres : certains termes sont employés « conformément à l'usage de la géométrie des nombres[7] », ou parce qu'ils sont « traditionnels en géométrie des nombres[8] ». Dès 1948, Freeman Dyson renvoie son lecteur à des conventions qui seraient alors bien intégrées

> « The subject of this paper belongs to the "geometry of numbers", and the standard terminology of that branch of mathematics will be used[9]. »

Les définitions ou les caractérisations plus fines de la géométrie des nombres proposées par les mathématiciens dénotent aussi une certaine stabilité. Voici quelques-unes de ces caractérisations classées dans l'ordre chronologique :

1. « Wenn man für den Raum rechtwinklige Coordinaten einführt, so entsprechen den Systemen von drei ganzen Zahlen discrete Punkte, welche derart über den Raum verstreut liegen, dass sie eine gewisse Nähe in Bezug auf jede beliebige Raumstelle erreichen. Den Inbegriff aller dieser Punkte mit lauter Coordinaten, die ganze Zahlen sind, nennt der Vortragende das dreidimensionale Zahlengitter ; unter dem Titel "Geometrie der Zahlen" begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung[10]. »

2. « Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, vom dem Charles Hermite einmal als der "introduction des variables continues dans la théorie des nombres" gesprochen hat. Einige hervorstehende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich

[7] Martinet 1996 p.7.
[8] Martinet 1996 p.40.
[9] Dyson 1948 p.82.
[10] « Lorsqu'on introduit pour l'espace des coordonnées cartésiennes, aux systèmes de trois entiers correspondent des points discrets, qui sont répartis dans l'espace de telle sorte qu'ils atteignent une certaine distance par rapport à n'importe quel endroit de l'espace. Le conférencier nomme l'ensemble de tous ces points à coordonnées entières le réseau de nombres à trois dimensions ; sous le titre de "Géométrie des nombres" il comprend des études géométriques sur le réseau de nombres à trois dimensions et sur la figure correspondante dans le plan, et dans un sens plus général, aussi l'extension des résultats de telles études aux variétés de dimension quelconque. », Minkowski 1891c.

veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen.
Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die *Geometrie der Zahlen* bezeichnet habe[11]. »

3. « Le problème fondamental de la géométrie des nombres est de trouver des conditions sous lesquelles une inégalité

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) \ \leq \ \lambda$$

(ou plusieurs inégalités de cette forme) possède une solution entière[12]. »

4. « Parmi les théories les plus séduisantes nous avons celles qui combinent les idées de l'analyse et de l'arithmétique. J'emploie le mot « analyse » ici dans le sens le plus large, c'est-à-dire toute théorie où l'on fait usage de variables continues. Une de ces théories est la géométrie des nombres. [...] Une partie essentielle de la démonstration des résultats arithmétiques dépend de l'emploi de variables continues et d'intégrations effectuées sur ces variables[13]. »

5. « It [the geometry of numbers] consists in interpreting geometrically questions in the theory of numbers, making use of points with integral co-ordinates, either in the plane, or, more generally, in an n-dimensional space[14]. »

6. « The geometry of numbers is an approach to problems of Diophantine approximation, suggested by interpreting them geometrically. The inequality $f(x_1, \ldots, x_n) < \lambda$ represents a certain region in n dimensional space. Under what conditions does this region contain a point with integral coordinates[15] ? »

[11] « Dans ce qui suit je voudrais essayer de donner à grands traits un rapport sur un chapitre spécifique et susceptible de nombreuses applications de la théorie des nombres, un chapitre à propos duquel Charles Hermite a parlé autrefois d'"introduction des variables continues dans la théorie des nombres". Certains problèmes importants concernent ici l'estimation des plus petites contributions d'expressions variables continument pour des valeurs entières des variables.
Les faits intervenant dans ce domaine sont pour la plupart susceptibles d'une représentation géométrique, et cette circonstance a été décisive pour les progrès obtenus ici dans les derniers temps, de sorte que j'ai désigné le domaine entier comme la *Géométrie des nombres.* », Minkowski 1904b p.164.

[12] Davenport 1946b p.1.

[13] Il s'agit d'un extrait de notes non datées de Davenport mais qui sont très certainement de la seconde moitié des années 1940. Davenport (WL), C 169.

[14] Davenport 1947a p.104.

[15] Davenport 1947b p.206.

7. « In the geometry of numbers, we treat a general class of problems in number theory by methods which are suggested by a geometrical interpretation. The problems in question relate to “Diophantine inequalities”, ie inequalities which are to be satisfied by integral values of the variables[16]. »

8. « In der *Geometrie der Zahlen* ist von Gedankengängen die Rede, in denen geometrische Begriffe und Methoden auf zahlentheoretische Fragen angewandt werden. Die Anfänge solcher Betrachtungen gehen auf *C. F. Gauß* zurück. Er und nach ihm *G. Dirichlet, F. Klein, H. Minkowski* und andere hatten mit geometrischen Methoden Erfolg bei Fragestellungen, bei denen ein System ganzer Zahlen eine oder ein System von Ungleichungen zu erfüllen hatte, so vor allem in der Theorie der definiten und indefiniten quadratischen Formen[17]. »

9. « This book deals with bodies and lattices in the n-dimensional euclidean space. The bodies considered are convex bodies centered at the origin or, more generally star bodies (with respect to the origin). With each star body there is associated a continuous distance function ; it is a positively homogeneous function assuming the value 1 at the points of the boundary of the given body.
   The correspondence between star bodies and distance function just sketched brings on the interchange of the geometric and the arithmetic viewpoint that is typical for the subject. Historically, the arithmetic viewpoint existed first. But the geometry of numbers as such came into being only when MINKOWSKI brought in the geometric viewpoint[18]. »

10. « The geometry of numbers deals essentially with an arithmetical question. The simplest one is to find the minimum value of $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ for integer values of (x), where $f(x)$ is a real valued function of the variables (x). As this is rather an ambitious aim, significant estimates for the minimum are of value. [...] Only slight progress was made until the end of the century when Minkowski found some very general results by geometric considerations[19]. »

[16] Résumé d'un cours sur la géométrie des nombres, Berkeley, 24 janvier 1948, DAVENPORT (WL), C 165.

[17] « Dans la Géométrie des nombres il est question de raisonnements dans lesquels des concepts et des méthodes géométriques sont appliqués à des questions de théorie des nombres. Les débuts de telles considérations remontent à Gauss. Lui, et après lui, G. Dirichlet, F. Klein , H. Minkowski et d'autres ont résolu avec succès par des méthodes géométriques des questions dans lesquelles un système de nombres entiers devait satisfaire une ou un système d'inégalités, donc avant tout dans la théorie des formes quadratiques définies ou indéfinies. », KELLER 1954 p.2.

[18] LEKKERKERKER 1969 p.vii.

[19] MORDELL 1971c p.611.

11. « The basic idea in Minkowski's treatment of an algebraic number field $K|\mathbb{Q}$ of degree n is to interpret its numbers as points in n-dimensional space. This explains why his theory has been called "Geometry of Numbers[20]". »

12. « Il [Minkowski] s'illustra dans la suite, non seulement par d'autres travaux sur les formes quadratiques, mais aussi par la création de l'ensemble de méthodes appelé "géométrie des nombres[21]". »

13. « The term 'Geometry of Numbers' was first used by Minkowski to describe arguments based on considerations of packing and covering[22]. »

14. « The geometry of numbers deals with the use of geometric notions, especially convexity and lattices, to solve problems in number theory, usually via the solutions of inequalities in integers[23]. »

15. « The geometry of numbers is connected with the problem of determining whether inequalities of various kinds are solvable in integers[24]. »

16. « La *géométrie des nombres* est une méthode inventée par Hermann Minkowski : le but est d'étudier des objets arithmétiques, tels que des formes quadratiques ou des corps de nombres, par des méthodes géométriques[25]. »

Beaucoup des commentaires précédents caractérisent la géométrie des nombres par l'application d'un point de vue géométrique en théorie des nombres. Cette rencontre entre géométrie et théorie des nombres, qui est « typique » de ce sujet (voir la définition 9), est exprimée de façons diverses. D'abord en expliquant que la géométrie permet de représenter ou bien interpréter dans un cadre nouveau des problèmes arithmétiques : la recherche de solutions en nombres entiers à des inégalités est traduite en termes de recherche de points d'un réseau dans un domaine (voir par exemple la définition 5). La connexion entre géométrie et arithmétique peut aussi être mise en évidence par l'utilisation de la continuité dans l'étude de phénomènes discrets (définition 2) et dans ce contexte l'analyse vient parfois se substituer à la géométrie (définition 4).
Mais ces définitions donnent aussi les premières raisons de nuancer le statut de la géo-

[20] Neukirch 1999 p.28. Je remercie Norbert Schappacher de m'avoir indiqué cette citation.
[21] Serre 1993 p.4.
[22] Coates et van der Poorten 1994 p.273.
[23] Goldman 1998 p.440.
[24] Olds et al. 2000 p.65.
[25] Bayer-Fluckiger 2006a p.31.

métrie des nombres comme discipline clairement identifiée. D'abord, même si employer la géométrie en théorie des nombres est l'idée qui revient le plus souvent dans ces définitions, nous avons constaté que l'analyse peut se substituer à la géométrie et que certaines définitions ne font aucune référence explicite à la géométrie.
Ensuite ces citations n'insistent pas sur les mêmes points pour décrire ce qu'est la géométrie des nombres. Elle est parfois définie par un ou des objets considérés comme fondamentaux dans son étude (définitions 1, 9), parfois par le type de problèmes qu'elle doit résoudre (définitions 2, 3, 6, 7, 10, 15) ou encore elle est décrite comme un ensemble de méthodes (définitions 4, 5, 8, 12, 13, 14, 16). Certaines définitions combinent plusieurs des aspects précédents comme par exemple 6, 7 ou 9. De plus, les objets qui sont mis en avant ne sont pas toujours les mêmes. Nous trouvons par exemple les réseaux, les formes quadratiques, les corps (convexes, étoilés ou quelconques) ou alternativement les fonctions distances. Les problèmes dont s'occupe la géométrie des nombres sont eux aussi divers : estimation du minimum de fonctions pour des valeurs entières des variables, recherche de solutions entières pour des inégalités, recherche de points d'un réseau dans un domaine.
Enfin, même si nous observons une certaine stabilité dans le vocabulaire utilisé dans ces descriptions, en particulier avec les termes géométrie ou arithmétique qui reviennent fréquemment, ces notions ont-elles la même signification pour tous ces mathématiciens ? Leur sens ne change-t-il pas selon les époques ? Si un aspect crucial de la géométrie des nombres est l'emploi de méthodes géométriques en théorie des nombres, quelles sont exactement ces méthodes ? De quel type de géométrie est-il question et est-ce le même qui est visé dans toutes ces définitions ?
Ces questions sont d'autant plus pertinentes que plusieurs champs de recherche actuels se présentent comme prolongement naturel des travaux sur la géométrie des nombres, champs dont les objets et les techniques paraissent très variés. En plus de la théorie algébrique des nombres déjà évoquée, citons les recherches sur les réseaux[26], la cristallographie[27], les problèmes d'empilement et de recouvrement par des corps convexes[28], la cryptologie, la géométrie convexe et discrète[29], la géométrie d'Arakelov[30] ou la géométrie diophantienne[31]. Nous avons cette fois l'image d'un sujet éclaté, au carrefour entre différentes spécialités.
Cette observation est confirmée par les repères historiques fournis par les mathématiciens au cours de leurs travaux. D'une part, ils racontent une préhistoire de la géométrie des nombres qui est assez bien balisée. L'origine de la géométrie des nombres est tou-

[26] Martinet 1996.
[27] Senechal 1992; Engel 1993.
[28] Gruber 1993a p.741.
[29] Gruber 2007.
[30] Soulé 2005.
[31] Hindry et Silverman 2000.

jours située dans les recherches sur la théorie arithmétique des formes quadratiques. Les mathématiciens cités sont alors dans un premier temps Lagrange, Gauss et Dirichlet pour leurs contributions à l'étude des formes quadratiques binaires. Une étape importante est ensuite la démonstration par Hermite en 1847 que si f est une forme quadratique de n variables définie positive, alors il existe des entiers $x_1, \ldots, x_n$ non tous nuls et tels que

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} D^{1/n} ,$$

où D désigne la valeur absolue du déterminant de f. Ce résultat est jugé important car il est considéré comme « the first important result of a general nature[32] ». Après ce travail d'Hermite les recherches de Korkine, Zolotareff sont souvent mentionnées par exemple pour leur travail sur les formes quadratiques binaires indéfinies[33] ou encore pour la détermination de la meilleure estimation dans le théorème d'Hermite quand $n = 3$ et $n = 4$ [34].

Après ces grandes étapes de la préhistoire, Minkowski est unanimement considéré comme le créateur de la géométrie des nombres, c'est d'ailleurs lui qui baptise ainsi cette théorie. Le résultat emblématique de Minkowski est celui sur les domaines convexes qui peut être réinterprété pour obtenir un énoncé du même type que celui d'Hermite. Si $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ est maintenant une fonction qui vérifie

1. $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0$ si et seulement si $(x) = 0$,
2. $f(tx) = |t| f(x)$,
3. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,

alors il existe des entiers $(x_1, \ldots, x_n)$ non tous nuls tels que

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V}} ,$$

où V désigne le volume du domaine défini par l'inégalité $f(x) \leq 1$ [35].

Mais l'histoire des développements de la géométrie des nombres après Minkowski est beaucoup moins consensuelle. Selon les mathématiciens ou les spécialités de recherche, ce ne sont pas les mêmes protagonistes qui sont mis en avant et leurs contributions ne sont pas interprétées de la même manière. Mordell rend compte des développements de la géométrie des nombres en se focalisant sur le problème de la convexité[36]. Selon lui, avec Minkowski ou plus tard Blichfeldt, l'attention s'est d'abord portée sur l'étude des

[32] Blichfeldt 1919 p.449.
[33] Mordell 1946a p.266.
[34] Bergé et Martinet 1985-1986.
[35] Mordell 1946a p.268.
[36] Comme nous le verrons, c'est un moyen d'intégrer ses propres recherches ainsi que celles de ses collaborateurs dans l'histoire du sujet.

domaines convexes, puis la discipline a évolué ensuite vers une théorie devant permettre d'aborder aussi les domaines non convexes

> « All this served as a tremendous stimulus and marked the beginning of some of the great advances made soon after in the Geometry of Numbers by Mahler, Davenport, C. A. Rogers and many others. In the past, practically all the results dealt with convex regions, but now the new results for non-convex regions constitute an important body of knowledge[37]. »

Quant aux mathématiciens s'intéressant aux réseaux, leur présentation insiste davantage sur Hermite, Korkine, Zolotareff, en ce qui concerne la préhistoire du sujet, puis sur Voronoï dont les travaux sur les formes quadratiques sont beaucoup moins citées dans d'autres traditions de recherche[38]. Ce n'est plus ici l'évolution convexité/non convexité qui est vue comme pertinente pour décrire la dynamique du domaine ; c'est le passage d'une théorie ayant pour objet fondamental les formes à une théorie centrée sur la notion de réseaux qui est alors souligné.
Dans la préface de son livre sur la géométrie des nombres, Lekkerkerker sépare quant à lui les contributions à la géométrie des nombres après Minkowski selon leur nature arithmétique ou géométrique[39]. Du côté des travaux arithmétiques nous trouvons cités les mathématiciens Remak, Oppenheim, Davenport et Barnes ; du côté géométrique, Blichfeldt, Mordell, Mahler et Rogers.
En 1980, Edmund Hlawka[40] mentionne lui aussi le travail de mathématiciens comme Blichfeldt, Mordell, Siegel, Mahler, Cassels ou Rogers. Mais s'il signale une « école de Manchester » autour de Mordell, il identifie aussi une « école de Vienne » dont des représentants sont Furtwängler, Hofreiter, Hlawka et W. Schmidt, des « écoles russe et australienne », ainsi que de celle de Fejes-Toth spécialisée en géométrie discrète.

La variété des objets présentés comme fondamentaux, des résultats clés mis en valeur, des généalogies, remet en question le statut de la géométrie des nombres : est-ce un ensemble de méthodes pour traiter des problèmes posés dans d'autres domaines ou bien une théorie autonome avec ses propres sujets d'étude ? Si c'est le cas quelles en sont les limites ? Qu'est-ce qui la caractérise et lui donne son identité ? Peut-on réellement considérer la géométrie des nombres comme une discipline mathématique ? Cette question conduit à s'interroger sur les critères qui pourraient caractériser une discipline scientifique.

[37] Mordell 1959 p.9.
[38] Martinet 1996; Bergé et Martinet 1985-1986.
[39] Lekkerkerker 1969.
[40] Hlawka 1980.

0.2 La notion de discipline comme catégorie en histoire des sciences

La notion de discipline a été théorisée dans plusieurs sciences humaines. Elle est cruciale par exemple dans les travaux de Michel Foucault sur l'histoire de la folie et la naissance de la psychiatrie[41]. C'est une unité d'analyse qui a aussi été employée en histoire des sciences, surtout pour les sciences dites expérimentales, par exemple en histoire de la physique[42].

Les historiens des sciences ont insisté sur deux types de facteurs dans la constitution et la description d'une discipline scientifique[43] : des facteurs sociaux qui ont surtout été discutés dans le cas des sciences expérimentales et des facteurs intellectuels. L'importance qui leur est accordée varie selon les auteurs.
Dans son livre de 1982 sur la constitution de la biochimie comme discipline, Robert Kohler juge que l'histoire des disciplines scientifiques a négligé jusqu'alors les aspects sociaux car elle était jusqu'alors écrite principalement par des scientifiques. Il choisit alors de considérer les disciplines comme des institutions politiques qui organisent la vie académique. Bien qu'il admette l'influence de critères intellectuels au début de la constitution d'une nouvelle discipline, ce sont les facteurs économiques et politiques qu'il voit comme déterminants[44].
Dans le travail de Bruno Strasser[45] sur « l'émergence de la biologie moléculaire à Genève », le développement d'une nouvelle discipline est décrite en plusieurs étapes : d'abord, l'apparition au sein d'un petit groupe de collaborateurs de nouvelles pratiques de recherches, de nouveaux discours, de nouveaux facteurs explicatifs et de nouveaux instruments ; ensuite l'institutionnalisation de ces innovations à travers la création d'instituts de recherche ou de journaux. Ces développements sont dans un premier temps ancrés dans la culture locale avant que ces nouvelles idées et ces nouvelles pratiques ne circulent dans des réseaux de communications plus larges. Dans le cas étudié, Strasser met l'accent sur le rôle particulier joué par un instrument scientifique (ici le microscope électronique) dans la constitution de la discipline : le microscope, montre Strasser, participe à la construction de nouvelles sociabilités, en favorisant par exemple la collaboration entre disciplines déjà établies[46], mais il constitue aussi un facteur intellectuel de développement de la discipline : c'est « un objet » de recherche,

[41] Voir par exemple Foucault 2003.
[42] Pour des pistes bibliographiques à ce sujet voir Walter 1996 p.1-3.
[43] Woodward 1991 p.8.
[44] Voir l'introduction de Kohler 1982.
[45] Strasser 2002.
[46] Strasser 2002 p.26.

un « outil » appliqué à des problèmes très variés[47] », et des expériences sont pensées spécifiquement pour exploiter les nouvelles possibilités qu'il offre.

Regardons maintenant comment la question de discipline a été abordée dans le cas des mathématiques.

Roland Wagner-Döbler et Jan Berg ont essayé de mesurer le dynamisme de différents domaines des mathématiques au XIX^e siècle en utilisant des méthodes quantitatives. Dans un article publié en 1996, ils calculent pour chaque année le pourcentage des articles publiés dans les journaux mathématiques dans un domaine par rapport à l'ensemble des articles[48]. Les publications sont repérées dans l'index mathématique du *Catalogue of Scientific Papers of the Royal Society of London* qui fournit aussi une classification. Ce sont les entrées de cette classification qui sont reprises pour délimiter les domaines, sans que soient analysés ce que ces domaines recouvrent ou les procédés qui affectent tel ou tel travail à une entrée de la classification. Cette situation est la plus fréquente : le point de vue des acteurs est sollicité pour repérer les disciplines mathématiques – l'utilisation des classifications des journaux, qui sont élaborées en général par des scientifiques eux-mêmes, entre dans ce cadre[49]. Les caractérisations que nous avons données de la géométrie des nombres montrent les limites de ce type d'approches, les mathématiciens n'ayant pas tous la même conception de leur spécialité.
Charles Fisher a précisément opposé ce qu'est une discipline pour les mathématiciens et la nécessité de prendre en compte des facteurs sociaux pour en comprendre la constitution et le développement. Fisher considère que si pour les mathématiciens une théorie est un ensemble d'idées liées à des objets mathématiques, pour lui c'est une catégorie sociale qui change avec le point de vue des mathématiciens. Pour le montrer, il regarde comment différents groupes de mathématiciens caractérisent une même théorie, à partir de l'exemple particulier de la théorie des invariants[50]. Remarquons toutefois que peu de facteurs sociaux sont réellement pris en compte. Des commentaires différents sur la théorie des invariants sont relevés dans des contextes variés, mais il s'agit essentiellement de changements de contextes mathématiques. Des indicateurs comme les postes universitaires ou les comptes rendus dans des journaux spécialisés sont mentionnés mais ils ne servent qu'à décrire des évolutions quantitatives de la théorie des invariants : l'impact de ces facteurs sociaux sur la théorie même n'est pas discuté.
Une approche très différente a été proposé par Ralf Haubrich : suivant Guntau et Laitko, il propose une liste de critères purement internalistes pour caractériser une discipline

[47] Strasser 2002 p.19.
[48] Wagner-Döbler et Berg 1996.
[49] Voir aussi Fisher 1966-1967; Cohn 1986; Crane 1972 p.14.
[50] Fisher 1966-1967.

mathématique[51]. Ces critères sont par exemple l'identification d'un objet d'étude, d'un noyau de concepts et de résultats clés, la systématisation de la discipline (reflétée par son apparition dans les tables des matières des livres, les classifications de journaux), son système de preuves (c'est-à-dire les moyens selon lesquels sont validées les solutions des problèmes posés), les valeurs mises en avant par les mathématiciens pour évaluer les questions et les résultats obtenus.
Ce que nous avons vu au paragraphe précédent témoigne de la difficulté à mettre en oeuvre ces critères dans le cas de la géométrie des nombres : en particulier, différents objets d'étude ont pu être mis en avant et les résultats ne sont pas toujours interprétés de la même manière.
Mais le principal problème semble être de réussir à articuler des caractéristiques internes du type précédent et des facteurs sociaux qui participent aussi à l'établissement d'une discipline. Comme le suggère l'exemple du microscope, ces deux types de facteurs ne sont pas nécessairement distincts mais peuvent être au contraire fortement imbriqués l'un dans l'autre. Par exemple, les échanges entre scientifiques au cours desquels circulent idées, méthodes, pratiques de recherche ou encore les rapports de forces dans la vie académique (reflétés en particulier dans les recrutements) modèlent la représentation de la discipline, et ils peuvent aussi favoriser certains points de vue, définir les problèmes jugés les plus importants etc. Réciproquement, des proximités intellectuelles entre des scientifiques peuvent contribuer à la formation de nouveaux réseaux de communication ou à la création de nouvelles communautés. Mais cet exemple met aussi en évidence les difficultés propres au cas des mathématiques : les facteurs proprement intellectuels sont plus délicats à articuler à des facteurs sociaux, en particulier parce que des énoncés apparemment identiques peuvent renvoyer à des réalités différentes selon les époques. Foucault insiste déjà sur la nécessité de ne pas prendre de tels énoncés comme des évidences mais comme des unités à problématiser[52]. Est-ce qu'"utiliser la géométrie en arithmétique" recouvre la même chose dans la géométrie des nombres de Minkowski et de Mordell ? Nous devons trouver le moyen d'analyser de tels termes (et leur concaténation) dans la pratique de chacun, afin de comprendre comment ils sont utilisés pour définir la discipline qu'ils cherchent à instituer.

Une autre dimension a été souvent attachée à la notion de discipline : c'est celle de l'enseignement et de la pédagogie. En particulier, certains travaux sur des disciplines théoriques ont intégré le social en étudiant comment la transmission du savoir influence le développement d'un domaine. L'importance de plus en plus grande accordée à l'enseignement dans la définition d'une discipline est soulignée dans les commentaires de

[51]Exposé à Oberwolfach en 2001 cité dans Goldstein et Schappacher 2007a p.54 et 57.
[52]Foucault 1969 par exemple p.37-38.

Steve Fuller sur cette notion[53]. Pour lui l'ancien sens de discipline, « a set of practices that are cultivated and transmitted by a group of specially trained people », désigne maintenant davantage la notion d'« école » des historiens alors que « discipline » se rattacherait davantage à l'ensemble des moyens de transmission du savoir.
Le rôle de l'enseignement dans la formation du « contour intellectuel » de la physique théorique en Allemagne a été étudié par Kathryn Olesko à travers l'exemple du séminaire de physique organisé à Königsberg par Franz Ernst Neumann[54]. Dans son livre, le sens donné à « discipline » est proche de celui proposé par Foucault[55]. Chez Foucault l'idée de « discipline » est associée à la notion de pouvoir et désigne un ensemble de procédés agissant sur le corps afin de le rendre docile, exercé et d'accroître son efficacité[56]. Dans le cadre de son séminaire, Neumann entraine les étudiants à suivre des règles, des protocoles et des techniques de recherche[57] et cet apprentissage contribue à « l'émergence de la physique théorique en Allemagne[58]. »
Andrew Warwick note lui aussi que les phénomènes sociaux ont surtout été pris en compte par les historiens pour étudier les sciences expérimentales alors qu'ils ont été négligés pour les disciplines plus théoriques. Il avance deux raisons pour expliquer ce déséquilibre de traitement : la première raison est que la circulation des concepts des sciences théoriques n'est pas vue comme problématique et donc que les facteurs locaux sont abandonnés. La seconde raison vient de l'opposition entre théorie et pratique et de leurs images respectives, la théorie étant considérée comme une activité contemplative et individuelle[59]. Pour Warwick, les arguments en faveur d'une différence de traitement méthodologique entre disciplines théoriques et disciplines expérimentales ne tiennent pas. Par exemple, il n'y a pas de raison pour que les concepts circulent mieux que les pratiques, leur réception peut être influencée par des particularismes locaux. Pour étudier le développement de la physique mathématique à Cambridge, Warwick insiste sur ces aspects locaux en s'intéressant aux caractéristiques de l'enseignement à Cambridge et à son évolution. Il examine ensuite comment les compétences spécifiques issues de cet enseignement ont un impact sur la manière dont une théorie est reçue[60].

Avant de conclure ce bref tour d'horizon, il faut souligner que la question des disciplines scientifiques a pu être abordée à travers des catégories alternatives d'analyse. Thomas Kuhn, par exemple, a préféré s'intéresser aux communautés scientifiques plus

[53] Fuller 2000.
[54] Olesko 1991.
[55] Olesko reprend le commentaire de Jan Goldstein sur Foucault et la notion de discipline, voir Goldstein 1984.
[56] Foucault 1975 p.161.
[57] Olesko 1991 p.15.
[58] Olesko 1991 p.6.
[59] Warwick 2003 p.11.
[60] C'est l'exemple de la théorie de la relativité restreinte qui est développé dans son livre.

qu'aux disciplines[61]. Pour Kuhn, « une communauté scientifique se compose de ceux qui pratiquent une certaine spécialité scientifique[62] ». Si les facteurs sociaux semblent alors privilégiés, il faut se souvenir que certains éléments internes – la notion de paradigme par exemple – interviennent de manière importante pour délimiter et caractériser ces communautés.

En sociologie, la notion de « champ » se substitue parfois à « discipline » dans les analyses. Les disciplines sont alors vues comme des champs locaux appartenant au champ scientifique. Le développement de ces disciplines (ou sous-champs) est en partie la conséquence de la position (hiérarchisée) qu'elles occupent dans le champ scientifique[63]. Cette tradition considère que la prise en compte de l'histoire intellectuelle et de l'histoire sociale d'une discipline est fondamentale pour en comprendre les développements[64]. La présence dans les travaux des scientifiques de cette histoire est d'ailleurs un témoignage important de l'existence même du champ

> « un autre indice du fonctionnement en tant que champ est la trace de l'histoire du champ dans l'oeuvre[65] ».

Les éléments historiques que les mathématiciens incorporent à leur travail sur la géométrie des nombres peuvent être interprétés dans ce cadre.

Ces approches ont en commun d'identifier différents niveaux d'organisation des disciplines que nous retrouvons dans le vocabulaire utilisé pour les nommer (discipline, spécialité, théorie...). Les niveaux les plus grossiers peuvent peut-être être identifiés en étudiant les départements universitaires, les laboratoires, les sociétés de spécialistes, les revues spécialisées[66]... Il est plus difficile de repérer les niveaux d'organisation inférieurs[67]. Kuhn a proposé quelques critères propres pour repérer et délimiter ces plus petites communautés : la participation aux mêmes conférences spécialisées, la circulation de manuscrits ou d'articles non publiés et l'existence de réseaux de communication officiels et officieux spécifiques (par exemple les correspondances[68]).

[61] Kuhn 1983 p.242.
[62] Kuhn 1983 p.241.
[63] Pour un exemple de l'utilisation de la notion de champ dans l'étude de la formation d'une discipline voir Cambrosio et Keating 1983 qui s'intéressent à l'émergence de la chronobiologie.
[64] Bourdieu 2001 p.136.
[65] Bourdieu 1976 p.117.
[66] Bourdieu 2001 p.128, Kuhn 1983 p.242.
[67] Nous rencontrons ce type de problème méthodologique avec la géométrie des nombres, spécialité de la théorie des nombres qui est elle-même une discipline des mathématiques.
[68] Kuhn 1983 p.242.

0.3 La variation d'échelles comme principe d'analyse

Le niveau auquel se passent les phénomènes étudiés conduit ainsi à privilégier des outils et des critères d'analyse spécifiques. La prise en compte de ces échelles est un principe méthodologique plus large. En particulier, dans le cas de la géométrie des nombres, il doit permettre de montrer que s'il s'agit d'une discipline, son image et son contenu évolue entre le travail de Minkowski et celui de Mordell.

La variation d'échelles a déjà été théorisée en histoire. Il s'agit de faire varier l'échelle d'observation des phénomènes au cours de l'analyse. Cette approche devait au départ permettre de redonner de l'importance à l'expérience des individus et rendre compte de la singularité de ces expériences par rapport aux processus sociaux « massifs[69] ».
Le changement d'échelles n'a pas pour objectif d'observer les mêmes choses à des niveaux différents mais de faire apparaître des phénomènes nouveaux. Cette démarche « pose en principe que le choix d'une échelle particulière d'observation produit des effets de connaissance[70] ». Une échelle plus petite permet de découvrir des phénomènes que le choix de catégories d'analyse trop vastes rend invisibles[71].
Deux courants principaux se distinguent parmi les historiens intéressés par cette approche méthodologique[72]. Certains accordent un privilège aux échelles microscopiques par rapport aux macroscopiques. Pour eux les causes efficientes de ce qui est constaté à tous les niveaux sont à l'oeuvre aux plus petites échelles. L'autre position principale soutient au contraire que toutes les échelles sont équivalentes et que ce qui est fructueux d'un point de vue heuristique, c'est la confrontation de tous les niveaux d'analyse[73]. C'est ce second point de vue qui a été adopté ici pour aborder l'étude de la géométrie des nombres.

Nous avons noté dans les commentaires sur la géométrie des nombres l'utilisation d'un vocabulaire presque constant. Le principe de variation d'échelles paraît une approche possible pour rendre compte des réalités différentes qui se cachent derrière ce vocabulaire employé par les mathématiciens

> « il ne suffit pas que l'historien reprenne à son compte le langage des acteurs qu'il étudie, mais qu'il en fasse l'indice d'un travail à la fois plus ample et plus profond : celui de la construction d'identités sociales plurielles et plastiques qui s'opère à travers un réseau serré de relations (de concurrence,

[69] Présentation de Revel 1996a p.12.
[70] Revel 1996b p.19.
[71] Lepetit 1996, p.92 ; Revel 1996b p.20.
[72] Présentation de Revel 1996a p.13 ; Lepetit 1996 p.92.
[73] Notons quand même que la micro-histoire est à l'origine une réaction à l'approche macro-sociale, Revel 1996a p.10.

> de solidarité, d'alliance, etc.)[74]. »

Jacques Revel commente en guise d'exemple le travail de Simona Cerutti sur « les métiers et les corporations turinois aux XVII^e et XVIII^e siècles » :

> « Aucune historiographique n'est sans doute plus spontanément organiciste que celle des métiers et des associations de métiers : il s'agirait là de communautés évidentes, fonctionnelles, et qui sont supposées si puissamment intégratrices qu'elles en deviendraient quasi naturelles dans la société d'Ancien Régime. Le pari méthodologique de S. Cerutti consiste à révoquer ces certitudes et à montrer, à partir du jeu des stratégies individuelles et familiales et de leurs interactions, que les identités professionnelles et leurs traductions institutionnelles, loin d'être acquises, font l'objet d'un constant travail d'élaboration et de redéfinition[75]. »

Cette situation semble transposable à l'histoire des mathématiques : comme la terminologie banale des métiers est utilisée dans la société d'Ancien régime pour élaborer, plus que simplement décrire, des identités professionnelles d'ailleurs mouvantes, nous pouvons penser que les catégories spontanément données par les mathématiciens comme « analyse », « arithmétique » ou « géométrie » sont elles aussi redéfinies par leurs usages variés. Devant la stabilité des commentaires sur l'intervention de la géométrie en arithmétique dans le cadre de la géométrie des nombres, le passage à une échelle plus petite offre l'espoir de saisir et de comprendre des différences. Examiner comment ces domaines sont mobilisés dans le travail des mathématiciens (dans leurs cours, les séminaires, les articles publiés, les notes non publiées...) apporte un autre éclairage sur les commentaires. Cela montre des redéfinitions et des reconfigurations de ces disciplines au sein de la géométrie des nombres.

Qu'est-ce que ce principe méthodologique de variation d'échelles peut apporter dans l'analyse de l'histoire de la géométrie des nombres telle qu'elle est racontée par les acteurs ? Cette histoire produit une certaine image de la géométrie des nombres. Elle décrit une discontinuité dans l'intérêt qui est porté au sujet et fait ressortir des moments importants pour le développement du domaine : les travaux de Minkowski, de Blichfeldt et de Mordell. Parallèlement, elle témoigne aussi d'une certaine constance dans les méthodes employées (la géométrie en arithmétique, le théorème de Minkowski), une constance dans le vocabulaire (géométrie, arithmétique, analyse, volume, convexe, formes, réseaux, continuité, discret...), une constance des objets étudiés (réseaux, formes, fonctions distances). En effet, même si nous avons noté des différences selon les commentaires, elles ne s'expliquent pas par une évolution dans le temps qui irait

[74] Revel 1996b p.23-24.
[75] Revel 1996b p.24.

vers la disparition d'un objet ou d'un point de vue : nous retrouvons par exemple des formes et des réseaux chez Minkowski et chez Mordell.
Or, comme nous le verrons plus en détail dans les chapitres suivants, se placer à différentes échelles d'observation permet de rendre compte des continuités et discontinuités suggérées par les remarques précédentes, et d'en comprendre la formation.
Un relevé quantitatif dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* des travaux publiés sur la géométrie des nombres témoigne d'une activité ininterrompue dans le domaine ainsi qu'une présence quasi-permanente dans les classifications à partir de 1916. Ceci remet donc en cause les discontinuités des récits usuels. Par contre, en croisant ce relevé avec d'autres sources (les livres sur la géométrie des nombres, l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*), nous retrouvons les grandes étapes mentionnées précédemment. La différence s'explique par la nature des sources. Une étude quantitative dans le *Jahrbuch* prend en compte le point de vue des acteurs et la dimension intellectuelle du domaine d'une manière globale, avec des effets de moyenne, contrairement à des indicateurs comme les livres spécialisés dans lesquels l'auteur accorde une importance plus ou moins grande à certains résultats ou certaines méthodes.
De même, pour mieux percevoir la signification opératoire des concepts, derrière le vocabulaire commun utilisé, nous pouvons nous placer à l'échelle des mathématiques qui sont produites : quelles sont les méthodes employées ? Quels résultats sont démontrés et comment sont-ils énoncés ? Par exemple, si la géométrie des nombres se caractérise par l'application de la géométrie dans un contexte arithmétique, de quelle géométrie est-il question ? Comment intervient-elle ? Qu'est-ce qu'elle apporte ? Quelles sont les motivations à faire appel à la géométrie ? Dans quel contexte est-elle mobilisée et pourquoi ?
Cette échelle d'observation, celle de la pratique individuelle de l'activité mathématique, est différente de celle des commentaires, des discours des mathématiciens ; elle est aussi différente de celles des pratiques collectives. Même si des changements apparaissent à toutes ces échelles, ils ne s'ajustent pas nécessairement. Prendre en compte tous ces niveaux de pratiques peut permettre de révéler différents sens pour un même énoncé.

> « Les énoncés, d'une manière générale, ne peuvent être enfermés dans les seules positions ou trajectoires des locuteurs. Il est patent qu'ils ouvrent aussi, en entrant en communication les uns avec les autres, des espaces sémantiques et donc sociaux dont la structure et la tonalité ne constituent pas une copie conforme de ceux qui les ont précédés. Certes, la continuité de la réalité sociale est assurée par des actes de langage, mais c'est en ce que ceux-ci ne sont jamais certains, en ce qu'ils recèlent la capacité de s'auto-agencer de plusieurs façons différentes et d'interpeller de manière partiellement imprévisible leurs semblables qu'ils détiennent des possibilités

de développement et de transformation[76]. »

Les énoncés ne prennent leur signification que lorsqu'ils sont replacés dans leurs « espaces sémantiques et sociaux » qui sont toujours singuliers. La continuité du langage cache des relations différentes entre les énoncés qui en modifient le sens. Un des objectifs de l'utilisation des échelles microscopiques est précisément de « reconstruire, autour de quelques personnages précis, ce que fut leur espace social[77] ».

Les approches que nous avons employées dans ce qui suit pour observer la géométrie des nombres se mettent en oeuvre à des niveaux d'analyse variés : relevé des publications recensées par le *Jahrbuch*, relevé des citations dans les articles de mathématiciens, relevé des définitions données par des mathématiciens, étude précise du travail de certains mathématiciens engagés dans la recherche sur le sujet. Ces démarches se complètent en fournissant chacune des informations diverses. Par exemple, le repérage par le *Jahrbuch* donne une idée de qui sont les scientifiques s'intéressant au domaine, de la quantité de publications produites sur le sujet ainsi que de l'évolution dans le temps du nombre de ces publications. Les réseaux de citations permettent de mettre en évidence des interactions entre scientifiques (relations effectives ou à travers la lecture d'articles), de repérer des textes considérés comme plus importants que les autres, de faire ressortir plusieurs traditions de recherche pour un même thème. L'étude des mathématiques permet de préciser les définitions ou les commentaires des mathématiciens – par exemple d'autres types de géométrisation que celle proposée dans le cadre de la géométrie des nombres sont utilisés en théorie des nombres, comme l'interprétation des équations diophantiennes en termes de points rationnels sur des courbes ; les rapports établis entre géométrie et arithmétique dans ces autres traditions peuvent apparaître très différents, malgré l'utilisation d'un descriptif superficiel commun[78].

Un dernier intérêt pour nous du principe de variation d'échelles est lié aux sources à notre disposition pour la géométrie des nombres. Les mathématiciens dont nous allons parler dans la suite ont produit énormément de textes mathématiques et peu de métacommentaires. Nous sommes donc dans certains cas devant un unique type de sources : des mathématiques très techniques. Changer l'échelle d'analyse permet de faire parler un seul document à différents niveaux. Dans un article de mathématiques, la considération des résultats, des démonstrations, des méthodes utilisées donne des

[76] Bensa 1996 p.47.

[77] Bensa 1996 p.49.

[78] Ces autres traditions modifient parfois l'interprétation des travaux de Minkowski. Juste après son commentaire sur la géométrie des nombres (voir page 15) Neukirch ajoute : « It seems appropriate, however, to follow the current trend and call it [the Geometry of Numbers] "Minkowski Theory" instead, because in the meantime a geometric approach to number theory has been developed which is quite different in nature and much more comprehensive. » Neukirch 1999 p.28.

informations de nature différente que le repérage des mathématiciens, les livres ou les autres travaux qui y sont cités.

0.4 Le plan de la thèse

La présence d'une histoire du domaine dans le travail des scientifiques est un indice de l'existence de la discipline. Or dans cette histoire Minkowski est toujours vu comme à l'origine de la géométrie des nombres : la première partie de la thèse lui est donc consacrée. Les contributions de Minkowski à la géométrie des nombres y sont étudiées avec l'objectif de comprendre ainsi ce qui est considéré comme l'acte fondateur de la géométrie des nombres : l'introduction d'un point de vue géométrique en théorie des nombres. Nous verrons quelle géométrie il utilise et dans quels contextes. Comment la géométrie des nombres s'organise autour d'un résultat et d'une méthode fondamentale appliquée à des situations variées. Minkowski ayant écrit assez peu de textes méthodologiques et de commentaires directs sur ces questions, c'est le passage à une échelle d'observation plus fine de son travail mathématique lui-même qui nous permettra d'obtenir des indications sur sa conception de la géométrie des nombres. Nous reviendrons d'abord sur les travaux antérieurs à Minkowski considérés comme ses précurseurs. Beaucoup de ces travaux ont effectivement été lus par Minkowski et ce sera pour nous l'occasion de voir que la géométrie avait déjà été introduite dans la théorie des formes quadratiques par d'autres mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss. L'originalité de Minkowski est donc davantage de systématiser certaines idées, de leur donner une place et une signification différentes dans la théorie. Le travail de Minkowski sur la géométrie des nombres est ensuite décrit en trois étapes. D'abord, avant 1896, Minkowski élabore petit à petit ses idées sur la géométrie des nombres, en particulier son théorème sur les points d'un réseau dans des parties convexes symétriques par rapport à un point. Ces premières recherches se concrétisent en 1896 par la publication de son livre *Geometrie der Zahlen* dans lequel certains résultats qui avaient été énoncés auparavant sont démontrés pour la première fois. Dans les travaux qui suivent Minkowski systématise le recours à la géométrie, il la fait intervenir dans divers contextes comme par exemple la théorie de la réduction des formes quadratiques. Ces dernières recherches permettent de préciser la conception de la géométrie de Minkowski. Finalement dans la dernière partie consacrée à Minkowski, nous nous demanderons si avec la géométrie des nombres Minkowski crée une nouvelle discipline des mathématiques (et quelle sorte de discipline). Pour répondre à cette question nous revenons sur la nature de la géométrie à laquelle Minkowski fait appel dans son travail qui apparaît comme caractéristique de son travail sur la géométrie des nombres.

Nous avons dit que la façon dont la géométrie des nombres se développe après Minkowski est interprétée de manière variée par les mathématiciens. Un problème est alors de repérer les travaux effectués sur ce sujet. Le chapitre suivant consiste à déterminer qui s'intéresse à la géométrie des nombres après Minkowski. Nous utilisons pour cela plusieurs sources : le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, les livres consacrés à la géométrie des nombres et l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. Ces trois sources sont exploitées en employant des méthodes quantitatives. Le croisement des résultats obtenus met en évidence les contributions de Hans Frederik Blichfeldt et Louis Mordell auxquelles nous nous intéressons particulièrement par la suite.

Blichfeldt est donc le sujet du chapitre suivant. Peu de documents sont disponibles à propos de lui et, afin d'avoir quand même une idée de ses sources, nous commençons par un relevé des citations dans ses articles sur la géométrie des nombres. Nous étudions ensuite de manière détaillée certains de ces articles. Nous constaterons que Blichfeldt a une vision différente de la géométrie des nombres par rapport à Minkowski, et qu'il semble par exemple accorder une place moins importante à la géométrie.

Le travail de Mordell sur la géométrie des nombres a été abordé en deux temps. Un premier chapitre est consacré à un examen détaillé de ses publications. Cette première approche a montré que sa collaboration avec Harold Davenport a joué un rôle très important dans l'élaboration de résultats qu'il juge fondamentaux pour la géométrie des nombres. Nous avons donc été amené à considérer aussi le travail de Davenport. Mordell est le premier de ces deux mathématiciens à s'intéresser à la géométrie des nombres, nous regardons donc d'abord ces premiers travaux sur le sujet au cours desquels il alterne l'utilisation de méthodes analytiques et arithmétiques. À la fin des années 1930, Davenport commence son travail sur la géométrie des nombres ; il collabore alors avec Mordell, d'abord à propos du minimum de la valeur absolue du produit de trois formes linéaires ternaires, puis du minimum des formes cubiques binaires. La géométrie semble alors occuper une place plus importante dans le travail de Mordell. De son côté Davenport alterne présentation arithmétique et présentation géométrique dans ses publications, mais nous verrons que dans des sources non publiées, comme des notes de cours, c'est l'approche géométrique qui est privilégiée.

Le second chapitre consacré à Mordell et Davenport se focalise cette fois sur le fonctionnement du groupe de chercheurs spécialisés en théorie des nombres qui semble s'être constitué autour de Mordell. Nous avons trouvé à plusieurs reprises des allusions à une école de Manchester ou une école de Cambridge pour lesquelles Mordell serait une figure emblématique. Ce groupe est étudié à travers les échanges qui se passent au

sein de cette communauté, par exemple lors des cours ou des séminaires, mais aussi à travers les échanges internationaux (voyages de Mordell à l'étranger, accueil de chercheurs, correspondance de Mordell). Nous terminons cette partie par quelques aspects du recrutement effectué par Mordell à Manchester puis Cambridge. Nous verrons à ce sujet le rôle actif joué par Mordell dans l'accueil de mathématiciens réfugiés à partir de 1933.
Cette partie permet de mettre en lumière comment se créée dans les années 30 et 40 la discipline de la géométrie des nombres - mais, et c'est un des résultats principaux de cette étude, les critères et la conception même d'une discipline sont alors très différents de ce qu'ils pouvaient être pour Minkowski.

Dans une dernière partie, nous revenons à travers une étude de quelques manuels sur les dimensions pédagogiques de la notion de discipline. Nous verrons comment, à cette échelle, se trouvent confirmés certains des résultats obtenus précédemment, avec des nuances importantes.

Chapitre 1

Minkowski comme point origine de la géométrie des nombres : discipline et intuition

Sommaire

Les commentaires sur la géométrie des nombres que nous avons rencontrés s'accordent tous pour fixer l'origine de cette théorie dans le travail de Hermann Minkowski

> « The theme of this book is the geometry of numbers, a branch of the theory of numbers that was discovered by Hermann Minkowski[1] ».

Les travaux mathématiques de Minkowski paraissent donc être une entrée légitime dans l'étude de la géométrie des nombres.
Nous commencerons par donner quelques éléments biographiques sur Minkowski ainsi qu'un aperçu général de sa carrière scientifique. Dans un deuxième temps, nous présenterons avec plus de détails la partie de ses travaux qui concerne la géométrie des nombres. Enfin, nous reviendrons sur cette idée, présente dans la citation précédente, de la création par Minkowski d'une « nouvelle branche » de la théorie des nombres : qu'est-ce qui fait la nouveauté de cette discipline ? Qu'est-ce qui pour Minkowski lui donne une identité disciplinaire ?

[1] Olds et al. 2000 p.3.

1.1 Quelques éléments biographiques sur Minkowski

Les sources utilisées pour la rédaction de ce court paragraphe biographique sur Minkowski ont des statuts assez différents : témoignages d'amis ou de membres de la famille, reproduction de notices biographiques rédigées par Minkowski lui-même, correspondance ou travaux d'historiens sur Minkowski.

En 1973, une des filles de Minkowski, Lily Rüdenberg et Hans Zassenhaus éditent sa correspondance avec son ami David Hilbert[2]. Trois courts articles introduisent cette correspondance, en particulier un de Zassenhaus qui donne des informations sur l'épisode de la rédaction du *Zahlbericht* (nous y reviendrons) et un de Rüdenberg. Dans cette préface, elle relate des souvenirs familiaux comme ceux de la soeur de Minkowski, Fanny. Elle reproduit aussi deux *curriculum vitae* écrit par son père. Le premier fut rédigé pour son recrutement à l'université de Königsberg et le second à son arrivée comme professeur à Göttingen[3].

Dans un discours prononcé après la mort de Minkowski en 1909, Hilbert[4] livre aussi des souvenirs sur son ami et il fait une description de ses travaux. Certaines des informations biographiques données par Hilbert à cette occasion sont reprises dans le livre de Hans Opolka et Winfried Scharlau[5], livre dans lequel sont présentés certains résultats mathématiques de Minkowski.

Du fait de la grande amitié qui liait Minkowski et Hilbert, nous trouvons beaucoup d'informations sur la vie de Minkowski dans la biographie de Hilbert écrite par Constance Reid[6]. Comme cela est expliqué dans la préface, cette biographie a été rédigée pour sa plus grande part à partir d'entretiens avec des personnes ayant été en contact avec Hilbert (et donc parfois Minkowski) comme par exemple des anciens élèves, des collègues, des membres de sa famille... En ce qui concerne Minkowski, Reid était aussi en relation avec ses filles et a eu ainsi accès à sa correspondance avec Hilbert avant qu'elle ne soit publiée.

Un article est consacré à Minkowski dans le *Dictionary of Scientific Biography*[7]. Ecrit par Jean Dieudonné, nous y trouvons quelques éléments sur ses travaux mais assez peu d'informations biographiques.

Enfin, des articles de recherche en histoire des sciences ont été consacrés à Minkowski. La majorité d'entre eux traitent des travaux de Minkowski en physique et plus particulièrement de sa contribution à la théorie de la relativité. Nous avons consultés à ce sujet des articles de Leo Corry, Peter Galison, Lewis Pyenson et Scott Walter. Dans sa

[2] Rüdenberg et Zassenhaus 1973. Nous avons les lettres de Minkowski adressées à Hilbert entre 1885 et 1908.

[3] Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.9-10.

[4] Hilbert 1911 p.V-XXXI.

[5] Opolka et Scharlau 1985.

[6] Reid 1970.

[7] Dieudonné 1974.

thèse, ce dernier fait un bilan historiographique de ce sujet et indique des références supplémentaires[8].
Les études sur le travail de Minkowski en mathématiques sont beaucoup moins nombreuses. L'article de Walter Strobl publié en 1985 décrit surtout les années de formation de Minkowski[9]. Ses années au lycée puis à l'université de Königsberg, les mathématiques qu'il a étudiées pendant cette période et le Grand Prix de l'Académie des sciences sont les principaux thèmes abordés. Une lettre de Heinrich Weber à Richard Dedekind dans laquelle Weber livre ses impressions sur le jeune Minkowski est aussi reproduite. Les principaux travaux concernant les contributions de Minkowski à l'arithmétique sont ceux de Joachim Schwermer publiés en 1991 et 2007. Schwermer revient en particulier sur l'habilitation de Minkowski à Bonn[10] et sur son travail concernant les formes quadratiques et leur réduction[11]. Il soulève déjà le problème posé par l'intuition géométrique dans ces recherches.

1.1.1 Les années de formation 1864-1885

Dans ses *curriculum vitae*, Hermann Minkowski indique qu'il est né le 22 juin 1864 à Alexotas[12] en Russie et que ses parents s'appellent Lewin Minkowski et Rahel Taubmann[13], ils étaient allemands[14]. D'après sa soeur, il est le quatrième d'une famille de cinq enfants. Il avait trois frères Maxim l'ainé de la famille, Oscar (né en 1858), Toby plus jeune que lui et une soeur Fanny née en 1863 [15].
En 1872, alors que Hermann Minkowski à 8 ans, la famille Minkowski, fuyant les persécutions contre les juifs, émigre en Prusse et s'installe à Königsberg[16]. Il fréquente à partir d'octobre 1872 le Altstädtische Gymnasium de Königsberg. Elève très doué, il termine très vite ses études secondaires et obtient son Abitur en mars 1880 alors qu'il n'a pas encore 16 ans. Pendant cette période, il suit le conseil d'un de ses professeurs du Gymnasium Louis Hübner et contacte Heinrich Weber alors professeur de mathématiques à l'université de Königsberg[17]. Weber livre ses impressions sur le jeune Minkowski dans une lettre à Richard Dedekind :

---

[8] Walter 1996.
[9] Strobl 1985.
[10] Schwermer 1991.
[11] Schwermer 2007.
[12] Il s'agit maintenant d'un quartier de la ville de Kaunas en Lituanie qui se situe à environ 100 kilomètres à l'ouest de Vilnius.
[13] Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.9-10.
[14] Dieudonné 1974.
[15] Oscar, qui était médecin, est connu pour la découverte de la relation entre le pancréas et le diabète, voir Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.11-12.
[16] Aujourd'hui Kaliningrad en Russie. Voir Reid 1970 p.4.
[17] Schwermer 2007 p.485.

FIG. 1.1 – Hermann Minkowski (1864-1909)

> « Ich will Dir bei dieser Gelegenheit von einem hier aufgetauchten mathematischen u. speciell zahlentheoretischen Genie schreiben, welches viel verspricht. Es ist ein Primaner[18] eines hiesigen Gymnasiums, der erst in einem Jahr zur Universität abgeht und sich ganz aus eigenem Antrieb in die höhere Analysis und die Zahlentheorie eingearbeitet hat, die er nach der ersten Auflage Deiner Dirichlet-Vorlesungen studiert hat. Jetzt hat er die Disquisitiones vor[19]. »

Effectivement, c'est pendant ces années au Gymnasium que Minkowski découvre la théorie des formes quadratiques qui sera le thème central de ses recherches en mathématiques. Comme l'indique Weber, il étudie pour cela les *Vorlesungen der Zahlentheorie* de Peter Gustav Lejeune-Dirichlet et les *Disquisitiones Arithmeticae* de Carl Friedrich Gauss[20].

Minkowski entre à l'université de Königsberg en avril 1880 ; il y passe cinq semestres pendant lesquels il suit les cours de Weber, Woldemar Voigt, Johann Georg Rosenhain et Louis Saalschütz. Ces cours concernent par exemple la théorie des déterminants, le calcul différentiel et intégral, la géométrie analytique et synthétique, les équations différentielles, les courbes algébriques, le calcul des variations, la théorie des équations algébriques, la statique et la mécanique[21]...
À partir de l'hiver 1882-1883, Minkowski passe trois semestres à l'université de Berlin[22] où il suit des cours de Ernst Eduard Kummer, Leopold Kronecker, Karl Weierstrass, Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz et de Gustav Robert Kirchhoff[23]. Il revient ensuite à Königsberg où il obtient son doctorat le 30 juillet 1885 pour une thèse intitulée[24] *Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält*[25].
C'est aussi pendant ses années d'études à Königsberg que Minkowski rencontre Adolf Hurwitz et surtout David Hilbert avec lesquels il restera ami jusqu'à sa mort. Hilbert

[18]Un *Primaner* est à cette époque en Allemagne un élève de la classe la plus avancée du lycée.

[19]« Je veux t'écrire à cette occasion à propos d'un génie mathématique, et particulièrement arithmétique, qui a fait son apparition ici et qui promet beaucoup. C'est un élève de Terminale du lycée local qui n'ira à l'université que dans un an et s'est plongé complètement de sa propre initiative dans l'analyse supérieure et dans la théorie des nombres, qu'il a étudié d'après la première édition de tes Cours de Dirichlet. Maintenant, il pense faire les Disquisitiones. » Cette lettre est reproduite dans Strobl 1985 p.144-145.

[20]Strobl 1985 p.144.

[21]Strobl 1985 p.149.

[22]Voir Schwermer 2007 p.487. Les sources que nous avons consultées indiquent des dates différentes pour le séjour de Minkowski à Berlin. Dans Reid 1970 p.11, il est dit qu'il revient de Berlin au printemps 1882. Minkowski confirme ce séjour à Berlin dans ses *curriculum vitae* reproduits en introduction à sa correspondance avec Hilbert mais sans date précise.

[23]Hilbert 1911 p.V.

[24]Hilbert 1911; Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.9.

[25]Minkowski 1885.

était lui aussi étudiant à Königsberg alors qu'Hurwitz y avait été nommé professeur associé au printemps 1884. Tous les après-midi à cinq heures ils se retrouvaient pour discuter de mathématiques au cours de longues promenades, tradition qui sera reprise plus tard par Hilbert et Minkowski quand ils se retrouveront à Göttingen[26] :

> « On unending walks we engrossed ourselves in the actual problems of the mathematics of the time ; exchanged our newly acquired understandings, our thoughts and scientific plans ; and formed a friendship for life[27]. »

Minkowski se fait connaître de la communauté mathématique dès 1883 quand il remporte alors qu'il n'a pas encore 19 ans le Grand Prix des sciences mathématiques de l'Académie de Paris. L'histoire de ce prix a déjà été racontée à plusieurs reprises d'une part parce que Minkowski est encore très jeune quand il rédige le mémoire victorieux mais aussi à cause de la polémique autour de l'attribution du prix[28].
Nous avons plus particulièrement utilisé ici la conférence à propos de cette anecdote faite par Jean-Pierre Serre à l'Académie des sciences en 1983 et dont le texte a été publié en 1993 [29].
En avril 1881, l'Académie propose comme sujet pour ce prix la *Théorie de la décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés*[30]. Cette question est dans la continuité des travaux effectués sur la décomposition des entiers naturels en somme de carrés. Le critère pour savoir si un nombre est la somme de deux carrés est connu depuis Pierre Fermat[31]. En terme moderne, il s'énonce de la façon suivante : un entier naturel n peut s'écrire $n = a^2 + b^2$, avec a et b des entiers naturels, si et seulement si dans la décomposition de n en facteurs premiers, les facteurs de la forme $4m + 3$ interviennent avec un exposant pair[32].
En 1798, Adrien-Marie Legendre a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier n soit la somme de trois carrés d'entiers[33] est qu'il ne puisse pas s'écrire sous la forme $4^a(8m + 7)$, où a et m sont des entiers.
Enfin Joseph-Louis Lagrange a publié pour la première fois en 1772 [34] une démonstration du fait que tout nombre entier est la somme de quatre carrés d'entiers[35]. Ce dernier résultat implique en particulier que tout entier est aussi la somme de cinq carrés. Le problème posé par l'Académie ne porte donc pas sur l'existence d'une telle décomposi-

[26] Reid 1970 p.12-14.
[27] Hilbert cité dans Reid 1970 p.14.
[28] Voir par exemple Bayer-Fluckiger 2006a; Dieudonné 1974; Schwermer 1991; Strobl 1985.
[29] Serre 1993.
[30] Serre 1993 p.3.
[31] Dickson 1920, chapitre VI.
[32] Hardy et Wright 1960 p.299.
[33] Dickson 1920 p.ix.
[34] Lagrange 1772.
[35] Dickson 1920 p.279.

tion mais sur le nombre de décompositions possibles.
Cette question du nombre de décompositions en somme de carrés avait aussi été étudiée dans un certain nombre de cas. Pour les sommes de deux carrés et trois carrés les résultats sont dus respectivement à Legendre en 1798 et à Gauss en 1801 [36]. Pour la décomposition d'un entier en une somme de quatre, six ou huit carrés, Carl Jacobi a obtenu en 1829 des formules en utilisant la théorie des fonctions elliptiques mais sa méthode ne peut pas s'appliquer pour des décompositions en somme d'un nombre impair de carrés[37]. Au moment où le sujet pour le prix est proposé, les académiciens n'ont connaissance que des formules données sans démonstration par Ferdinand Gotthold Max Eisenstein en 1847 pour le nombre de décompositions d'un entier en somme de cinq carrés[38].
Minkowski, qui comme nous l'avons dit connaissait le travail de Gauss et Dirichlet[39], s'attaque au sujet proposé par l'Académie. Son travail le conduit à construire une théorie assez générale des formes quadratiques de n variables et à coefficients entiers. Il obtient pour ces formes des résultats plus généraux que ceux qui étaient nécessaires pour répondre à la question posée pour le prix[40].
En fait lorsque le sujet est proposé, les académiciens semblent ignorer que le problème du nombre de décomposition des entiers en somme de cinq carrés a déjà été résolu par un mathématicien anglais Henry John Stephen Smith qui était alors professeur à l'université d'Oxford. Dans un article publié en 1867 [41], Smith avait indiqué comment les formules conjecturées par Eisenstein sont des conséquences de résultats qu'il venait de démontrer[42].
Nous avons des informations sur la réaction de Smith à la publication de ce sujet pour le Grand Prix de l'Académie dans ses Oeuvres Complètes. L'éditeur des Oeuvres et ami de Smith, James Whitbread Lee Glaisher, rédige une introduction dans laquelle il revient sur ce prix. Il livre ses propres souvenirs ainsi que des extraits de la correspondance de Smith à ce sujet.
D'après Glaisher, lorsqu'en 1882 il apprend quel est le sujet proposé par l'Académie, Smith ne sait pas trop quelle attitude il doit adopter et il lui demande conseil dans une lettre du 17 février 1882 :

> « The Paris Academy have set for their Grand Prix for this year the theory of the decomposition of numbers into five squares, referring to a note of

[36] Dickson 1920 p.ix.
[37] Serre 1993 p.3.
[38] Eisenstein 1847.
[39] Dirichlet s'était aussi intéressé au nombre de décompositions en somme de trois carrés, voir Dickson 1920 p.263.
[40] Dieudonné 1974 p.411.
[41] Voir Smith 1867, dans cet article Smith traite aussi le cas du nombre de décompositions en somme de sept carrés.
[42] Serre 1993 p.3-4.

Eisenstein, *Crelle*, vol. xxxv, in which he gives without demonstration the formulae for the case in which the number to be decomposed has no square divisor. In the Royal Society's Proceedings, vol. xvi, pp.207, 208, I have given the complete theorems, not only for five, but also for seven squares : and though I have not given my demonstrations, I have (in the paper beginning at p. 197) described the general theory from which these theorems are corollaries with some fulness of detail. Ought I to do anything in the matter ? My first impression is that I ought to write to Hermite, and call his attention to it. A line or two of advice would really oblige me, as I am somewhat troubled and a little annoyed[43] ».

Il finit effectivement par contacter Charles Hermite et ce dernier lui répond dans une lettre datée du 26 février 1882 :

« Mon cher Monsieur,

Aucun des membres de la commission qui a proposé pour sujet du prix des sciences mathématiques en 1882 la démonstration des théorèmes d'Eisenstein sur la décomposition des nombres en cinq carrés n'avait connaissance de vos travaux contenant depuis bien des années cette démonstration et dont j'ai pour la première fois connaissance par votre lettre. L'embarras n'est point pour vous, mais pour le rapporteur des mémoires envoyés au concours, et si j'étais ce rapporteur je n'hésiterais pas un moment à faire d'abord l'aveu complet de l'ignorance où il s'est trouvé de vos publications, et ensuite à proclamer hautement que vous aviez donné la solution de la question proposée. Une circonstance pourrait ôter tout embarras et rendre sa tâche facile autant qu'agréable. S'il avait en effet à rendre compte d'un mémoire adressé par vous-même dans lequel vous rappelleriez vos anciennes recherches en les complétant, vous voyez que justice vous serait rendue en même temps que les intentions de l'Académie seraient remplies puisqu'on lui annoncerait la solution complète de la question proposée. Jusqu'ici je n'ai pas eu connaissance qu'aucune pièce ait été envoyée, ce qui s'explique par la direction du courant mathématique qui ne se porte plus maintenant vers l'arithmétique. Vous êtes seul en Angleterre à marcher dans la voie ouverte par Eisenstein. M. Kronecker est seul en Allemagne ; et chez nous M. Poincaré qui a jeté en avant quelques idées heureuses sur ce qu'il appelle les invariants arithmétiques, semble maintenant ne plus songer qu'aux fonctions Fuchsiennes et aux équations différentielles. Vous jugerez s'il vous convient de répondre à l'appel de l'Académie à ceux qui aiment l'arithmétique ; en tout cas soyez assuré que la commission aura par moi connaissance

[43] Glaisher 1894 p.lxvi.

> de vos travaux si elle a [à] se prononcer et à faire un rapport à l'Académie sur des mémoires soumis à son examen ... Je vous renouvelle, mon cher Monsieur, l'expression de ma plus haute estime et de mes sentiments bien sincérement dévoués.
>
> CH. HERMITE[44]. »

Smith suit finalement les recommandations d'Hermite et soumet un mémoire à l'Académie dans lequel il détaille ses travaux antérieurs[45].
Minkowski envoie lui aussi son travail, il s'agit d'un long mémoire écrit en allemand qu'il n'a pas eu le temps de traduire en français comme l'exigeait le règlement du prix. Il suit donc le conseil de son frère ainé Max et ajoute au dernier moment une courte introduction en français dans laquelle il demande l'indulgence des membres de l'Académie sur ce point[46].
Trois mémoires sont finalement envoyés pour concourir pour obtenir le prix : celui de Smith, celui de Minkowski et un troisième dont l'auteur est Théophile Pépin[47].
Au cours de la séance de l'Académie du 2 avril 1883, le prix est finalement attribué conjointement à Smith et à Minkowski[48], en ce qui concerne le troisième mémoire Camille Jordan le rapporteur de ce travail écrit :

> « ...Le mémoire N°2 montre chez son auteur des connaissances étendues et renferme plusieurs résultats intéressants ; mais la question posée par l'Académie ne s'y trouve même pas abordée[49]. »

Smith qui décède le 9 février 1883 ne reçoit son prix qu'à titre posthume et l'attribution conjointe du prix à Minkowski fait scandale[50]. La décision de l'Académie est contestée pour différentes raisons. D'abord les mathématiciens anglais critiquent le fait que le travail d'un mathématicien confirmé comme Smith soit mis au même niveau que celui d'un jeune inconnu encore étudiant[51]. Ensuite contrairement à la promesse faite par Hermite le rapport rédigé par l'Académie sur les mémoires présentés ne mentionne jamais que Smith avait déjà résolu le problème seize ans plus tôt[52]. Glaisher rapporte que la soeur de Smith écrivit alors à Hermite pour lui demander des explications et lui

[44] Cette lettre est reproduite dans Glaisher 1894 p.lxvi-lxvii.

[45] Serre 1993; Glaisher 1894 p.lxvii.

[46] Reid 1970 p.11. Cette introduction (reproduite dans Serre 1993 p.9) est datée du 29 mai 1882 alors que le dernier délai pour faire parvenir son travail pour concourir pour le prix était le 1er juin 1882.

[47] L'identité de l'auteur de ce troisième mémoire n'est connue que depuis 1989 lorsqu'à la demande de Jean-Pierre Serre la lettre contenant son nom a été ouverte. Le règlement prévoyait en effet que les auteurs restent anonymes à moins que leur travail ne soit primé. Voir à ce sujet les notes de Norbert Schappacher dans Serre 1993 p.5.

[48] Les mémoires de Smith et Minkowski ont été publiés, voir Smith 1887; Minkowski 1887b.

[49] Cité dans Glaisher 1894 p.lxviii.

[50] Glaisher 1894 p.lxvii.

[51] Serre 1993 p.4.

[52] Ce rapport est intégralement reproduit dans Glaisher 1894 p.lxvii-lxix.

rappeler sa promesse que le rapport devait faire mention de l'antériorité des travaux de son frère. En réponse, Hermite justifie cette omission en précisant que « ce tort ne consiste que dans un oubli, qui a été absolument involontaire[53] ».
D'autres critiques viennent des journaux français de l'époque. D'abord ils s'étonnent que les académiciens ne connaissaient pas le travail de Smith publié par la *Royal Society* quand ils ont choisi le sujet du prix[54], mais ils s'indignent aussi du fait que les membres de l'Académie aient pu récompenser un mémoire rédigé en allemand. Cette entorse au règlement était d'autant moins facilement excusée que les tensions causées par la guerre de 1870 entre la France et la Prusse étaient encore très vives[55].
Enfin, Glaisher explique que Minkowski était accusé d'avoir plagié le travail de Smith et les similitudes entre les deux mémoires pointées par le rapport des académiciens étaient prises comme des preuves que Minkowski connaissait l'article publié par Smith en 1867.
Ces critiques conduisirent Joseph Bertrand à s'expliquer sur cette décision au cours de la séance du 16 avril 1883. Pour lui le prix a amené Smith à revenir sur son article de 1867 dans lequel il ne donnait finalement pas de preuve des formules d'Eisenstein mais que de vagues indications difficiles à exploiter sans détails supplémentaires. Bertrand défend aussi l'originalité du travail de Minkowski et note que les points communs entre les mémoires récompensés ne sont pas étonnants vu que la question posée était assez restreinte[56].
Les académiciens persistent dans leur décision et Minkowski finit par recevoir son prix, c'est à cette occasion que Jordan écrit à Minkowski

> « Travaillez, je vous prie, à devenir un géomètre éminent[57]. »

Cette affaire du Grand Prix de l'Académie ressort en Angleterre pendant la Seconde Guerre Mondiale. Le 16 avril 1943, un journal anglais, *The Engineer*, publie un article intitulé « Sixty years ago : A Mathematical Prize ». Minkowski y est accusé d'avoir plagié le travail de Smith allant jusqu'à « copier une petite erreur ». Toujours d'après cet article, l'Académie a alors retiré le prix attribué à Minkowski. Mordell réagit à ces affirmations dans une lettre du 11 juin 1943 et il prend la défense de Minkowski. Il indique que le prix de Minkowski n'a jamais été annulé et conteste le fait que ce dernier se soit approprié les résultats de Smith. Pour Mordell, il ne fait aucun doute que Minkowski ait découvert sa démonstration indépendamment du travail de Smith et que

> « It is quite obvious that the writer of the article in your columns sixty

[53] Glaisher 1894 p.lxx.
[54] Glaisher 1894 p.lxx.
[55] Serre 1993 p.4.
[56] Glaisher 1894 p.lxx-lxxi.
[57] Cité Serre 1993 p.4.

years ago did not confine himself to facts. »

Cette lettre, qui est reproduite dans le journal le 18 juin 1943, est accompagnée d'une réponse de l'éditeur de *The Engineer*. Pour lui, d'une part, Mordell ne fournit aucune preuve de qu'il avance et il est impossible de prouver que Minkowski n'ait pas eu connaissance des travaux publiés de Smith, d'autre part, il renvoie à l'*Encyclopaedia Brittanica* et au *Dictionary of National Biography* pour soutenir leur version de l'histoire. Mordell répond à nouveau en donnant davantage de détails issus des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, des oeuvres complètes de Smith et de Minkowski[58].
Il est particulièrement intéressant que Mordell, dont nous verrons l'importance dans le développement de la géométrie des nombres au XX^e^ siècle, se trouve ici défendre l'originalité de Minkowski, et ce faisant contribue à l'établissement d'une mémoire mathématique collective. Cet indice renvoie à la question importante du rôle de l'histoire dans la constitution d'une discipline.

1.1.2 La carrière scientifique de Minkowski

Après son doctorat, entre 1885 et 1887, Minkowski entreprend quelques travaux de recherche sur les formes quadratiques et les substitutions linéaires[59] mais il regrette que son service dans l'armée prussienne l'empêche de se consacrer davantage à son travail. Il le déplore par exemple dans une lettre du 26 avril 1886 adressée à Hilbert qui se trouve alors à Paris :

> « Wenn einer der großen Herren, Jordan oder Hermite, sich vielleicht einmal meiner erinnern sollte, so bitte empfehlen Sie mich bestens, und machen Sie es klar, daß ich weniger von Natur, als durch die Umstände ein Faullenzer bin[60]. »

Sa carrière universitaire va véritablement commencer en 1887 à l'université de Bonn où il soutient son Habilitation[61] le 15 mars 1887. La procédure d'Habilitation comporte plusieurs étapes, d'abord Minkowski soumet deux articles[62], ensuite il propose plusieurs thèmes pour un exposé (Probevorlesung), celui qui a été finalement retenu est intitulé *Über einige Anwendungen der Arithmetik in der Analysis*[63].
Il semble que l'idée de faire venir Minkowski à Bonn n'était pas nouvelle puisque dès 1883 Rudolf Lipschitz demande l'avis d'Hermite sur le travail de Minkowski :

[58] Une copie de tous les documents cités à propos de cette polémique entre Mordell et *The Engineer* est conservée dans les archives de Mordell à Cambridge, Mordell (St John's), box 1, folder 5. Ces documents sont reproduits en annexe.

[59] Schwermer 2007.

[60] « Si l'un des grands hommes, Jordan ou Hermite, devait peut-être se souvenir une fois de moi, s'il vous plaît recommandez-moi au mieux et dites bien clairement que je suis un fainéant moins par nature que par les circonstances. » Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.32.

[61] Pour une étude détaillée voir, Schwermer 1991.

[62] Il s'agit de Minkowski 1887a,c.

[63] Le texte de ce manuscrit est reproduit dans Schwermer 1991 p.85-88.

> « Quant au dernier [Minkowski] je vous serais très reconnaissant si vous vouliez me faire connaître les impressions que vous a faites le travail couronné. Dans ce moment un professeur extraordinaire de mathématique laissé [?] vacant par le décès de M. Radicke à notre université il m'est venu l'idée, s'il serait par juste de le tenir ouvert tant que ce jeune homme le pourrait obtenir.
> ...vous êtes le juge le plus compétent de la valeur de son travail j'attache un prix très haut à savoir votre opinion[64]. »

La réponse d'Hermite est très élogieuse à l'égard de Minkowski :

> « Le mémoire de M. Minkowski étant écrit en allemand, a été lu et étudié par M. Camille Jordan, qui m'en a rendu compte. Ce n'est point à mon jugement une oeuvre aussi considérable que les mémoires de Rosenhain et de M. Kummer[65], mais je ne doute point que le jeune géomètre n'ait devant lui un grand avenir, et qu'il ne justifie pleinement votre confiance, si vous réalisez votre intention de vous l'attacher comme professeur extraordinaire. Son travail nous a paru plus complet et meilleur à certains égards que celui de M. Smith ; il rélève une science algébrique profonde, et un talent d'invention qui promet de belles et importantes découvertes dans l'avenir. Je pense donc que vous servez la cause de la science en lui facilitant son entrée dans la carrière universitaire, qu'il est digne de votre appui, dès à présent et que plus tard il le sera encore davantage[66]. »

De 1887 à 1892, Minkowski est donc *Privatdozent* à l'université de Bonn puis il y obtient un poste de professeur associé (ausserordentlicher Professor)[67]. Il semble que Minkowski n'apprécie alors pas vraiment ses collègues mathématiciens à l'exception de Lipschitz, il s'en plaint à Hilbert dans une lettre du 29 décembre 1887 :

> « Er [Lipschitz] war der Einzige, dem ich eine mathematische Frage stellen oder mit dem ich überhaupt ein wissenschaftliches Thema besprechen konnte. Mein College v. LILIENTHAL ist ein sehr liebenswürdiger Mensch ; aber ich rede mit ihm von allem andern lieber als von Mathematik[68]. »

---

[64]Extrait d'une lettre de Lipschitz à Hermite du 9 mai 1883, cité dans SCHWERMER 1991 p.79.

[65]Ce sont des mémoires qui ont obtenus le Grand Prix de l'Académie des sciences, Ernst Eduard Kummer en 1857 pour ses travaux sur le théorème de Fermat et Johann Rosenhain en 1851 pour ses travaux sur les fonctions elliptiques.

[66]Extrait d'une lettre de Hermite à Lipschitz du 12 mai 1883, cité dans SCHWERMER 1991 p.80.

[67]D'après Minkowski dans RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.9-10.

[68]« Il [Lipchitz] est le seul à qui je peux poser une question mathématique ou avec qui je peux discuter d'un sujet scientifique. Mon collègue v. Lilienthal est un homme très gentil ; mais je parle avec lui de tout autre chose plutôt que de mathématiques. » RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.33.

C'est peut-être la raison qui conduit Minkowski à se rapprocher des physiciens, il rencontre en particulier Heinrich Hertz[69] qui aura sur lui une grande influence et qui par son intermédiaire influencera aussi Hilbert dans ses travaux sur l'axiomatisation de la physique[70]. À cette époque Minkowski s'intéresse à la mécanique[71], il publie en 1888 un article sur l'hydrodynamique[72]. Il est intéressant de noter que les questions de physique sur lesquelles Minkowski travaille à cette époque ne sont pas simplement théoriques mais il s'investit au contraire dans des problèmes pratiques de physique expérimentale. Voilà comment il décrit avec humour ces activités à Hilbert le 22 décembre 1890 :

> « Ich weiß nicht, ob ich Sie deshalb trösten muß, noch auch, ob ich solches thue, indem ich meine Meinung dahin äußere, daß Sie diesesmal an mir, als einem gänzlich physikalisch Durchseuchten, wenig Freude erlebt hätten. Vielleicht auch hätte ich sogar eine zehntägige Quarantaine durchmachen müssen, ehe Sie mich wieder als mathematisch rein unangewandt[73] zu Ihren gemeinsamen Spaziergängen zugelassen hätten[74]. »

Un peu plus loin dans cette même lettre il ajoute :

> « Ich habe meine praktischen Übungen im physikalischen Institut, zu Hause studire ich THOMSON, HELMHOLTZ und Konsorten ; ja von Ende nächster Woche an arbeite ich sogar an einigen Tagen der Woche in blauem Kittel in einem Institut zur Herstellung physikalischer Instrumente, also ein Praktikus, wie Sie ihn sich schändlicher gar nicht vorstellen können[75]. »

Cet engagement de Minkowski dans des recherches en physique ne l'empêche pas pour autant de continuer son travail en mathématiques en particulier sur les formes quadratiques. Vers la fin des années 1880, ses idées sur ce qui va devenir la géométrie des nombres ont commencé à émerger, certaines d'entre elles transparaissaient déjà dans son exposé pour son Habilitation qui marque selon Joachim Schwermer « a decisive

[69]Dans ses travaux Hertz opère une géométrisation de la mécanique, point de vue géométrique qui sera adopté par Minkowski aussi bien en mathématique qu'en physique. Sur Hertz voir LÜTZEN 1999.

[70]Voir à ce sujet les articles de Leo Corry à propos du travail de Hilbert en physique, par exemple CORRY 1997, 2000.

[71]Lettre à Hilbert du 29 décembre 1887, RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.33.

[72]MINKOWSKI 1888.

[73]Minkowski plaisante ici autour du titre du Journal de Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, parfois qualifié ironiquement de *Journal für die reine unangewandte Mathematik*.

[74]« Je ne sais pas si je dois donc vous consoler, ni si en exprimant ma pensée j'agis de sorte que vous auriez éprouvé cette fois peu de joie avec moi qui suis complètement contaminé par la physique. Peut-être aurais-je dû même passer par une quarantaine de dix jours avant que vous ne m'ayez à nouveau admis à vos promenades en commun comme mathématiquement purement inappliqué. » RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.39.

[75]« J'ai mes exercices pratiques à l'Institut de physique, à la maison j'étudie Thomson, Helmholtz et consorts ; dès la fin de la semaine prochaine je travaille même quelques jours par semaine en blouse bleue à l'institut pour installer des instruments de physique, oui, un préparateur comme vous ne pourriez vous l'imaginer même pas de manière inavouable. » RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.39-40.

turning point in Minkowski's approach to the theory of quadratic forms[76] ». En effet, c'est à cette occasion que Minkowski commence à faire appel à l'intuition spatiale (« Räumliche Anschauung ») à différents niveaux dans son travail (nous y reviendrons). Nous avons des traces de ce début d'intérêt à cette époque pour ce qui va devenir la géométrie des nombres dans la correspondance de Minkowski avec Hilbert :

> « Ich bin jetzt in der Theorie der positiven quadratischen Formen sehr viel weiter gekommen, es wird in der That bei Formen mit größerer Variabelnzahl sehr vieles anders. Vielleicht interessirt Sie oder HURWITZ der folgende Satz (den ich auf einer halben Seite beweisen kann) : In einer positiven quadratischen Form von der Determinante D mit n (≥ 2) Variabeln kann man stets den Variabeln solche ganzzahligen Werthe geben, daß die Form $< nD^{\frac{1}{n}}$ ausfällt. HERMITE[77] hat hier für den Coefficienten n nur $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$, was offenbar im Allgemeinen eine sehr viel höhere Grenze ist[78]. »

Ces débuts dans cette direction de recherche se concrétisent au début des années 1890 avec ses premières publications qui sont recensées comme appartenant à la géométrie des nombres dans les *Gesammelte Abhandlungen* de Minkowski[79]. C'est aussi le moment où il commence la rédaction de son livre *Geometrie der Zahlen*[80] qui sera publié en 1896

> « Mit meinem Buche bin ich soweit, daß ich mich in diesen Tagen an einen Verleger wenden werde. Ich mochte [sic] es nicht thun, bevor Alles klipp und klar war. Ich habe alles Principielle, was ich benutze, also beispielsweise die Hülfssätze aus der Functionentheorie[81] ».

Une anecdote qui montre l'engagement de Minkowski dans ses recherches sur la géométrie des nombres est celle du rapport sur la théorie des nombres.
En 1893, se tient à Munich la réunion annuelle de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung récemment créée en 1890. Un des projets de l'association est de publier un état des lieux d'un domaine des mathématiques chaque année. il est décidé à Munich de confier

[76] SCHWERMER 2007.

[77] Le résultat d'Hermite qui est cité se trouve dans une lettre adressée à Jacobi en 1847, voir HERMITE 1850.

[78] « Je suis maintenant allé beaucoup plus loin dans la théorie des formes quadratiques positives, il y a en fait dans les formes d'un plus grand nombre de variables beaucoup d'autres choses. Le théorème suivant (que je peux prouver en une demi-page) vous intéresse peut-être, vous ou Hurwitz : dans une forme quadratique positive de déterminant D avec n (≥ 2) variables on peut toujours donner aux variables des valeurs entières telles que la forme vaut moins que $< nD^{\frac{1}{n}}$. Hermite a ici pour le coefficient n seulement $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$, ce qui en général est évidemment une borne bien trop haute. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 6 novembre 1889 RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.38.

[79] MINKOWSKI 1911.

[80] MINKOWSKI 1896a.

[81] « Avec mon livre je suis avancé au point que je vais m'adresser ces jours-ci à un éditeur. Je ne souhaitais pas le faire avant que tout ne soit clair et net. J'ai tous les fondements dont j'ai besoin, donc par exemple les lemmes de la théorie des fonctions. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 30 août 1892, RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.48.

à Hilbert (qui assistait à cette réunion) et à Minkowski la rédaction d'un rapport sur l'état des connaissances en théorie des nombres, ce rapport devant être terminé en deux ans. Minkowski et Hilbert décident de se partager le travail : le premier doit prendre en charge tout ce qui concerne la théorie des nombres rationnels (ce qui comprend la théorie arithmétique des formes), alors qu'Hilbert doit lui s'occuper de la théorie des corps de nombres algébriques[82].
Pendant qu'Hilbert se consacre à sa partie du *Zahlbericht*, Minkowski semble moins motivé par ce projet et est davantage intéressé par la rédaction de son livre sur la géométrie des nombres

> « Während wir Beide im Stillen an der harten und gerade nicht allzusüssen Nuss des gemeinsamen Referats knacken, Du Vielleicht noch mit schärferen Zähnen und mehr Kraftaufwand wie ich[83] ».

Minkowski regrette que le temps qu'il consacre au *Zahlbericht* l'empêche de se consacrer pleinement à finaliser ses propres travaux :

> « Die vollständige Darstellung meiner Untersuchungen über Kettenbrüche hat schliesslich annähernd den Raum von 100 Druckseiten erfordert. Dabei aber fehlte immer noch der allein befriedigende Abschluss, das unbestimmt vorschwebende charakteristische Kriterium für cubische Irrationalzahlen. [...] andererseits konnte ich nicht weiter an diesen Fragen arbeiten, da ich wirklich ernstlich an das Referat ging[84]. »

Au début de l'année 1896 la partie d'Hilbert est presque terminée et ce dernier, voyant que celle de Minkowski n'est pas aussi avancée, propose à son ami soit de la publier dans l'état où elle se trouve, soit de repousser la publication de cette seconde partie à l'année suivante[85]. Minkowski lui répond

> « Ich gehe also auf Deinen zweiten Plan ein mit der Wirkung, dass mein Theil erst in den nächstjährigen Bericht aufgenommen wird. Dieser Entschluss wird mir, da ich über das Klapp machen an sich sehr resignirt denke, hauptsächlich nur schwer, weil ich jetzt ein Jahr lang das beschämende Gefühl behalten werde, in gewissem Grade Dich und die Vereinigung im Stich gelassen zu haben. Du selbst hast freilich nicht die geringste dahin

[82] Voir Schappacher 2005; Reid 1970 p.44-45.

[83] « Pendant que tous les deux en silence croquons la noix dure et pas précisément trop sucrée du rapport commun, toi peut-être avec des dents plus acérées et plus de déploiement de forces que moi. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 17 mai 1895, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.65-66.

[84] « La présentation complète de mes recherches sur les fractions continues a finalement exigé près de 100 pages imprimées. Mais il y manque toujours la seule conclusion satisfaisante, le critère caractérisant les irrationnelles cubiques confusément rêvé. [...] d'un autre côté, je ne pourrai plus continuer à travailler sur ces questions, étant donné que je m'occupe vraiment sérieusement du rapport. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 10 février 1896, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.77.

[85] Reid 1970 p.51.

> zielende Äusserung gemacht, es liegt aber dieser Gedanke zu nahe, und mancher wird wohl sagen, nach den Erfahrungen mit meinem Buche wäre von mir Nichts anderes zu erwarten gewesen. Nun, etwas werden diese Vorwürfe gemildert werden, wenn jetzt der grösste Theil meines Buchs herauskommt und der Rest schnell folgt, und schliesslich kann ich mir einbilden, ich thue, was ich im Interesse der Sache für das Beste halte.
> Dich bitte ich jedenfalls sehr, in keiner Weise zu denken, dass ich Dich mit meinem Referat im Stich gelassen hätte[86]. »

Finalement, alors que le *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*[87] est publié par Hilbert en 1897, Minkowski n'achèvera jamais sa part du projet mais son livre *Geometrie der Zahlen* paraît en 1896[88].

En 1894, Minkowski quitte l'université de Bonn pour retourner à Königsberg où il rejoint Hilbert en tant que professeur assistant. Dès 1895, Hilbert part à Göttingen et Minkowski est nommé à sa place professeur le 18 mars 1895. Minkowski reste à Königsberg jusqu'en 1896, pendant cette période il profite de sa nouvelle position pour donner un cours sur la théorie de l'infini de Georg Cantor. En fait, Minkowski et Hilbert furent parmi les premiers mathématiciens à apporter leur soutien à Cantor à propos de son travail contreversé sur l'infini et la polémique qui l'oppose à Kronecker[89].
Minkowski ne reste pas très longtemps à Königsberg, il démissionne le 12 octobre 1896 pour accepter un poste de professeur de mathématiques à l'école polytechnique de Zürich[90] où il retrouve cette fois Hurwitz[91]. Il continue à s'intéresser à la physique et donne des cours sur la capillarité la théorie du potentiel et la mécanique analytique. En ce qui concerne les mathématiques, il enseigne la théorie des nombres et l'analysis situs et c'est aussi pendant cette période qu'il a parmi ses étudiants Albert Einstein[92].

---

[86] « J'accepte donc ton deuxième plan avec la conséquence que ma partie ne sera reçue que dans le rapport de l'an prochain. Alors que je pense au bouclage même avec un grand découragement, cette décision ne m'a été vraiment difficile que j'ai depuis un an le sentiment humiliant de vous avoir lâché dans une certaine mesure la Société [la DMV] et toi. Tu n'as toi-même assurément jamais fait la moindre remarque dans cette direction, mais cette pensée n'est jamais loin et plus d'un dirait bien qu'après les expériences avec mon livre il n'y aurait rien d'autre à attendre de moi. Bon, ces reproches s'adouciront un peu si la plus grande partie de mon livre sort maintenant et si le reste suit rapidement et finalement je peux m'imaginer que je fais ce que je tiens pour le mieux dans l'intérêt de la chose.
En tout cas, je prie vraiment de ne penser en aucune manière que je t'aurais laissé tomber avec mon rapport. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 10 février 1896, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.78.

[87] Hilbert 1897.

[88] Pour des renseignements supplémentaires sur l'histoire du *Zahlbericht* voir aussi l'article de Zassenhaus qui introduit la correspondance entre Minkowski et Hilbert dans Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.17-21.

[89] D'après Minkowski dans Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.10. Voir aussi Reid 1970 p.44-50.

[90] D'après Minkowski dans Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.10.

[91] Reid 1970 p.52.

[92] Walter 1996 p.8.

Minkowski se marie en 1897 avec Auguste Adler à Strasbourg[93]. Le couple a eu deux filles, Lily née en 1898 et Ruth née en 1902[94].

Hilbert réussit à obtenir la création d'un nouveau poste de professeur de mathématiques pour Minkowski à Göttingen. À l'automne 1902, Minkowski arrive donc à Göttingen et il y restera jusqu'à son décès en 1909.
Il semble que ces années passées à Göttingen furent une période très heureuse pour Minkowski et pour Hilbert ravis de se retrouver enfin dans la même ville[95]

> « A telephone call, or a few steps down the street, a pebble tossed up against the little corner window of his study, and there he was, always ready for any mathematical or non-mathematical undertaking[96]. »

Du point de vue de leurs recherches, bien qu'ils ne travaillent pas nécessairement sur les mêmes sujets, les échanges qu'ils ont pendant cette période influencent leurs travaux respectifs.
Minkowski continue à s'intéresser conjointement aux mathématiques et à la physique. Pour ce qui est des mathématiques, il donne des cours sur l'analysis situs, la théorie des fonctions, la géométrie, les surfaces de Riemann et la théorie des nombres. Son cours sur ce dernier thème du semestre d'hiver 1903-1904 porte plus particulièrement sur la géométrie des nombres et il est repris dans son livre *Diophantische Approximationen*[97] publié en 1907. Cet ouvrage, qui est en fait la continuation du travail de Minkowski sur la géométrie des nombres, montre que ce sujet de recherche est toujours au premier plan de ses préoccupations scientifiques. Ceci est aussi illustré par le congrès international des mathématiciens en 1904 à Heidelberg au cours duquel Minkowski choisit de donner une conférence sur le thème de la géométrie des nombres[98].
Minkowski est toujours aussi actif en physique et cela plus particulièrement à partir de 1905. Il continue à professer des cours sur la mécanique ou l'électrodynamique[99]. En 1906, il est l'auteur du chapitre de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* consacré à la capillarité[100]. Il conduit avec Hilbert un séminaire de physique dont le thème est, à partir de 1905, la théorie de l'électron et à partir de 1907, les équations de l'électrodynamique telles qu'elles avaient été formulées par Hendrik Antoon Lorentz en 1904[101]. L'intérêt de Minkowski pour la théorie de l'électron est suscité en particulier

[93] Reid 1970 p.55.
[94] Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.111 et 150.
[95] Voir Reid 1970 p.88-92, où elle décrit leur vie à Göttingen pendant cette période. Elle raconte par exemple les pique-niques du dimanche matin qui réunissent les deux familles, les réceptions chez les Hilbert, la timidité de Minkowski et ses rapports avec ses filles.
[96] Hilbert cité dans Reid 1970 p.91.
[97] Minkowski 1907.
[98] Minkowski 1904b.
[99] Walter 1996 p.8.
[100] Minkowski 1906.
[101] Corry 1997 p.284.

par son arrivée à l'université de Göttingen qui comptait alors dans ses rangs de très bons spécialistes du sujet comme Gustav Herglotz, Emil Wiechert[102], Max Abraham et Walter Kaufmann[103].
D'après les témoignages de Hilbert et de Max Born[104], ce serait au cours de ces séminaires que Minkowski élabore et développe ses idées sur la théorie de la relativité[105], sujet pour lequel il a le plus retenu l'attention des historiens[106].
Minkowski présente son travail sur la théorie de la relativité principalement en trois occasions. La première présentation a lieu le 5 novembre 1907, lors d'un exposé devant la Göttingen Mathematische Gesellschaft dont le titre est *das Relativitätsprinzip*. Le texte de cette conférence fut publié à titre posthume par Arnold Sommerfeld en 1915[107].
Moins de deux mois plus tard le 21 décembre 1907 à la réunion de la *königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* donne à nouveau une conférence intitulée cette fois *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*[108] et dont le texte est l'unique travail sur la relativité publié avant son décès[109].
Dans ces deux conférences, Minkowski énonce le principe de relativité et il utilise déjà une géométrie en dimension 4 sans pour autant que sa nouvelle conception de la relation entre l'espace et le temps, caractéristique de son travail dans ce domaine, soit encore pleinement développée[110]. C'est lors de la première présentation de son travail en dehors de Göttingen, à l'occasion de la *Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte* qui se tient à Cologne, que Minkowski développe son idée d'un espace-temps à 4 dimensions. Cet exposé *Raum und Zeit*[111], prononcé le 21 septembre 1908, est devenu emblématique[112] de la contribution de Minkowski à la théorie de la relativité

> « La conception de l'espace et du temps que je voudrais développer devant vous a grandi sur le sol de la Physique expérimentale. C'est ce qui fait sa force. La tendance en est radicale. Dès maintenant, l'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines ; une sorte d'union des deux doit seule subsister encore[113]. »

[102] Walter 1996 p.8.
[103] Galison 1979 p.88.
[104] Born était étudiant à Göttingen, puis il fut l'assistant de Hilbert. Quand en 1908 Minkowski recherche un collaborateur ayant des connaissances en optique expérimentale pour l'aider à combler ses lacunes c'est à lui qu'il fait appel, voir Walter 1996 p.9.
[105] Galison 1979.
[106] Il existe de nombreux travaux sur Minkowski et la relativité voir par exemple Corry 1997; Pyenson 1977; Galison 1979; Walter 1996, 1999a,b.
[107] Minkowski 1915.
[108] Minkowski 1908.
[109] Corry 1997; Galison 1979 p.89.
[110] Pour un commentaire détaillé du contenu de ces deux interventions de Minkowski voir Corry 1997 qui analyse ce travail de Minkowski dans le cadre du programme d'axiomatisation de la physique de Hilbert.
[111] Minkowski 1909a,b.
[112] Pour des commentaires sur cette conférence voir par exemple Galison 1979; Walter 1996.
[113] Minkowski 1909a p.499-500.

Ce qui caractérise la contribution de Minkowski à la théorie de la relativité c'est qu'il opère une mathématisation de cette théorie par sa reformulation en termes géométriques avec la notion d'espace-temps[114]. Ces rapports entre mathématiques et physique que nous voyons dans le travail de Minkowski sont en fait caractéristiques de Göttingen à cette époque. S'y côtoient en particulier au début du XX^e siècle des mathématiciens et des physiciens parmi les plus connus du moment[115].

Minkowski décède brutalement le 12 janvier 1909 à Göttingen d'une rupture de l'appendice. Il essayait alors d'approfondir ses recherches sur la relativité. D'après Hilbert[116], conscient de son état de santé il corrigea jusqu'au dernier moment sur son lit d'hôpital les épreuves de ses travaux les plus récents dont certains furent édités après sa mort par Max Born[117].

1.2 La préhistoire de la géométrie des nombres

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'intérêt de Minkowski pour ce qu'il a baptisé la géométrie des nombres vient de ses recherches pour répondre à certaines questions issues de la théorie arithmétique des formes quadratiques. L'objectif de ce qui suit est de donner un aperçu des problèmes posés par l'étude arithmétique des formes mais aussi d'examiner quelles étaient les sources du travail de Minkowski. La géométrie des nombres étant caractérisée par l'introduction d'un point de vue géométrique, nous regarderons plus particulièrement les méthodes géométriques déjà employées dans l'étude des formes avant que Minkowski ne commence à travailler sur ce thème. Nous nous appuierons en particulier sur l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* car elle offre un bilan contemporain du travail de Minkowski et elle reste une référence sur toute la première moitié du XX^e siècle.

1.2.1 Quelques éléments sur la théorie arithmétique des formes

Par forme nous entendons ici un polynôme homogène. Les mathématiciens se sont surtout dans un premier temps intéressés aux formes quadratiques qui sont des poly-

[114] Walter 1996 p.154.
[115] Rowe 1989.
[116] Pour une description des activités de Minkowski pendant les derniers jours de la vie voir Hilbert 1911; Reid 1970 p.114-115.
[117] Pour des renseignements sur la vie et la carrière de Minkowski voir aussi Zassenhaus 1975 où des extraits de la correspondance avec Hilbert son traduits en anglais.

nômes homogènes de degré 2 et qui s'écrivent donc d'une façon générale

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j \;.$$

Cet intérêt s'explique par le fait que ces formes quadratiques sont des généralisations des sommes de carrés qui étaient déjà étudiées avant le XIX^e^ siècle. La question était de savoir quels sont les nombres entiers qui peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'un certain nombre de carrés[118].

L'*Encyclopédie* consacre un long chapitre de 140 pages à la théorie arithmétique des formes. Un problème fondamental de la théorie est la traduction pour les formes générales de cette question de la décomposition des entiers en somme de carrés

> « On supposera, à moins d'indication contraire, que les formes et les substitutions linéaires dont il va être question sont à coefficients entiers.
> Un des problèmes les plus importants à résoudre est de déterminer les nombres représentables par une forme, c'est-à-dire les valeurs que peut prendre la forme quand on donne aux variables des valeurs entières. La théorie des formes est rattachée par là à la résolution des équations en nombres entiers[119]. »

Etant donnée une forme f et un entier n, il s'agit donc de savoir si n est représentable par f, c'est-à-dire s'il existe des valeurs entières des variables de f pour lesquelles f prend la valeur n. Notons aussi que la définition de l'*Encyclopédie* se limite aux formes dont les coefficients sont des nombres entiers. Historiquement, ce sont effectivement les formes à coefficients entiers qui ont d'abord retenu l'attention ; pour les mathématiciens contemporains leur étude est pourtant plus difficile que celle des formes dont les coefficients sont réels ou bien complexes.

La notion d'équivalence entre formes a été introduite[120] en liaison avec ce problème de la représentation des nombres entiers par une forme. Deux formes $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ et $F_2(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont dites équivalentes[121] lorque l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers de déterminant 1 ou -1, c'est-à-dire que

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, x'_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[118]Pour des détails sur les résultats concernant la décomposition des entiers en sommes de carrés voir Dickson 1920.

[119]Cahen et Vahlen 1908 p.76.

[120]Cette terminologie est issue du travail de Gauss mais la notion était déjà utilisée par Lagrange à la fin du XVIII^e^ siècle.

[121]Nous suivons ici la présentation faite dans Cahen et Vahlen 1908 ; celle-ci reprend le vocabulaire employé par Gauss.

où le déterminant $|\alpha_{ik}|$ est égal à ± 1.
La notion d'équivalence entre formes est liée à la représentation des nombres entiers car deux formes équivalentes représentent les mêmes nombres[122].
Les premières formes à avoir été étudiées de manière générale sont les formes quadratiques binaires, nous allons donc maintenant nous y intéresser plus particulièrement[123].

1.2.2 Les formes quadratiques binaires

1.2.2.1 Quelques résultats de Joseph-Louis Lagrange

Des mathématiciens comme Pierre Fermat ou Leonhard Euler ont étudié certaines équations du type $ax^2 + by^2 = m$ (a, b et m sont des entiers) qui sont en fait des cas particuliers de représentation d'entiers par une forme quadratique binaire. Le premier à avoir présenté un traitement général de ces problèmes, qu'il applique ensuite aux équations du type précédent, est Joseph-Louis Lagrange[124] dans ses *Recherches d'arithmétiques*[125] :

> « Ces recherches ont pour objet les nombres qui peuvent être représentés par la formule
> $$Bt^2 + Ctu + Du^2 \,,$$
> où B, C, D sont supposés des nombres entiers donnés, et t, u des nombres aussi entiers, mais indéterminés[126]. »

Dans ce travail, Lagrange ne met pas encore en place tout le vocabulaire relatif à l'étude des formes qui est maintenant utilisé. D'ailleurs le mot « forme » lui-même n'est pas pris dans le sens moderne de polynôme homogène mais il est employé pour dire qu'un nombre peut s'écrire sous une certaine « forme » : « Je donnerai enfin la démonstration de plusieurs Théorèmes sur les nombres premiers de la même forme $Bt^2 + Ctu + Du^2$ ». Néanmoins, nous avons pour la première fois chez Lagrange un certain nombre d'idées et de résultats sur les formes quadratiques qui seront par la suite à la base de cette théorie.

[122] La réciproque de ce résultat est fausse.
[123] Pour ce bref aperçu de l'histoire de la théorie arithmétique des formes quadratiques, nous reprenons les grandes étapes décrites dans Dickson 1923; Schwermer 2007.
[124] Schwermer 2007.
[125] Lagrange 1773 et 1775.
[126] Lagrange 1869 p.695.

Lagrange commence par démontrer le théorème I [127] :

« Si le nombre A est un diviseur d'un nombre représenté par la formule

$$Bt^2 + Ctu + Du^2 \, ,$$

en supposant t et u premiers entre eux, je dis que ce nombre A sera nécessairement de la forme

$$A = Ls^2 + Msx + Nx^2 \, ,$$

où l'on aura

$$4LN - M^2 = 4BD - C^2 \, ,$$

s et x étant aussi premiers entre eux. »

Avec ce premier résultat, Lagrange met en évidence le rôle joué par ce que nous avons appelé dans le paragraphe précédent les substitutions unimodulaires à coefficients entiers. Il fait le lien entre ces transformations des variables et la question de la représentation des nombres entiers, mais aussi avec la quantité $4BD - C^2$ qui est invariante pour de telles substitutions[128].

Avec les résultats qui suivent ce premier théorème, Lagrange explore plus en détail comment se comportent les coefficients des formes sous l'action des substitutions unimodulaires[129] :

« Théorème II. Toute formule du second degré telle que celle-ci

$$Ls^2 + Msx + Nx^2 \, ,$$

dans laquelle M est plus grand que L ou N (abstraction faite des signes de ces quantités), peut se transformer en une autre du même degré comme

$$L's'^2 + M's'x' + N'x'^2 \, ,$$

dans laquelle on aura

$$4L'N' - M'^2 = 4LN - M^2 \, ,$$

et où M' sera plus petit que M. »

[127] Tous les nombres considérés ici par Lagrange sont des entiers, Lagrange 1869 p.697.

[128] Dans ce qui suit cette quantité est supposée non nulle et non égale à un carré. Lagrange n'a pas exploré ces cas, où la forme se factorise en produit de deux facteurs linéaires, voir Dickson 1923 p.6.

[129] Lagrange 1869 p.698.

Ce théorème II lui permet de justifier qu'une expression $Ls^2 + Msx + Nx^2$ peut toujours être transformée en une autre $Py^2 + Qyz + Rz^2$ telle que Q soit plus petit que P et R (« abstraction faite des signes de ces quantités ») et telle que $4PR - Q^2 = 4LN - M^2$. Il s'intéresse aussi à la question de savoir combien de formes vérifient les conditions précédentes sur les coefficients parmi toutes celles que l'on peut déduire les unes des autres par des substitutions unimodulaires. La réponse à cette question dépend du signe de la quantité $4PR-Q^2$, Lagrange traite donc les deux cas séparément.
D'abord avec le problème III :

> « Etant donnée la formule
>
> $$py^2 + 2qyz + rz^2 ,$$
>
> dans laquelle y et z sont des nombres indéterminés et p, q, r sont des nombres positifs ou négatifs, déterminés par ces conditions, que
>
> $$pr - q^2 = a$$
>
> (a étant un nombre positif donné) et que $2q$ ne soit ni $> p$ ni $> r$, abstraction faite des signes de p, q et r ; trouver si cette formule peut se transformer en une autre de la même espèce et qui soit assujettie aux mêmes conditions[130]. »

Lagrange répond par la négative à cette question[131], il démontre que pour $pr-q^2$ positif, il ne peut y avoir plusieurs formes qui se déduisent par des subtitutions unimodulaires dont les coefficients vérifient les inégalités précédentes.
L'autre cas est considéré ensuite :

> « Problème IV. Etant donnée la formule
>
> $$py^2 + 2qyz - rz^2 ,$$
>
> dans laquelle y et z sont des nombres indéterminés, et p, q, r des nombres positifs ou négatifs, déterminés par ces conditions, que
>
> $$pr + q^2 = a$$
>
> (a étant un nombre positif donné) et que $2q$ ne soit ni $> p$ ni $> r$, abstraction faite des signes de p, q et r ; trouver si cette formule peut se transformer en une autre semblable, et où les mêmes conditions soient observées[132]. »

[130] Lagrange 1869 p.723.
[131] Lagrange 1869 p.728.
[132] Lagrange 1869 p.728.

Cette fois Lagrange montre qu'il est toujours possible de trouver plusieurs formes vérifiant les conditions proposées dans le problème IV[133]. Etant donnée une telle forme, il indique aussi comment, par un choix convenable de substitutions, il est possible d'en déterminer une autre.

Nous voyons bien là en germe dans le travail de Lagrange les notions d'équivalence et de formes réduites qui vont être approfondies par Carl Friedrich Gauss.

1.2.2.2 Un aperçu du travail de Carl Friedrich Gauss

Nous avons vu que les travaux de Gauss et surtout de Dirichlet ont fait partie de l'apprentissage de Minkowski concernant les formes quadratiques. Nous donnons donc ici quelques éléments sur les contributions de Gauss à cette théorie.
Dans la cinquième section des *Disquisitiones Arithmeticae*[134] publiées en 1801, Gauss développe une théorie générale des formes quadratiques binaires. Gauss n'y démontre pas seulement beaucoup de résultats nouveaux mais il y propose aussi un vocabulaire unifié pour cette théorie. Par exemple, il appelle « formes du second degré » les fonctions de deux indéterminées qu'il note soit $ax^2 + 2bxy + cy^2$, soit (a, b, c), où a, b et c sont des nombres entiers. La quantité $b^2 - ac$ est appelée le déterminant de la forme (a, b, c). Parmi les formes $F = ax^2+2bxy+cy^2$ et $F' = a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$ qui sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont liées par une substitution du type

$$x = \alpha x' + \beta y' \,, \qquad y = \gamma x' + \delta y' \,,$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$; Gauss distingue celles qui sont proprement équivalentes pour lesquelles $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, de celles qui sont improprement équivalentes qui vérifient $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. Deux formes proprement équivalentes sont dites de même classe.

Lorsque le déterminant de la forme $ax^2+2bxy+cy^2$ est strictement négatif[135], a et c sont nécessairement de même signe et il est toujours possible, quitte à étudier la forme $(-a, -b, -c)$, de se ramener au cas où ils sont tous les deux strictement positifs. Gauss démontre que dans chaque classe il existe une unique forme (A, B, C) qui vérifie[136]

$$2|B| \leq A < C \qquad \text{ou} \qquad 0 \leq 2B \leq A = C \,.$$

[133] Lagrange 1869 p.737.
[134] Une traduction en français est publiée dès 1807, voir Gauss 1807.
[135] On dira après Gauss que la forme est définie. Elle est définie positive si elle ne prend que des valeurs positives et définie négative sinon. Voir Cahen et Vahlen 1908 p.103.
[136] Cahen et Vahlen 1908 p.103.

Gauss appelle de telles formes (A, B, C) des formes réduites[137]. Remarquons que les cas où le déterminant de la forme est nulle ou égal à un carré sont traités à part chez Gauss. La notion de forme réduite au sens de Gauss diffère de celle qui avait été proposée par Lagrange. Malgré cela le résultat de Gauss est analogue à un théorème de énoncé par Lagrange et l'idée utilisée par les deux mathématiciens est la même, il s'agit de trouver dans chaque classe de formes un représentant privilégié.
Dans le cas où le déterminant D est strictement positif, Gauss introduit aussi une notion de réduction. Il appelle cette fois réduite une forme (A, B, C) pour laquelle[138]

$$0 \leq B < \sqrt{D} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{D} - B \leq |A| \leq \sqrt{D} + B\,.$$

Il montre là encore que n'importe quelle forme de déterminant strictement positif est proprement équivalente à une forme réduite. La difficulté dans ce deuxième cas est que dans chaque classe il n'y a en général plus unicité de la forme réduite[139]. Lagrange avait eu lui aussi le même problème d'unicité dans le PROBLÈME IV, en fait quand D est strictement positif il n'est pas possible de trouver une notion de réduction permettant d'assurer l'unicité de la forme réduite dans chaque classe de formes proprement équivalentes. C'est pourquoi dans le cas des formes indéfinies de nombreuses notions de réduction différentes ont été proposées[140].

Même si nous ne donnons pas de détails ici, notons que Gauss poursuit l'étude des formes quadratiques binaires par une classification plus fine. Il introduit par exemple la notion de formes primitives qui sont telles que leurs coefficients a, b, c sont premiers entre eux. Il étudie ensuite la distribution des formes en « ordres », deux formes (a, b, c) et (a', b', c') étant de même ordre si les plus grands communs diviseurs de a, b, c ; a', b', c' et $a, 2b, c$; $a', 2b', c'$ sont les mêmes. Il propose ensuite une classification par genres. Il élabore au passage une théorie de la composition des formes, notion jugée difficile même après qu'elle soit reprise par Dirichlet[141].

[137] GAUSS 1807 p.142.
[138] GAUSS 1807 p.159.
[139] GAUSS 1807 p.161.
[140] Voir par exemple CAHEN et VAHLEN 1908 p.105-106, où deux autres notions de formes réduites sont mentionnées. Voir aussi SCHWERMER 2007.
[141] À propos de la composition des formes d'après Gauss, voir FENSTER et SCHWERMER 2007; EDWARDS 2007. En particulier, bien que l'on considère souvent le travail de Dirichlet à ce sujet comme simplifiant celui de Gauss, Edwards note (voir p.131) que les deux théories ne sont en fait pas équivalentes.

1.2.2.3 Un résultat emblématique d'Hermite

Il semble que le travail de Charles Hermite sur la théorie des formes quadratiques ait eu une grande influence sur les recherches de Minkowski. Ce dernier rendit hommage au mathématicien français à de nombreuses occasions car il le considérait comme étant à l'origine de ses propres recherches.
Une des idées d'Hermite que Minkowski continua à exploiter est l'utilisation de quantités continues afin d'obtenir des résultats de nature arithmétique.

Une question importante de la théorie des formes quadratiques est d'étendre la notion de réduction aux formes de n variables. Hermite[142] écrit de telles formes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

où $a_{ij} = a_{ji}$ et le déterminant de cette forme est noté $D = |a_{ij}|$. Il ramène le problème de la réduction des formes indéfinies à celui des formes définies pour lesquelles il propose plusieurs notions de formes réduites. Nous en donnons ici une seule qui est celle qui sera par la suite simplifiée par Minkowski. Hermite appelle donc réduite les formes quadratiques définies positives dont les coefficients vérifient les conditions suivantes[143]

$$\begin{aligned}
&0 \ < \ a_{11} \ < \ a_{22} \leq \ \ldots \ \leq \ a_{nn} \,, \\
&a_{11}\, a_{22} \ \ldots \ a_{nn} \ < \ \lambda_n \, D \,, \\
&-a_{hh} \ \leq \ 2\, a_{hk} \ \leq \ a_{hh} \qquad (h < k) \,,
\end{aligned}$$

où λ_n ne dépend que de l'entier n. La valeur obtenue par Hermite pour λ_n est

$$\lambda_n \ = \ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ .$$

Une difficulté importante de cette notion de réduction est qu'elle ne garantit pas l'unicité de la forme réduite dans chaque classe, elle permet d'assurer uniquement que chaque forme est équivalente à au plus un nombre fini de formes réduites[144]. Hermite est conscient de ce problème

> « Au reste les formes réduites auxquelles on est ainsi conduit, pour un déterminant donné n'offrent plus ce caractère propre aux formes binaires, de ne pouvoir être équivalentes entre elles, à moins d'être identiques, aux

[142] Voir les lettres à Jacobi de 1847 dans Hermite 1850.
[143] Cahen et Vahlen 1908 p.185.
[144] Schwermer 2007 p.12.

signes près des coefficients[145]. »

Le coefficient a_{11} d'une forme réduite s'interprète comme le minimum de la forme quand ses variables prennent des valeurs entières. La réduction des formes quadratiques est donc liée à la détermination des meilleurs estimations possibles pour ce minimum

> « j'ai dû reconnaître que ce qu'on devait se proposer avant tout, dans la théorie de la réduction, était de découvrir les valeurs entières des indéterminées pour lesquelles une forme définie donnée, était *la plus petite possible*[146]. »

Hermite démontre donc, par induction, que pour une forme quadratique définie positive $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables et de déterminant D, il existe des entiers $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ non tous nuls qui vérifient

$$f(\alpha, \beta, ..., \lambda) < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{|D|} \, .$$

Nous avons dit l'importance de cette estimation dans la théorie de la réduction mais cette inégalité peut aussi avoir des conséquences intéressantes dans d'autres domaines. Hermite l'utilise par exemple en approximation diophantienne et Minkowski approfondira là encore les méthodes d'Hermite.

1.2.3 Géométrie et formes quadratiques avant Minkowski

Avant l'introduction systématique par Minkowski d'un point de vue géométrique dans l'étude de la théorie arithmétique des formes, la géométrie avait déjà été utilisée par d'autres mathématiciens. Nous verrons que certaines de ces idées ont influencé la démarche employée par Minkowski.

1.2.3.1 Une première représentation géométrique

L'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* attribue à Gauss cette première manière de représenter les formes quadratiques binaires[147]. Cette représentation élaborée en 1827[148] n'est publiée qu'en 1876 après sa mort. Cette même année Henry John Stephen Smith développe ce point de vue et contribue à sa plus large diffusion[149].
Nous suivons ici la présentation proposée par l'*Encyclopédie*[150].

[145] Hermite 1850 p.285-286.
[146] Hermite 1850 p.295.
[147] Cahen et Vahlen 1908 p.116.
[148] Gauss 1827 p.477-478.
[149] Dickson 1923 p.31-32.
[150] Cahen et Vahlen 1908 p.116-119.

Deux points du plan sont dits congruents si leurs affixes z et z' sont liées par une relation du type

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \ ,$$

où α, β, γ et δ sont des réels qui vérifient $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.
Si z est l'affixe d'un point situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses, alors les points qui lui sont congruents sont eux aussi strictement au-dessus de cet axe. De plus, les points congruents à un point situé sur l'axe des abscisses sont aussi sur l'axe.
Supposons qu'un repère orthonormé d'origine O soit fixé. Considérons maintenant l'ensemble des points d'ordonnée positive situés strictement entre les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ et strictement à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 1. À cet ensemble, on ajoute d'une part les points dont l'ordonnée est positive, dont l'abscisse est $-\frac{1}{2}$ et qui sont à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 1 ; d'autre part les points sur ce cercle, d'ordonnée positive et dont l'abscisse x vérifie $-\frac{1}{2} \leq x < 0$. L'ensemble des points ainsi défini est appelé domaine fondamental (voir la figure 1.2).

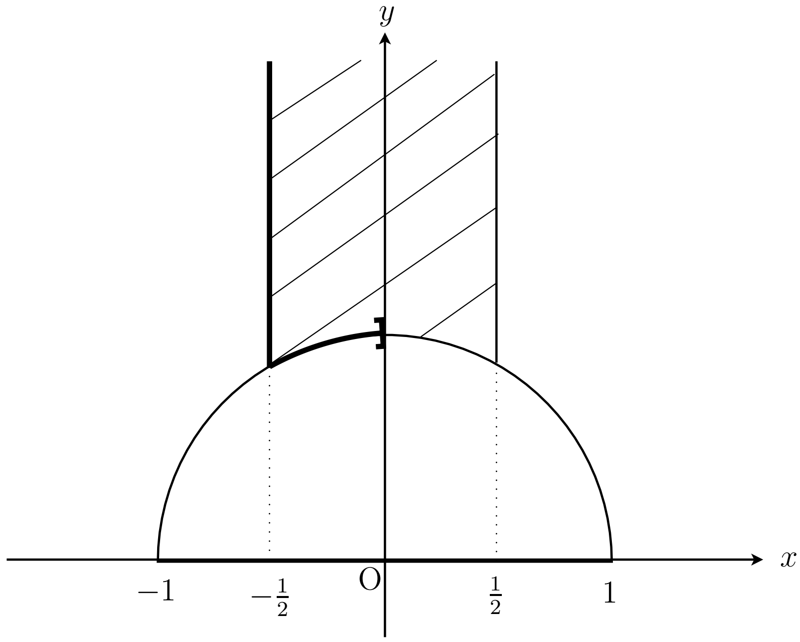


FIG. 1.2 – Le domaine fondamental

Tout point du demi-plan situé au-dessus de l'axe des abscisses est alors congruent à un unique point du domaine fondamental.

À une forme quadratique binaire $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est associée l'équation du second degré $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$.
Lorsque la forme est définie cette équation admet deux racines complexes. La forme est

réduite si le point dont l'affixe est la racine dont la partie imaginaire est strictement positive est située dans le domaine fondamental.
Felix Klein[151] reprend cette représentation géométrique dans les années 1890 afin de traiter le cas plus difficile des formes indéfinies. Pour ces formes, les racines de l'équation précédente sont sur l'axe des abscisses et la forme est réduite « quand le demi-cercle décrit sur le segment qui joint les points représentatifs des deux racines comme diamètre, traverse le domaine fondamental[152] ». Cette méthode de réduction est en fait équivalente à celle développée par Hermite et connue sous le nom de réduction continuelle[153]. Hermite avait cependant présenté sa méthode de manière complètement analytique sans aucun recours à la géométrie[154].

1.2.3.2 L'utilisation des réseaux

Le deuxième mode de représentation des formes quadratiques qui va maintenant être abordé est aussi dû à Gauss. Il est important du point de vue de la géométrie des nombres car il utilise la notion de réseau qui sera un des objets à la base du travail de Minkowski.
Dans les *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss a commencé l'étude des formes quadratiques ternaires[155]. Il étudie en particulier la représentation des formes binaires par des formes ternaires et il cherche à déterminer à quelle condition deux formes ternaires sont équivalentes[156]. La théorie des formes quadratiques ternaires est ensuite approfondie en 1831 par Ludwig August Seeber dans sa thèse intitulée *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen*. Seeber développe une théorie de la réduction pour les formes ternaires définies analogue à celle des formes binaires. Dans chaque classe de formes ternaires définies équivalentes, il y a une unique forme réduite qui est caractérisée par des inégalités entre ses coefficients[157]. Seeber discute aussi le problème de trouver toutes les formes réduites

$$f(x,x',x'') = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx' ,$$

de déterminant $D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''$ strictement négatif fixé. Il utilise pour cela l'estimation[158] $aa'a'' \leq 3|D|$. Il conjecture que cette dernière inégalité peut

[151]Klein 1895-1896.
[152]Cahen et Vahlen 1908 p.118.
[153]Hermite 1851.
[154]Cette méthode de réduction s'applique aussi à des formes de n variables. Pour des détails sur ce travail d'Hermite voir Goldstein 2007 p.394-396.
[155]Pour une chronologie des principaux résultats de cette théorie voir Dickson 1923, chapitre IX.
[156]Cahen et Vahlen 1908 p.160-161.
[157]Ces conditions sont données dans Dickson 1923 p.210.
[158]Dickson 1923 p.210.

être améliorée en $aa'a'' \leq 2|D|$.
Dès 1831, dans le compte rendu qu'il fait de la thèse de Seeber[159], Gauss démontre cette dernière inégalité. Il utilise pour cela sa nouvelle interprétation géométrique des formes quadratiques binaires et ternaires[160].

Gauss propose de représenter les formes quadratiques binaires et ternaires définies positives par un réseau de la façon suivante. Pour une forme binaire définie positive $ax^2+2bxy+c^2$, où a et c sont strictement positifs, Gauss construit un parallélogramme dont deux côtés consécutifs mesurent $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$, l'angle φ entre ces côtés vérifiant $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}}$. Les côtés de ce parallélogramme, appelé parallélogramme fondamental, sont ensuite prolongés, puis on trace le système de droites parallèles et équidistantes à ces côtés. Le plan est ainsi divisé par un réseau de parallélogrammes qui représente la forme (a, b, c).

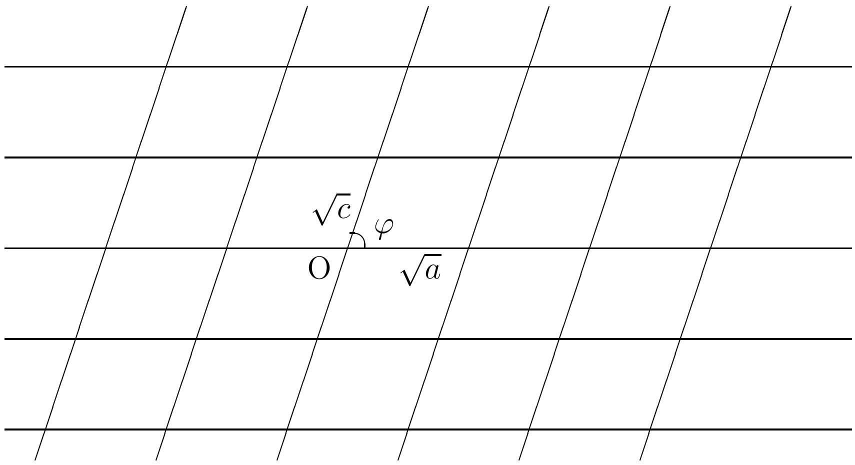


FIG. 1.3 – Représentation de la forme quadratique (a, b, c) par un réseau.

Les sommets des parallélogrammes précédents forment un réseau de points à l'aide duquel Gauss interprète la notion d'équivalence entre formes

> « Ein und dasselbe System solcher Punkte kann auf unendlich viele verschiedene Arten parallelogrammatisch abgetheilt, und also auf ebenso viele verschiedene Formen zurückgeführt werden : alle diese verschiedenen Formen sind aber, was in der Kunstsprache equivalent heisst[161] ».

Ainsi le réseau de points représente une classe d'équivalence dont chaque représentant correspond à un système de parallélogrammes définissant ce réseau de points.

[159] GAUSS 1831.
[160] SCHWERMER 2007 p.9.
[161] « Un même système de tels points peut être divisé en parallélogrammes d'une infinité de manière et donc être rattaché à autant de formes différentes : mais toutes ces formes différentes sont ce qu'en langage technique on appelle équivalentes », GAUSS 1831 p.194.

Gauss donne aussi une interprétation géométrique du déterminant qui est négatif pour une forme définie positive : l'aire des parallélogrammes d'un réseau est la même et est égale à la racine carrée de l'opposé du déterminant. Enfin, si une origine est fixée dans le réseau, les nombres entiers qui sont représentables par la forme (a, b, c) sont les carrés des distances de cette origine aux points du réseau[162].
De façon analogue, Gauss représente les formes quadratiques ternaires en considérant des réseaux dans l'espace.

En 1848, Dirichlet poursuit ce travail en interprétant géométriquement la notion de forme réduite[163]. Le parallélogramme d'une forme réduite est caractérisé par le fait que ses côtés sont plus petits que ses diagonales. Dirichlet explique aussi comment, étant donné le réseau de points, on peut déterminer le parallélogramme fondamental qui correspond à la forme réduite. Pour cela, choisissons un point du réseau O comme premier sommet du parallélogramme, le deuxième sommet P est tel que la distance OP soit minimale parmi les distances de O aux autres points du réseau. Enfin le dernier sommet Q est pris tel que OQ soit le minimum des distances entre O et les points du réseau qui ne sont pas sur la droite OP[164].

Avant le début du travail de Minkowski sur les formes quadratiques, la représentation des formes quadratiques binaires et ternaires définies en termes de réseau est donc en place. Cette représentation a aussi permis d'interpréter géométriquement certains problèmes importants dans l'étude de ces formes comme la représentation des entiers, l'équivalence entre formes ou la réduction.

1.2.3.3 Un autre résultat géométrique de Dirichlet

En 1863, Richard Dedekind publie les *Vorlesungen über Zahlentheorie*[165] rédigés d'après les cours professés par Dirichlet à Berlin et à Göttingen. Ces cours ont joué un rôle très important dans le développement de la théorie des nombres car ils reprennent très largement le contenu des *Disquisitiones Arithmeticae* en les simplifiant et rendent ainsi accessible le travail de Gauss à une audience plus large. Dedekind ajoute à l'édition de ces cours des suppléments issus du travail de Dirichlet dès l'édition de 1863 et d'autres, issus de ses propres recherches, pour les éditions postérieures à 1871[166]. Parmi les suppléments de la première édition de 1863, c'est ici le numéro III, *Ueber*

[162] Pour une description modernisée de cette représentation géométrique voir Schwermer 2007 p.9.
[163] Lejeune-Dirichlet 1850.
[164] Le cas des formes ternaires se traite de la même façon, voir Dickson 1923 p.21 et 212.
[165] Lejeune-Dirichlet 1863.
[166] Goldstein 2002.

einen geometrischen Satz, qui va nous intéresser.
Dedekind[167] considère une partie bornée dans le plan F dont il note A l'aire. Soient ensuite X et Y des axes perpendiculaires et le système de droites parallèles à ces axes et équidistantes. Ce système de droites forme un réseau du plan et le côté d'un carré de ce réseau est noté δ. Enfin, T désigne le nombre de points du réseau situé dans la partie F.
Le résultat de Dirichlet dit alors que la quantité $T\delta^2$ tend vers A lorsque δ tend vers 0. Pour démontrer ce théorème, Dedekind commence par supposer que les droites parallèles à Y coupent le bord de F en deux points (il explique à la fin pourquoi le résultat ne dépend pas de cette hypothèse). Soit ensuite h la longueur d'une des lignes parallèles à Y à l'intérieur de F, alors $h\delta$ est approximativement l'aire de F entre deux de ces parallèles consécutives (voir la figure 1.4).

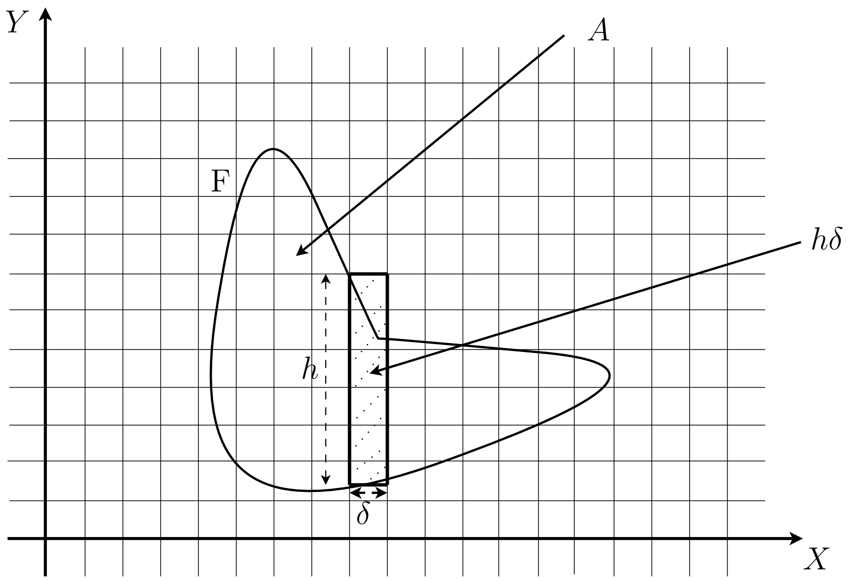


FIG. 1.4 – Le résultat géométrique de Dirichlet

Un théorème de la théorie de l'intégration lui permet de dire que

$$\sum h\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} A ,$$

où la somme du membre de gauche porte sur les segments dans F parallèles à Y. Si maintenant n est le nombre de points du réseau sur un tel segment de longueur h, h est divisé en $n-1$ segments de longueur δ plus un reste strictement inférieur à 2δ, ainsi $h = n\delta + \varepsilon\delta$ avec $-1 < \varepsilon < 1$. Ceci implique que

$$\sum h\delta = \sum (n\delta^2 + \varepsilon\delta^2) = T\delta^2 + \delta \sum \varepsilon\delta ,$$

[167] LEJEUNE-DIRICHLET 1999 p.215.

les sommes portant toujours sur les segments dans F parallèles à Y. La somme $\sum \varepsilon\delta$ est bornée car, comme ε est en valeur absolue inférieure à 1, elle est plus petite que la longueur maximale d'un segment parallèle à X et inclus dans F qui est borné. D'autre part, comme $\sum h\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} A$, l'égalité précédente permet de conclure que

$$T\delta^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} A\,.$$

Comme référence Dedekind renvoie à un article de Dirichlet de 1839 intitulé *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* Dans cet article nous retrouvons effectivement ce résultat mais énoncé de manière différente et sans la démonstration jugée « très facile » :

> « Tous les points d'un plan infini étant rapportés à deux axes rectangulaires des x et des y, concevons dans ce plan une courbe fermée assujettie à une même loi analytique dans toutes ses parties, supposons que les dimensions de cette courbe augmentent de plus en plus et au delà de toute limite, de manière cependant que la courbe variable reste toujours semblable à elle-même, et désignons par σ l'aire également variable à laquelle la courbe sert de contour.
> Soient maintenant a, b, α, β quatre constantes dont les deux premières ont des valeurs positives, et supposons que l'on construise tous les points dont les coordonnées x et y ont la forme
>
> $$6. \qquad x = av + \alpha\,, \quad y = bw + \beta\,,$$
>
> où v et w désignent tous les entiers depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Cela posé si l'on désigne par $F(\sigma)$ le nombre de ces points situés dans l'intérieur de la courbe, on aura évidemment pour les valeurs infinies de σ,
>
> $$F(\sigma) = \frac{1}{ab}\,\sigma\,,$$
>
> c'est à dire que le rapport des deux membres de cette équation convergera vers l'unité lorsque σ croît au delà de toute limite positive[168]. »

Ce résultat est bien équivalent au précédent sauf que la maille du réseau n'est pas un carré de côté δ mais un rectangle dont les côtés sont a et b.

Dirichlet utilise ce résultat afin de déterminer le nombre de classes de formes quadratiques binaires $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ayant un déterminant $D = b^2 - ac$ fixé. Dans sa

[168] Lejeune-Dirichlet 1839 p.329.

démonstration, Dirichlet étudie la limite, quand s tend vers 1, de somme du type

$$(s-1)\sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} ,$$

la sommation se faisant sur des points (x, y) qui appartiennent à un réseau du type de celui décrit ci-dessus[169]. Dirichlet ramène le problème à la détermination du nombre de points (x, y) de la forme $x = av + \alpha$, $y = bw + \beta$ situés dans un domaine délimité par la courbe

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma$$

ce qui lui permet d'utiliser le résultat précédent[170].

Dirichlet considère ce résultat comme un simple lemme technique de nature analytique

> « Nous aurons encore besoin de deux autres lemmes qui appartiennent, comme le précédent, à l'analyse infinitésimale[171]. »

Mais ce théorème fait un lien entre la notion de réseau et une aire afin de résoudre une question arithmétique. Avec Minkowski qui connaissait le travail de Dirichlet, ce lien entre réseau et aire va acquérir un statut plus fondamental et être envisagé davantage d'un point de vue géométrique sans pour autant que l'aspect analytique soit complètement abandonné. Selon la présentation faite, Minkowski verra son travail de façon géométrique ou analytique.

1.3 Le travail de Minkowski sur la géométrie des nombres

La date la plus souvent donnée pour la naissance de la géométrie des nombres est 1896 qui est l'année de publication de la première édition du livre de Minkowski *Geometrie der Zahlen*

> « The geometry of numbers is a branch of number theory that originated with the publication of Minkowski's seminal work in 1896[172] ».

Les indices montrant que Minkowski travaille sur ce thème depuis plusieurs années sont en fait nombreux. Nous en avons déjà donné des exemples quand nous avons décrit les grandes étapes de sa carrière scientifique. Nous avions cité en particulier son habilitation à Bonn et la correspondance avec Hilbert qui permettent de dire que la géométrie

[169] Ce sont les conditions 6 données dans la citation de Dirichlet.

[170] La nature de la courbe dépend du signe du déterminant. Si D est strictement négatif, il s'agit d'une ellipse et si D est strictement positif d'un secteur d'hyperbole.

[171] Lejeune-Dirichlet 1839 p.328.

[172] Olds et al. 2000 p.xiii.

des nombres est en germe dès la fin des années 1880. De plus, si nous regardons les publications recensées dans la rubrique *géométrie des nombres* des oeuvres de Minkowski éditées par Hilbert, nous voyons que des articles concernant ce thème sont publiés dès 1891. Parmi ces publications se trouvent des extraits de lettres adressées à Hermite et des conférences faites en diverses occasions qui montrent que Minkowski diffuse ses idées sur la géométrie des nombres avant 1896.

1.3.1 La géométrie des nombres avant 1896

1.3.1.1 Deux publications de 1891

En 1891, deux articles sur la géométrie des nombres sont publiés par Minkowski. Dans le premier, *Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen*[173], Minkowski expose les premiers résultats qu'il a obtenus concernant les minima des formes quadratiques ainsi que des applications à la théorie des nombres algébriques. La deuxième publication de l'année 1891 est un extrait d'une lettre de Minkowski à Hermite publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*[174]. Il s'agit d'une courte lettre dans laquelle Minkowski résume le contenu de l'article cité précédemment. Les résultats y sont donc énoncés sans démonstration.

Le premier théorème que Minkowski énonce dans sa lettre est le suivant :

> « Soit n un nombre plus grand que 1 ; soient ξ, η, ζ, ... , n formes linéaires indépendantes à n variables x, y, z ... . Parmi ces formes, soient β paires d'imaginaires conjuguées et les autres $n - 2\beta = \alpha$ formes réelles. L'un ou l'autre des nombres α et β peut aussi être égal à zéro. Soit Δ le déterminant des formes ξ, η, ζ, ... Soit enfin p une quantité quelconque ≥ 1. On peut toujours assigner à x, y, z ... des valeurs entières, de sorte que la somme
>
> $$(\text{abs.}\,\xi)^p + (\text{abs.}\,\eta)^p + (\text{abs.}\,\zeta)^p + \dots$$
>
> soit différente de zéro et en même temps plus petite que la quantité
>
> $$\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^\alpha 2^{-\frac{2\beta}{p}} \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^\beta} \text{abs.}\,\Delta \right\}^{\frac{p}{n}},$$

[173]Minkowski 1891b.
[174]Minkowski 1891a.

qui est elle-même plus petite que

$$n\,(\text{abs.}\,\Delta)^{\frac{p}{n}}\,.$$

Ici abs. signifie « valeur absolue de » et Γ désigne la fonction gamma[175]. »

Ce résultat énoncé sur n formes linéaires quelconques est ensuite appliqué au cas où ces formes sont n formes conjuguées d'un corps de nombres algébriques. Pour cela, dans un tel corps irréductible de degré n, Minkowski choisit une forme ξ qui décrit tous les entiers algébriques de ce corps lorsque ses n variables prennent des valeurs entières[176]. Les $n-1$ autres formes sont alors les formes conjuguées à ξ. Si Δ désigne toujours le déterminant de ces formes alors le discriminant D du corps est le carré de Δ et c'est un entier rationnel. Le théorème précédent entraîne l'existence d'entiers x, y, z, … non tous nuls tels que

$$|\xi|^p+|\eta|^p+|\zeta|^p+\cdots \;<\; \left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha}\,2^{-\frac{2\beta}{p}}\,\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}}\;|\Delta|\right\}^{\frac{p}{n}} \;<\; n\,|\Delta|^{\frac{p}{n}}\,.$$

En utilisant en particulier le fait que

$$|\xi\eta\zeta\,\ldots|^p \leq \left[\frac{|\xi|^p+|\eta|^p+|\zeta|^p+\cdots}{n}\right]^n\,,$$

cette dernière inégalité implique

$$|\xi\,\eta\,\zeta\,\ldots| \;<\; \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta} \frac{n^{-\frac{n}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha}\,2^{-\frac{2\beta}{p}}\,\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}}\;|\Delta| \;<|\Delta|\,.$$

De plus, Minkowski remarque que le produit $|\xi\,\eta\,\zeta\,\ldots|$ est un entier supérieur ou égal à 1 car x, y, z, … ne sont pas tous nuls[177]. Après avoir élevé au carré il en déduit donc

$$1 \;<\; \left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta} \frac{n^{-\frac{n}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha}\,2^{-\frac{2\beta}{p}}\,\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}}\right\}^{2}\;|D| \;<\; |D|\,.$$

Minkowski interprète ensuite ces deux inégalités. D'abord, laissant de côté le terme du milieu, l'inégalité $|D|>1$ lui permet de démontrer un résultat qui avait été conjec-

[175] Minkowski 1891a p.210. Pour $x>0$, la fonction gamma est définie par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

[176] En termes actuels, il suffit de prendre pour ξ une forme linéaire dont les coefficients sont les éléments d'une base de l'anneau des entiers du corps qui est un $\mathbb{Z}$-module.

[177] Il s'agit en effet en terme moderne de la valeur absolue de la norme d'un entier algébrique non nul.

turé par Leopold Kronecker

> « chaque discriminant contient des nombres premiers comme facteurs[178]. »

Ensuite, Minkowski obtient des informations supplémentaires sur le discriminant grâce à l'autre inégalité

$$|D| > \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta} \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha} 2^{-\frac{2\beta}{p}} \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}}{n^{-\frac{n}{p}}\, \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \right\}^{2}.$$

Minkowski commence par remarquer que la borne précédente tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$[179] et donc

> « un nombre donné quelconque ne peut être discriminant que pour un nombre fini d'ordres[180] n[181]. »

La minoration donnée pour $|D|$ dépend du paramètre p qui est un entier supérieur ou égal à 1. Minkowski note que cette minoration est en fait optimale lorsque $p = 1$ et obtient ainsi le théorème suivant[182]

> « Le discriminant d'un corps algébrique, faisant partie de n corps conjugués dont 2β sont imaginaires et $n - 2\beta$ réels, est en valeur absolue toujours plus grand que
> $$\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\beta} \frac{n^n}{2.3\ldots n}\right]^2 . »$$

La lettre à Hermite se termine par quelques applications numériques de ce dernier résultat. Par exemple, le discriminant D d'un corps de nombres d'ordre $n = 2$ doit être > 4 ou < -2 et celui d'un corps d'ordre $n = 3$ est > 20 ou < -12.

Avec ces applications à la théorie des corps de nombres algébriques, Minkowski se place dans la continuité du travail effectué par Hermite sur le sujet

> « En suivant une voie indiquée dans vos admirables lettres à Jacobi, je tirerai du théorème que je viens d'exposer plusieurs conclusions fondamentales sur les nombres algébriques[183]. »

Dans son travail sur les nombres algébriques, Hermite s'était placé du point de vue des racines des équations polynomiales. La notion de corps de nombres est introduite par Dedekind dans les suppléments des *Vorlesungen* de Dirichlet. Il est remarquable

[178] Minkowski 1891a p.211.
[179] On peut le vérifier en utilisant la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis le fait que la fonction $\Gamma(x)$ est équivalent en $+\infty$ à $\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}$. Voir par exemple Artin 1964.
[180] L'ordre d'un corps chez Minkowski est ce qui est maintenant appelé son degré.
[181] Minkowski 1891a p.211.
[182] Il utilise aussi le fait que pour un entier naturel n, $\Gamma(n+1) = n!$.
[183] Minkowski 1891a p.210.

que Minkowski utilise ce vocabulaire des corps dans ce contexte dès 1891, car cette approche reste marginale jusqu'à la publication du *Zahlbericht* de Hilbert en 1897. Notons que l'expression *théorie algébrique des nombres* employée pour désigner le domaine de recherche ouvert par le *Zahlbericht* est plus tardive, *Algebraische Zahlentheorie* est utilisé par Landau en 1927 dans ses *Vorlesungen*[184].

Nous avons noté que cette lettre à Hermite est présentée par Minkowski comme un résumé de son article publié en 1891 dans le *Journal de Crelle*. Cependant quelques différences peuvent être remarquées. En particulier, lorsqu'il s'adresse à Hermite, Minkowski n'explique pas les méthodes géométriques qu'il a utilisées dans son travail. Il le précise dès le début de sa lettre

> « La méthode géométrique de mon travail, traduite en langue purement analytique, conduit à ce théorème susceptible d'une application très étendue[185] ».

Pourtant dans son article, bien que l'expression « Geometrie der Zahlen » n'apparaisse pas encore, nous pouvons commencer à voir émerger le principe géométrique qui sera à la base d'un théorème fondamental de la géométrie des nombres. Cette idée géométrique est élaborée afin d'étudier les minima des formes quadratiques.
Minkowski reprend la représentation géométrique des formes quadratiques définies positives élaborée par Gauss mais la généralise aux formes de n variables. Tout comme Gauss, il interprète la notion d'équivalence entre ces formes à l'aide du réseau de points obtenu avec les valeurs prises par la forme sur les entiers et des systèmes de parallélépipèdes engendrant ce même réseau de points. C'est ce que Minkowski appelle la « anschauliche Auslegung des Aequivalenzbegriffs[186] ». Ceci rappelé, Minkowski considère un tel système de parallélépipèdes dont les sommets donnent le réseau de points parmi lesquels une origine O est fixée. Si f est la forme représentée par ce réseau alors pour des entiers $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = OP^2 ,$$

où P est un point du réseau. Si M désigne le minimum de f pour des entiers $x_1, x_2, \dots, x_n$ non tous nuls, cela implique que $\sqrt{M}$ est la distance minimale entre l'origine O et un autre point du réseau, ou ce qui est la même chose, entre deux points quelconques du réseau. Minkowski considère alors des hypercubes de côté $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{n}}$ centrés en tous les points du réseau[187] (voir la figure 1.5 [188]). Les sommets d'un tel hypercube

[184] Voir Goldstein et Schappacher 2007b p.91.
[185] Minkowski 1891a p.210.
[186] « l'interprétation visuelle du concept d'équivalence », Minkowski 1891b p.288.
[187] Voir aussi Hancock 1964 vol.I, p.311-312.
[188] Opolka et Scharlau 1985 p.157.

sont ses points les plus éloignés de son centre et la distance entre ce centre et les sommets est $\frac{\sqrt{M}}{2}$. Ainsi deux hypercubes ne peuvent se rencontrer que sur un de leurs sommets et l'ensemble des hypercubes ne remplit donc pas tout l'espace contrairement aux parallélépipèdes du réseau.

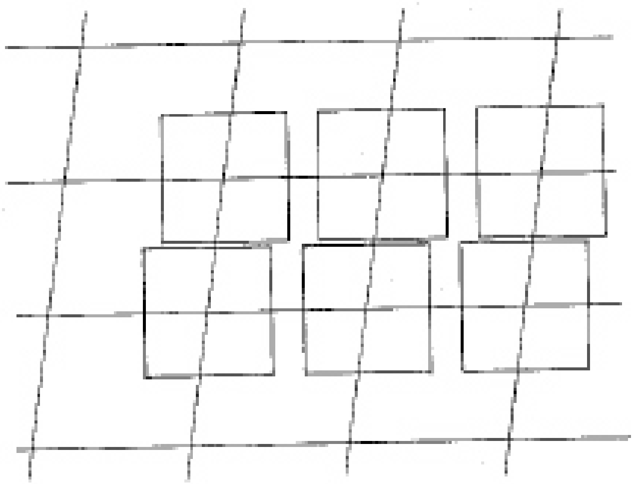


FIG. 1.5 – Hypercubes centrés sur les points du réseau

Si Δ désigne le discriminant de f, le volume de chaque parallélépipède est $\sqrt{\Delta}$, la comparaison de ce volume à celui d'un hypercube donne :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{M}\right)^n < \sqrt{\Delta}, \quad \text{et donc} \quad M < n\sqrt[n]{\Delta}\,.$$

Cette borne obtenue par Minkowski[189] constitue déjà un résultat non trivial pour l'époque car elle est meilleure que celle qu'avait donné Hermite et qui était alors la référence sur ce sujet[190]. Minkowski ne s'arrête cependant pas à ce résultat et montre qu'avec une petite modification de sa méthode il peut arriver à une estimation encore meilleure.

Dans le raisonnement précédent, Minkowski remplace les hypercubes par des sphères de rayon $\frac{\sqrt{M}}{2}$. La suite de la démonstration ne change pas : ces sphères ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière et ne remplissent donc pas tout l'espace, leur volume[191] est

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\sqrt{M}\right)^n\,.$$

[189]Nous savons que Minkowski a démontré ce résultat dès 1889 grâce à la lettre à Hilbert du 6 novembre 1889 que nous avons déjà citée voir RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.38.

[190]Rappelons qu'Hermite avait obtenu $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ à la place du n.

[191]Pour le calcul du volume voir par exemple MARTINET 1996 p.52.

En écrivant que ce volume est plus petit que $\sqrt{\Delta}$, il vient

$$M \; < \; 4\, \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2}}\, \Delta^{\frac{1}{n}} \; .$$

Pour justifier que cette inégalité est meilleure que la précédente Minkowski utilise une approximation asymptotique pour la fonction Γ ainsi que l'égalité[192] $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, il obtient ainsi

$$M \; < \; \frac{2n}{\pi e}\, \sqrt[n]{n\pi e^{\frac{1}{3n}}}\, \sqrt[n]{\Delta} \; .$$

Comme $\frac{2}{\pi e} \approx 0,234\ldots$, cette estimation est bien meilleure que la précédente quand n tend vers $+\infty$.

Nous voyons donc bien que lorsqu'il écrit à Hermite, Minkowski fait le choix de laisser de côté les aspects géométriques de son travail qui sont pourtant très présents dans son premier article sur la géométrie des nombres. Dans un cas, ce sont des figures géométriques (hypercubes, sphères) qui varient pour obtenir des résultats différents, dans l'autre c'est le paramètre p dans la somme $|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p + \cdots$ qui est laissé libre (le cas des formes quadratiques étant celui où $p = 2$). Nous pouvons interpréter cela comme les premiers pas de Minkowski vers l'utilisation de distances générales. Nous reviendrons sur cette question qui est liée à la façon dont il envisage l'intervention de la géométrie.

1.3.1.2 Deux exposés sur la géométrie des nombres

Dans cette partie nous allons étudier la suite du développement de la géométrie des nombres à travers des textes issus de communications faites lors de deux conférences. Nous les avons regroupées car ces deux exposés ont en commun de ne pas être adressés *a priori* à des spécialistes de théorie des nombres.

Le premier de ces exposés est donné par Minkowski en 1891 à Halle lors de la 64^e réunion des naturalistes et des médecins. Un court rapport sur cette communication est publié en 1891 dans les comptes rendus de cette réunion[193].

Le deuxième est un texte de Minkowski lu par Felix Klein à l'occasion du Congrès international de mathématiques, qui s'est tenu à Chicago en 1893 en marge de l'*Exposition Universelle*[194].

[192] Voir Artin 1964 p.19.

[193] Minkowski 1891c.

[194] Pour des informations sur le déroulement des conférences lors de ce congrès voir Parshall et Rowe 1994 chapitre 7.

a) Le congrès des naturalistes et des médecins à Halle en 1891

Le rapport publié sur cette conférence de Minkowski est très court (moins de deux pages dans ses oeuvres complètes). Il est cependant intéressant d'une part parce qu'à notre connaissance, c'est la première fois que l'expression « Geometrie der Zahlen » apparaît dans un texte publié. Cet article a d'ailleurs aussi pour titre *Ueber Geometrie der Zahlen*. D'autre part, dans cet exposé, Minkowski fournit aussi une indication sur ce qui est pour lui au coeur de son travail et donc sur ce qui l'amène à appeler sa théorie la géométrie des nombres.
Il ouvre sa conférence de la manière suivante :

> « Wenn man für den Raum rechtwinklige Coordinaten einführt, so entsprechen den Systemen von drei ganzen Zahlen discrete Punkte, welche derart über den Raum versteut liegen, dass sie eine gewisse Nähe in Bezug auf jede beliebige Raumstelle erreichen. Den Inbegriff aller dieser Punkte mit lauter Coordinaten, die ganze Zahlen sind, neunt der Vortragende das dreidimensionale Zahlengitter ; unter dem Titel "Geometrie der Zahlen" begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung. Natürlich besitzt jede Aussage über die Zahlengitter einen rein arithmetischen Kern. Das Wort "Geometrie" erscheint aber durchaus am Platze im Hinblick auf Fragestellungen, zu welchen die geometrische Anschauung verhilft, und auf Untersuchungsmethoden, welche fortwährend durch geometrische Begriffe ihre Richtung angewiesen erhalten[195]. »

Au centre de l'étude de la géométrie des nombres se trouve donc la notion de réseau de points, mais ce qui constitue l'originalité de sa démarche pour Minkowski est que les propriétés arithmétiques de ces réseaux sont explorées au moyen de concepts géométriques. Un éclairage sur le type de concepts géométriques intervenant dans cette étude est donné ensuite. Il s'agit de considérer certains domaines dans l'espace contenant un point du réseau (l'origine) et d'étudier selon le volume de ce domaine ses propriétés par rapport au réseau.

[195] « Si on construit dans l'espace des coordonnées rectangulaires, alors le système de trois nombres entiers correspond aux points discrets qui sont situés de telle façon qu'ils atteignent un certain voisinage de n'importe quel lieu de l'espace. Le conférencier appelle l'ensemble de tous ces points dont les coordonnées sont des nombres entiers le réseau des nombres entiers de dimension 3 ; sous le titre "géométrie des nombres" il englobe des études géométriques sur le réseau des nombres entiers de dimension 3, sur ce qui lui correspond dans le plan et dans un sens plus large la généralisation des résultats de telles études aux espaces de dimension quelconque. Naturellement chaque affirmation sur le réseau des nombres entiers possède un noyau purement arithmétique. Mais le mot "géométrie" apparaît absolument approprié compte tenu des questions posées pour lesquelles l'intuition [nous reviendrons sur le mot *Anschauung* plus loin] géométrique joue un rôle et compte tenu des méthodes de recherches qui sont continuellement soumises et dirigées par des concepts géométriques. » Minkowski 1891c.

Minkowski illustre cette problématique par deux résultats allant dans cette direction de recherche.
Le premier concerne les corps convexes admettant l'origine du réseau comme centre. Si le volume d'un tel corps est supérieur ou égal à 2^3, alors il contient un autre point du réseau que l'origine.
Le second résultat concerne cette fois les corps que nous appelons en termes modernes étoilés par rapport à l'origine du réseau[196]. Si le volume de ce corps est inférieur ou égal à

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots ,$$

alors il est toujours possible de "déformer" le domaine de telle façon que son volume reste inchangé et qu'il ne contienne que l'origine comme point du réseau.
Des précisions sur ces deux résultats vont être données dans l'exposé fait à Chicago.

b) La conférence de Chicago de 1893

Cette conférence de Minkowski, intitulée *Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind*, est présentée par Klein en 1893 au congrès international de Chicago. Une traduction en français de Léonce Laugel est publiée en 1896 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, c'est elle que nous utilisons ici[197] pour décrire le contenu de ce texte.

Minkowski se place dans l'espace de dimension 3 et il considère le réseau des points à coordonnées entières. Il précise que les résultats qu'il va énoncer sont en fait valables en dimension n quelconque et que le cas général sera traité dans son livre à paraître *Geometrie der Zahlen*.
L'article commence par des rappels sur le volume qu'il juge être « la notion la plus importante en corrélation avec le réseau des nombres[198] ». Il reprend sur ce sujet le travail effectué par Camille Jordan[199]. Minkowski considère chaque point du réseau comme le centre d'un cube dont les faces sont parallèles aux plans des coordonnées et d'arête 1. Soient maintenant K un ensemble borné et p un point quelconque de l'espace, K^p_Ω désigne alors l'image de K par l'homothétie de centre p et de rapport Ω. Minkowski note ensuite a^p_Ω le nombre de cubes strictement inclus dans K^p_Ω et u^p_Ω le nombre de cubes qui contiennent au moins un point de K^p_Ω. Jordan a démontré que les quantités $\Omega^{-3}a^p_\Omega$ et $\Omega^{-3}u^p_\Omega$ convergent indépendament de p vers respectivement A et U qui sont

[196]Un corps $\mathcal{C}$ est étoilé par rapport à l'origine O si pour tout point x de $\mathcal{C}$, le segment $[O,\ x]$ est contenu dans $\mathcal{C}$.
[197]Minkowski 1896c.
[198]Minkowski 1896c p.394.
[199]Jordan 1892.

appelés volume intérieur et volume extérieur de K. Lorsque les volumes intérieur et extérieur coincident, K est dit de volume A.

Dans la deuxième partie, Minkowski présente ce qu'il conçoit comme la « généralisation de la définition de la longueur d'une ligne droite », c'est ce qu'il appelle une « distance radiale (Strahldistanz)[200] ». Une distance radiale est une fonction de deux points a et b, notée $S(ab)$ par Minkowski, qui vérifie les deux conditions suivantes :

1) Si $a \neq b$, $S(ab) > 0$ et si $a = b$, $S(ab) = 0$.
2) Si a, b, c, d sont quatre points tels que $a \neq b$ et $d - c = t(b - a)$ avec $t \geq 0$, alors $S(cd) = tS(ab)$.

Soit une origine O prise dans le réseau, à la distance radiale S est associée son « corps étalon (Eichkörper) » qui est l'ensemble des points u qui vérifient $S(Ou) \leq 1$.
Dans la plupart des applications où elles vont intervenir les distances radiales utilisées vérifient des conditions supplémentaires. Minkowski appelle ainsi « concordante (einhellig) » une distance radiale S telle que pour trois points quelconques a, b et c

$$S(ac) \ \leq \ S(ab) \ + \ S(bc) \ .$$

Le corps étalon associé à une distance radiale concordante est convexe[201]. La réciproque est aussi énoncée :

> « tout corps dont l'encadrement n'est nulle part concave et à l'intérieur duquel se trouve l'origine est corps étalon pour certaines distances radiales concordantes. »

Minkowski propose ensuite ce qu'il juge être l'exemple le plus simple de distance radiale concordante qu'il note $E(ab)$:

> « Par $E(ab)$ l'on désignera la moitié de l'arête du cube aux faces parallèles aux plans des coordonnées qui a pour centre a et dont l'encadrement passe par b. »

Cette définition géométrique signifie en termes analytiques que $E(ab)$ est égal au maximum de la différence des coordonnées des points a et b.
Des propriétés des distances radiales concordantes sont données sans les preuves pour lesquelles Minkowski renvoie à nouveau à son livre. D'abord une distance $S(ab)$ est une fonction continue des points a et b, de plus il existe des constantes positives g et G telles que

$$gE(ab) \ \leq \ S(ab) \ \leq \ GE(ab) \ ,$$

[200]Minkowski 1896c p.395.
[201]Minkowski parle de corps dont « l'encadrement est nulle part concave ».

pour tous les points a et b. Enfin, le volume du corps étalon associé à une distance radiale concordante existe et est noté I dans la suite. Les démonstrations de ces propositions ne sont pas détaillées, en revanche, Minkowski interprète géométriquement les constantes g et G. Le cube défini par l'inégalité $E(Ou) \leq \frac{1}{G}$ est inclus dans le corps étalon associé à la distance radiale S qui est lui même inclus dans le cube $E(Ou) \leq \frac{1}{g}$.
Une autre condition que vérifient les distances radiales utilisées par Minkowski est la réversibilité. Une distance radiale est « réversible (Wechselseitig) » lorsque pour tous les points a et b

$$S(ba) = S(ab) .$$

Comme pour la concordance cette dernière propriété est traduite géométriquement sur le corps étalon : celui-ci est symétrique par rapport à l'origine pour une distance radiale réversible[202].
Ayant mis en place les notions qui lui sont nécessaires, Minkowski peut alors énoncer et démontrer le théorème central de cet article.

Ce théorème, qui concerne les points du réseau dans un corps convexe symétrique par rapport à l'origine, est sans doute le résultat le plus connu de Minkowski en mathématiques. Mais il est surtout emblématique pour la géométrie des nombres car il est souvent considéré comme le point de départ de cette théorie

> « the "geometry of numbers", the subject created by Minkowski on the basis of his fundamental Theorem 37 and its generalization in space of n dimensions[203]. »

Minkowski démontre donc que pour S, une distance radiale concordante et réversible dont le volume du corps étalon associé est noté I, il existe « au moins un point q du réseau, différent de O, pour lequel on ait

$$S(Oq) \leq \frac{2}{\sqrt[3]{I}} . \text{ »}$$

Ce résultat n'est pas énoncé d'un seul tenant dans l'article, mais les hypothèses nécessaires sont précisées au fur et à mesure de la démonstration.
Minkowski commence par remarquer qu'il y a au moins un point r dans le réseau des entiers tel que $E(Or) = 1$, cela implique que $S(Or) \leq G$ (les constantes G et g sont définies comme ci-dessus). Soit maintenant M la distance minimale de l'origine O aux autres points du réseau ; alors en particulier $M \leq S(Or)$ et donc $M \leq G$. Comme un réseau est invariant par changement d'origine M est aussi la distance minimale entre

[202]En termes actuels, une distance radiale concordante et réversible est une distance induite par une norme. Ainsi le corps étalon correspond lui à la boule unité pour cette norme. Minkowski semble donc être un des premiers mathématiciens à avoir introduit ces notions.
[203]Hardy et Wright 1960 p.394.

deux points quelconques du réseau.
Pour deux points du réseau a et c, notons[204] A_a (respectivement A_c) le corps constitué des points u de l'espace pour lesquels $S(au) \leq \frac{M}{2}$ (respectivement $S(cu) \leq \frac{M}{2}$). Ces deux corps « ont en commun au plus des points de leurs encadrements ». En effet, si un point u appartenait à la fois à A_a et A_c alors

$$S(au) \leq \frac{M}{2} \qquad \text{et} \qquad S(cu) \leq \frac{M}{2} \, .$$

En utilisant la réversibilité et la concordance de la distance radiale S il vient

$$S(ac) \;\leq\; S(au) + S(uc) \;=\; S(au) + S(cu) \;\leq\; M \, .$$

Or compte tenu de la définition de M, $S(ac) \geq M$ et par suite $S(ac) = M$. Finalement $S(au) = S(cu) = \frac{M}{2}$, ce qui signifie bien que u est sur la frontière de A_a et de A_c.

Pour un entier naturel pair Ω, Minkowski construit ensuite les corps $A_{(x,y,z)}$ où x, y et z prennent toutes les valeurs entières $-\frac{\Omega}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{\Omega}{2}$. Il y a exactement $(\Omega+1)^3$ corps ainsi définis et leurs centres sont tous dans le cube donné par l'inégalité $E(Ou) \leq \frac{\Omega}{2}$.
De plus, si a est un point du réseau et u est tel que $S(au) \leq \frac{M}{2}$ alors $S(au) \leq \frac{G}{2}$, puis $E(au) \leq \frac{1}{2}\frac{G}{g}$. Ceci permet de montrer que tous les corps $A_{(x,y,z)}$ sont inclus dans le cube $E(Ou) \leq \frac{1}{2}(\Omega + \frac{G}{g})$. Le volume de ce dernier cube, qui est $(\Omega + \frac{G}{g})^3$, est donc plus grand que le volume total occupé par les $A_{(x,y,z)}$, ces corps étant disjoints et ayant chacun un volume égal à $\left(\frac{M}{2}\right)^3 I$, Minkowski obtient

$$\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3 \;\geq\; (\Omega+1)^3 \left(\frac{M}{2}\right)^3 I \, .$$

Lorsque Ω tend vers $+\infty$, cette dernière inégalité devient

$$1 \;\geq\; \left(\frac{M}{2}\right)^3 I \, .$$

Finalement, si q est un point du réseau tel que $M = S(Oq)$ cela entraine bien

$$S(Oq) \;\leq\; \frac{2}{\sqrt[3]{I}} \, .$$

Nous pouvons voir dans ce résultat l'étape supplémentaire franchie par Minkowski par rapport au travail qu'il présentait en 1891. Il utilisait alors des cubes, puis de sphères pour améliorer son estimation. Avec le théorème décrit ici, il a élucidé les

[204]Cette notation n'est pas utilisée par Minkowski.

conditions sur le domaine à considérer qui permettent à sa méthode de fonctionner, à savoir la symétrie par rapport à un point et la convexité, qui sont équivalentes du point de vue des distances radiales à la réversibilité et à la concordance. Le reste de la démonstration est similaire à celle de son article de 1891. D'ailleurs, il remarque qu'il avait dans un premier temps prouvé ce résultat pour des figures géométriques particulières (les ellipsoïdes).
Minkowski apporte enfin la confirmation que son travail est « inspiré par l'étude des travaux de Dirichlet et ceux de M. Hermite, sur les formes quadratiques[205] ».

Dans la suite de la conférence, Minkowski présente un certain nombre d'applications de ce théorème. La première concerne l'estimation de sommes du type $|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p$, où ξ, η et ζ sont des formes linéaires de trois variables. Il s'agit d'un thème déjà abordé dans la lettre à Hermite de 1891 mais au sujet duquel il donne ici un peu plus de détails. Dans ce qui suit les trois formes linéaires peuvent être soit toutes réelles, soit ξ est réelle et η, ζ sont à coefficients complexes et conjugués. Le déterminant D de ces formes est supposé différent de 0. Minkowski note K_p le corps défini par l'inégalité

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 .$$

Lorsque p est un réel supérieur ou égal à 1, K_p est un corps convexe dont le volume I_p est donné par Minkowski sans que le calcul soit détaillé

$$I_p = \frac{2^3}{\lambda_p^3\,|D|} ,$$

avec, dans le cas où les formes sont réelles,

$$\lambda_p^3 = \frac{3^{-\frac{3}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{3}{p}\right)}{\left|\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right|^3} ,$$

ou bien, quand deux formes sont à coefficients complexes,

$$\lambda_p^3 = \frac{2}{\pi}\,\frac{3^{-\frac{3}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\,2^{-\frac{2}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)} .$$

En appliquant le résultat vu précédemment, Minkowski obtient le théorème

« Lorsque $p \geq 1$, il existe toujours des nombres entiers x, y, z, qui ne sont

[205] Minkowski 1896c p.398.

pas tous nuls et pour lesquels on a

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_p |D|^{\frac{1}{3}} . \text{ »}$$

Il discute ensuite ce résultat en commentant les cas limites pour des valeurs du paramètre p, ce qui le conduit à énoncer le théorème suivant, qu'il obtient en faisant tendre p vers 0 :

> « Il existe toujours des nombres entiers, qui ne sont pas tous nuls et pour lesquels on a $|\xi\,\eta\,\zeta| < \lambda_1^3\,|D|$ et par conséquent *a fortiori* $< |D|$. »

En effet, $\left(\frac{|\xi|^p+|\eta|^p+|\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ converge vers la moyenne géométrique $\sqrt[3]{|\xi\,\eta\,\zeta|}$ lorsque p tend vers 0 et la quantité λ_p est croissante avec p.
Nous retrouvons bien dans le cas particulier de trois formes linéaires les estimations données dans la lettre à Hermite et Minkowski souligne à nouveau leur importance dans la théorie des nombres algébriques. En plus des applications à ce domaine qu'il indiquait déjà à Hermite en 1891, il signale que les théorèmes précédents lui ont permis de redémontrer les théorèmes de Dirichlet sur les unités complexes et celui sur la finitude du nombre des classes d'idéaux[206].

Après la théorie des nombres algébriques, Minkowski passe à des applications de son travail à l'approximation des nombres réels. Le problème auquel il s'intéresse est le suivant : étant donnés a et b deux réels, il s'agit d'approcher a et b par des rationnels de même dénominateur avec une erreur qui tend vers 0 quand ce dénominateur devient grand.
Pour cela soit $t > 0$, Minkowski va dans un premier temps appliquer son théorème au parallélépipède défini par les inégalités

$$-1 \leq x - az \leq 1 , \qquad -1 \leq y - bz \leq 1 , \qquad -1 \leq \frac{z}{t} \leq 1 .$$

[206] En termes actuels ces théorèmes s'énoncent de la manière suivante. Le premier donne la structure du groupe des unités d'un corps de nombres : si K est un corps de nombres avec r_1 plongements réels, $2r_2$ plongements complexes, et si $\mathcal{O}_K$ (respectivement $\mathcal{O}_K^\times$) désigne son anneau des entiers (respectivement son groupe des unités), alors

$$\mathcal{O}_K^\times = \mu \times E$$

où μ est le groupe des racines de l'unité de K et E est un groupe libre de rang $r = r_1 + r_2 - 1$.
Si maintenant $\mathcal{I}(K)$ est l'ensemble des idéaux fractionnaires de K, l'ensemble des idéaux fractionnaires non nuls $\mathcal{I}(K)^*$ est un groupe pour la multiplication des idéaux dont l'ensemble des idéaux principaux $\mathcal{P}(K)$ est un sous-groupe. Le groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}(K)$ est par définition le groupe quotient de $\mathcal{I}(K)^*$ par $\mathcal{P}(K)$, alors ce groupe $\mathcal{C}(K)$ est fini. Voir par exemple Duverney 1998; Samuel 2003.

Le volume de ce parallélépipède étant $2^3\,t$, le théorème donne l'existence de nombres entiers x, y, z non tous nuls tels que

$$|x - az| \;\le\; \frac{2}{\sqrt[3]{2^3\,t}}\,, \qquad |y - bz| \;\le\; \frac{2}{\sqrt[3]{2^3\,t}}\,, \qquad \left|\frac{z}{t}\right| \;\le\; \frac{2}{\sqrt[3]{2^3\,t}}\,.$$

Quitte à supposer $z > 0$, ce qui est toujours possible car le domaine utilisé est symétrique par rapport à l'origine, nous obtenons

$$0 \;<\; z \;\le\; t^{\frac{2}{3}}\,, \qquad |x - az| \;\le\; \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\,, \qquad |y - bz| \;\le\; \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\,.$$

Comme l'indique Minkowski, ce dernier résultat avait déjà été démontré par Kronecker pour des valeurs entières de t en utilisant le principe de Dirichlet[207].
Enfin, en éliminant t des deux dernières inégalités à l'aide de la première, nous arrivons à l'approximation simultanée de a et b suivante

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| \;\le\; \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{y}{z} - b\right| \;\le\; \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Minkowski prouve ensuite l'efficacité de sa méthode en montrant qu'il peut obtenir une meilleure approximation en considérant un autre domaine qu'un parallélépipède. Il utilise donc cette fois l'octaèdre défini par

$$|x - az| \,+\, \left|\frac{z}{t}\right| \;\le\; 1 \qquad \text{et} \qquad |y - bz| \,+\, \left|\frac{z}{t}\right| \;\le\; 1\,.$$

Le calcul du volume de cet octaèdre se ramène après un changement de variable de déterminant $\frac{1}{t}$ au calcul du volume du domaine

$$|X| + |Z| \;\le\; 1\,, \qquad |Y| + |Z| \;\le\; 1\,.$$

Ce volume est donné par l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \left(\iint_{|X|\le 1-|Z|,\,|Y|\le 1-|Z|} dX\,dY \right) dZ \;=\; \int_{-1}^{1} [2\,(1-|Z|)]^2\,dZ \;=\; \frac{2^3}{3}\,.$$

L'octaèdre considéré au départ a donc un volume égal à $\frac{2^3}{3}\,t$ et d'après le théorème de Minkowski, il existe des entiers x, y, z non tous nuls qui vérifient

$$|x - az| \,+\, \left|\frac{z}{t}\right| \;\le\; \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{3}\,t}} \qquad \text{et} \qquad |y - bz| \,+\, \left|\frac{z}{t}\right| \;\le\; \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{3}\,t}}\,,$$

[207]Si $n+1$ objets sont répartis dans n ensembles alors un de ces ensembles contient nécessairement au moins deux objets.

ou encore

$$|x - az| + \left|\frac{z}{t}\right| \leq \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad |y - bz| + \left|\frac{z}{t}\right| \leq \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique[208]

$$\left[|x - az|^2 \times \frac{2|z|}{t}\right]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2\,|x - az| + \frac{2|z|}{t}}{3} ,$$

ce qui implique

$$\left[|x - az|^2 \times \frac{2|z|}{t}\right]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \left[|y - bz|^2 \times \frac{2|z|}{t}\right]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Finalement, après simplification et en supposant $z > 0$, nous obtenons

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| \leq \frac{2}{3}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{y}{z} - b\right| \leq \frac{2}{3}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} ,$$

ce qui constitue bien une meilleure approximation.

Minkowski se trouve à nouveau ici dans la continuité du travail d'Hermite qui avait obtenu la borne $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}\, z^{3/2}}$ en utilisant son théorème sur le minimum des formes quadratiques et un raisonnement similaire au précédent[209].

Minkowski termine sa conférence en remarquant que son théorème sur les corps convexes peut être généralisé mais il ne donne pas plus de détails à cette occasion[210].

1.3.1.3 Une autre lettre à Hermite

Minkowski adresse une seconde lettre à Hermite[211] qui est cette fois publiée dans le *Bulletin des sciences mathématiques* en 1893. Il s'agit à nouveau d'une lettre assez courte (moins de 5 pages) que Minkowski présente comme un résumé de son livre et dans laquelle les résultats sont énoncés sans démonstration. Nous y retrouvons un certain nombre de résultats rencontrés dans les publications précédentes, nous insisterons donc davantage sur ceux qui apparaissent pour la première fois ou bien ceux qui sont énoncés de manière différente. Contrairement à la conférence de Chicago, les théorèmes

[208] Voir Hancock 1964 vol.I, p.192 qui traite le cas général.
[209] Goldstein 2007 p.388.
[210] Minkowski fait ici allusion au théorème sur les minima successifs.
[211] Minkowski 1893.

sont donnés ici dans le cas général (en dimension n quelconque) et Minkowski fait le choix, comme dans sa première lettre, de ne pas mettre en avant les aspects géométriques de son travail sur la géométrie des nombres.

Ce dernier point est bien illustré par le théorème sur les corps convexes qui est énoncé au début de la lettre et dont Minkowski propose une présentation assez différente de celle que nous avons vue. Minkowski commence par indiquer que

> « La plus grande partie du livre traite des fonctions φ à n variables x_1, x_2, …, x_n, qui, comme la racine carré d'une forme quadratique positive, satisfont aux conditions
>
> $$(A)\begin{cases} \varphi(x_1, x_2, .., x_n) > 0\,, \text{ si l'on n'a pas } x_1 = 0,\, x_2 = 0,\, \ldots,\, x_n = 0, \\ \qquad\qquad \varphi(0, 0, ..., 0) = 0\,, \\ \varphi(tx_1, tx_2, .., tx_n) = t\varphi(x_1, x_2, .., x_n), \;\; si \;\; t > 0, \end{cases}$$
>
> $$(B) \quad \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \leq \varphi(x_1, x_2, .., x_n) + \varphi(y_1, y_2, .., y_n),$$
>
> $$(C) \quad \varphi(-x_1, -x_2, ..., -x_n) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\ .\ »$$

Cette définition des fonctions φ remplace ici toutes les notions développées dans l'article précédent à propos des distances radiales. Nous reconnaissons dans les conditions (A), (B) et (C) respectivement la définition d'une distance, la concordance et la réversibilité mais Minkowski n'emploie pas ce vocabulaire géométrique, ne fait pas non plus mention des corps étalons et se contente de cette caractérisation analytique. Dans le même ordre d'idées, comme exemple d'une telle fonction φ, il propose la fonction

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_\nu|\}\ ,$$

où ξ_1, ξ_2, … , ξ_n sont des formes linéaires à coefficients réels dont n ont un déterminant non nul. Après avoir justifié que « l'intégrale $\iint \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ étendue sur le domaine $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 1$ aura toujours une valeur déterminée », notée J, Minkowski passe à l'énoncé de son théorème :

> « Je démontre alors que l'on peut toujours trouver des nombres entiers x_1, x_2, … , x_n pour lesquels on ait
>
> $$\text{(I)} \qquad 0 \;<\; \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; \frac{2}{\sqrt[n]{J}}\ .\ »$$

La suite de la lettre est consacrée aux applications de ce théorème.
D'abord l'application (jugée la plus simple par Minkowski) qui concerne n formes linéaires ξ_1, ξ_2, …, ξ_n à coefficients réels et dont le déterminant est égal à ± 1. Sous ces

hypothèses,

> « on peut toujours donner à x_1, x_2, …, x_n des valeurs entières qui ne s'évanouissent pas toutes et de sorte que les valeurs absolues de ξ_1, ξ_2, …, ξ_n soient toutes ≤ 1 ».

En effet, comme le déterminant des formes est ± 1, l'intégrale $\iint \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ calculée sur le domaine défini par les inégalités

$$-1 \ \leq\ \xi_i\ \leq\ 1 \qquad (i = 1,\, 2,\ \ldots, n)\ ,$$

est égale à 2^3. L'application du théorème (I) donne alors bien le résultat annoncé.
Cet énoncé est immédiatement précisé par Minkowski. Il indique que les entiers x_1, x_2, …, x_n peuvent être choisis de telle sorte que l'inégalité précédente soit stricte sauf si « les formes ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, par une substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant ± 1, peuvent être transformées de manière que, abstraction faite de l'ordre, elles deviennent

$$x_1,\ a_{21}x_1 + x_2,\ \ldots,\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + x_n\ . \text{»}$$

Minkowski mentionne ensuite des applications déjà abordées dans la conférence de Chicago, le théorème de Dirichlet sur les unités complexes mais aussi l'approximation simultanée de nombres réels. Dans le cas général où il s'agit d'approcher $n-1$ réels, a_1, a_2, …, a_{n-1}, ce résultat d'approximation s'exprime de la manière suivante

> « on peut toujours trouver des nombres entiers x_1, x_2, …, x_{n-1}, x_n, sans diviseur commun et parmi lesquels x_n est positif, de sorte que les valeurs absolues de
>
> $$\frac{x_1}{x_n} - a_1\ ,\ \ \frac{x_2}{x_n} - a_2\ ,\quad \ldots\ ,\ \ \frac{x_{n-1}}{x_n} - a_{n-1}$$
>
> soient plus petites qu'une quantité positive ε choisie à volonté et en même temps
>
> $$<\ \frac{n-1}{n\, x_n^{\frac{n}{n-1}}}\ . \text{»}$$

Pour $n = 3$, la borne précédente devient $\dfrac{2}{3\, x_3^{3/2}}$ qui est bien celle obtenue dans la conférence donnée à Chicago.
Le théorème suivant est présenté comme une généralisation du théorème (I) (certainement celle annoncée dans cette même conférence) :

> « Pour toute fonction φ, satisfaisant aux conditions (A), (B), (C), on peut trouver n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant différent de zéro, de sorte que

l'on ait

$$\varphi(l_{11}, l_{21}, \ldots, l_{n1})\ \varphi(l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{n2})\ \ldots\ \varphi(l_{1n}, l_{2n}, \ldots, l_{nn})\ \leq\ \frac{2^n}{J}\ .$$

Le déterminant l_{hk} sera alors toujours $\leq 1.2 \ldots n$. »

Nous pouvons voir que le théorème (I) est bien une conséquence de ce résultat en nous rappelant que pour le théorème (I) la valeur $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la conclusion correspond au minimum de la fonction φ sur les points à coordonnées entières non toutes nulles, ainsi

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)^n\ \leq\ \varphi(l_{11}, l_{21}, \ldots, l_{n1})\ \varphi(l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{n2})\ \ldots\ \varphi(l_{1n}, l_{2n}, \ldots, l_{nn})\ \leq\ \frac{2^n}{J}\ ,$$

ce qui implique

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \leq\ \frac{2}{\sqrt[n]{J}}\ .$$

Minkowski énonce ensuite des résultats obtenus en appliquant ce nouveau théorème. Soient a_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 nombres réels dont la valeur absolue du déterminant, noté D, est différent de zéro, alors

« Il y aura ou n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant différent de zéro, de sorte que le système composé

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \ldots & l_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

satisfasse à toutes les n^n inégalités

$$\pm b_{h_1 1} b_{h_2 2} \ldots b_{h_n n} < D,\ (h_1 = 1, 2, \ldots, n; h_2 = 1, 2, \ldots, n; \ldots; h_n = 1, 2, \ldots, n),$$

ou n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant ± 1, de sorte que ce système composé après une permutation convenable des lignes, prenne une forme

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

satisfaisant aux conditions

$$
\begin{aligned}
c_{hk} = 0\,, \quad h > k\,,\\
0 \ < \ c_{11} \ \leq \ c_{22} \ \leq \ \ldots \ \leq \ c_{nn}\,,\\
0 \ \leq \ c_{hk} \ < \ c_{hh}\,, \quad h < k\,.\text{»}
\end{aligned}
$$

Les applications suivantes concernent la théorie de la réduction des formes quadratiques positives de n variables dont le déterminant est noté D. Le premier résultat donné par Minkowski à ce sujet dit qu'une telle forme

> « peut toujours, par une substitution à coefficients entiers et à déterminant différent de zéro $\left[\text{dont la valeur absolue est } < 2^n \dfrac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}\right]$, être transformée en une forme $\sum b_{hk}\, y_h\, y_k$, satisfaisant aux conditions
>
> $$0 < b_{11} \leq b_{22} \leq \cdots \leq b_{nn}\,, \qquad \pm 2 b_{hk} \leq b_{hh}\,, \quad (h<k),$$
> $$b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn} \ < \ \left[\frac{2^n\, \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}\right]^2 D\,.\text{»}$$

Bien que cela ne soit pas précisé par Minkowski, nous reconnaissons des conditions qui ont déjà été vues à propos du travail d'Hermite sur la réduction. La constante $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ qu'obtenait Hermite est remplacée ici par $\left[\frac{2^n\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}\right]^2$.

Le théorème suivant traite toujours de la réduction des formes quadratiques positives et il s'agit à nouveau d'une amélioration d'un procédé de réduction proposé par Hermite. Cette fois, Minkowski fait explicitement référence au travail de son aîné sur ce thème et il précise qu'il est question de la dernière méthode de réduction qu'Hermite avait donnée dans ses lettres à Jacobi[212]. Si f est une forme quadratique positive de n variables, le travail d'Hermite entraîne que par une substitution à coefficients entiers et de déterminant ± 1, f peut se transformer en une forme $\sum b_{hk}\, y_h\, y_k$ qui vérifie les inégalités

$$\sum b_{hk}\, p_h\, p_k \ \geq \ b_{mm}\,,$$

où m est un entier compris entre 1 et n ; et où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers quelconques tels que le plus grand diviseur commun de $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$ soit égal à 1. Les inégalités précédentes donnent une infinité de conditions à vérifier sur la forme $\sum b_{hk}\, y_h\, y_k$. Minkowski démontre « que parmi ces inégalités on trouve un nombre fini dont dérivent toutes les autres. »

[212] Rappelons qu'Hermite avait proposé plusieurs théories de la réduction des formes quadratiques positives de n variables.

Pour une forme f, il y a plusieurs formes qui lui sont équivalentes et dont les coefficients vérifient les inégalités précédentes. Minkowski précise qu'il y en a en général 2^{n-1} qui se déduisent à partir d'une d'entre elles par les 2^n substitutions

$$y_1 = \pm z_1\,,\;\; y_2 = \pm z_2\,,\;\; \ldots\,,\;\; y_n = \pm z_n\;.$$

Si $\chi(\Delta)$ est le nombre de classes de formes quadratiques à coefficients entiers et de déterminant Δ, Minkowski déduit du théorème précédent que la somme

$$\chi(D+1) \;+\; \chi(D+2) \;+\; \cdots \;+\; \chi(D+d)$$

est équivalente à $\gamma\, D^{\frac{n-1}{2}}\, d$, avec

$$\gamma \;=\; \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\,\ldots\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2+3+\cdots+n}}\; S_2\, S_3\, \ldots\, S_n\;.$$

Dans la constante γ, S_h désigne la somme

$$1 \,+\, \frac{1}{2^h} \,+\, \frac{1}{3^h} \,+\, \frac{1}{4^h} \,+\, \cdots\,.$$

Pour terminer, Minkowski considère une fonction $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ continue qui vérifie la condition (A) de la définition des fonctions φ (ou les conditions (A) et (C)), alors

> « on peut toujours trouver n^2 quantités réelles a_{hk} à déterminant 1, de sorte que la relation
>
> $$0 \;<\; \psi(a_{11}y_1{+}\cdots{+}a_{1n}y_n,\,\ldots\,,a_{n1}y_1{+}\cdots{+}a_{nn}y_n) \;\leq\; \sqrt[n]{\frac{S_n}{J}}\;\left(\text{ou}\;\leq\;\sqrt[n]{\frac{2S_n}{J}}\right)$$
>
> ne soit vérifiée par aucun système de nombres entiers y_1, …, y_n. »

Si maintenant $\beta_n \sqrt[n]{D}$ désigne le minimum des formes quadratiques positives de déterminant D pour des valeurs entières des variables non toutes nulles. L'application de ce dernier théorème à la fonction $\psi = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ permet à Minkowski de justifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log\beta_n}{\log n}\right) = 1\;.$$

1.3.1.4 À propos des fractions continues

Le dernier article concernant la géométrie des nombres pendant cette période est publié en français dans les *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* en 1896 sous le titre « Généralisation de la théorie des fractions continues[213] ». Le manuscrit original en allemand est reproduit dans les oeuvres complètes de Minkowski[214], il est daté du 15 octobre 1894. Des théorèmes démontrés par Hermite sont à l'origine de la généralisation des fractions continues proposée. Mais nous allons voir que les fractions continues ne sont pas l'unique thème développé dans cet article.
Ce sujet peut sembler *a priori* éloigné des thèmes que nous avons rencontrés jusque là dans le travail de Minkowski. En fait, les fractions continues sont à l'époque une des méthodes importantes dans l'approximation des nombres réels par des rationnels, question qui fait partie des domaines d'application de la géométrie des nombres. Les fractions continues interviennent aussi en théorie des formes. Par exemple, des notions de réduction pour les formes quadratiques binaires indéfinies[215] $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sont fondées sur le développement en fraction continue de la racine $\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$ de l'équation $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$. Enfin, comme nous allons le voir, Minkowski utilise dans cet article son théorème sur les corps convexes.

Le texte de Minkowski commence effectivement par l'introduction d'une fraction continue $\frac{p_n}{q_n}$ qui dépend d'un paramètre $\Omega \geq 1$. Soit a le nombre réel qui doit être approché, a est supposé ne pas être un entier ni un demi-entier. Minkowski construit alors p_n et q_n en posant d'abord $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$, puis il note f_0 l'entier le plus proche de a et $p_1 = f_0$, $q_1 = 1$. Il suppose ensuite avoir construit ces suites jusqu'au rang n, il définit alors p_{n+1} et q_{n+1} de la façon suivante[216]

> « Désignons ensuite, pour $n \geq 1$ et tant que $p_n - aq_n \gtrless 0$, par ε_n le signe de $\frac{p_{n-1}-aq_{n-1}}{p_n-aq_n}$, quotient dont la valeur absolue sera désignée par $c_n + r_n$, c_n étant un nombre entier et r_n satisfaisant à la condition $0 \leq r_n < 1$; posons ensuite $s_n = c_n - \varepsilon_n \frac{q_{n-1}}{q_n}$ et posons, lorsque $r_n = 0$, $f_n = c_n$, mais lorsque $r_n > 0$,
>
> $$f_n = \begin{cases} c_n \\ \text{ou bien} \\ c_n + 1\,, \end{cases}$$

[213]Minkowski 1896b.
[214]Voir « Zur Theorie der Kettenbrüche », Minkowski 1911 p.278-292.
[215]Voir par exemple Cahen et Vahlen 1908 p.105.
[216]Minkowski 1896b p.41-42.

suivant que l'on a

$$\text{(A)} \qquad \frac{(s_n+1)^\Omega - 1}{1-(1-r_n)^\Omega} \quad \left.\begin{array}{c} > \\ \text{ou bien} \\ \leq \end{array}\right\} \quad \frac{s_n^\Omega - 1}{1 - r_n^\Omega}\,,$$

et enfin

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= f_n p_n - \varepsilon_n p_{n-1}\,, \\ q_{n+1} &= f_n q_n - \varepsilon_n q_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Ceci posé on aura

$$\frac{p_n}{q_n} = f_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{f_1 - \cfrac{\ddots}{f_{n-2} - \cfrac{\varepsilon_{n-1}}{f_{n-1}}}}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).\ \text{»}$$

Minkowski énonce ensuite des propriétés de la fraction continue ainsi définie. Puis il examine des cas particuliers du paramètre Ω.
D'abord, pour $\Omega = \infty$, il remarque que les termes de la suite $\frac{p_n}{q_n}$ sont en fait les réduites du développement en fraction continue ordinaire[217] de a (sauf éventuellement la première réduite).
Ensuite, pour $\Omega = 2$, Minkowski montre qu'il retrouve un développement en fraction continue donné par Hermite. Enfin, l'étude du cas où $\Omega = 1$ lui permet de démontrer que pour des nombres réels a et b

> « Lorsque aucune des équations $x - ay = 0$, $x - b = 0$, $x - ay - b = 0$ n'est résoluble en nombres entiers x, y, il existe donc une infinité de nombres entiers différents x, y pour lesquels on a
>
> $$y \gtrless 0\,, \qquad |x - ay - b| < \frac{1}{4\,|y|}\ . \text{ »}$$

[217] Si α est un nombre réel, le développement en fraction continue ordinaire de α s'obtient en écrivant $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, où $q_0 = [\alpha]$ (la partie entière de α) et $\alpha_1 > 1$. On répète ce procédé $\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, avec $q_1 = [\alpha_1]$ et $\alpha_2 > 1$ etc ... Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ l'algorithme s'arrête, sinon les réduites de la fraction continue convergent vers α et $\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$, voir par exemple Davenport 1952 p.89.

À nouveau Hermite avait déjà démontré un résultat de ce type dans un article[218] publié en 1880, mais la borne qu'il avait obtenue était $\sqrt{\frac{2}{27}}$, ce qui est une estimation moins bonne que la précédente. En fait, Hermite indique dans son article qu'il s'agit d'une question déjà abordée par le mathématicien Pafnuty Tchebychef qui avait donné l'inégalité $|x-ay-b| < \frac{1}{2\,|y|}$ mais son article publié en russe était un peu passé inaperçu[219].

Dans le paragraphe suivant, Minkowski considère la fonction

$$\varphi = \left|\frac{\xi}{\rho}\right|^{\Omega} + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right|^{\Omega} + \left|\frac{\zeta}{\tau}\right|^{\Omega} ,$$

où ξ, η et ζ sont des formes linéaires de trois variables, à coefficients réels et de déterminant Δ différent de 0. ρ, σ et τ sont des paramètres positifs. Il rappelle que pour $\Omega \geq 1$, l'inégalité $\varphi \leq 1$ définit un corps convexe, en particulier quand $\Omega = \infty$ ce corps convexe est un parallélépipède, noté (ρ, σ, τ), dont les faces sont données par

$$\xi = \pm\rho\,, \quad \eta = \pm\sigma\,, \quad \zeta = \pm\tau\,.$$

Ce cas, qui correspond au développement en fraction continue ordinaire, est le seul étudié dans la suite. Minkowski introduit ensuite du vocabulaire relatif à ces parallélépipèdes. Un (ρ, σ, τ) est libre lorsqu'il ne contient aucun point du réseau dans son intérieur[220]. Un (ρ, σ, τ) qui est libre et « qui perd cette propriété dans tous les cas où l'un de ses paramètres éprouve une augmentation si petite qu'elle soit, sera dit un parallélépipède extrême pour ξ, η, ζ. » Le théorème de Minkowski relatif aux corps convexes et aux points d'un réseau implique que pour un (ρ, σ, τ) libre, $\rho\sigma\tau \leq \Delta$. Minkowski énonce ensuite sans démonstration un théorème sur les parallélépipèdes extrêmes[221]. Il explique comment à partir d'un parallélépipède extrême pour ξ, η, ζ, on peut déterminer tous les autres, il appelle cet ensemble de parallélépipèdes extrêmes pour ξ, η, ζ une chaîne de parallélépipèdes.

L'algorithme précédent est ensuite appliqué à la théorie des corps de nombres algébriques. Pour un corps de nombres réel de degré 3 dont les corps conjugués sont aussi réels, Minkowski montre en effet comment sa méthode permet de déterminer deux unités de ce corps avec lesquelles toutes les autres peuvent être trouvées par multiplication

[218] Hermite 1880.

[219] Nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat qui joue un rôle important dans les développements ultérieurs de la géométrie des nombres. D'autres preuves seront données pour cette inégalité et de nombreuses recherches seront consacrées à sa généralisation à des produits d'un nombre plus important de formes linéaires non homogènes.

[220] Le réseau désigne ici les points à coordonnées entières.

[221] Des commentaires sur la démonstration de ce résultat ainsi que des références sont données dans Hancock 1964, vol.I, p.380.

et division. Il traite enfin l'exemple de la recherche des unités du corps engendré par $2\cos\frac{2\pi}{7}$.

1.3.1.5 Bilan sur ces premiers travaux

Nous l'avons dit, le théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans un domaine convexe symétrique par rapport à un point est un des résultats fondamentaux, voire peut être le résultat fondamental, de la géométrie des nombres. Ces premiers travaux de Minkowski en géométrie des nombres permettent de se faire une idée sur la genèse et l'élaboration progressive de ce théorème. D'abord, la méthode conduisant à ce résultat est mise en oeuvre sur des domaines particuliers comme le cube ou la sphère dans l'article de 1891 qui concerne exclusivement les formes quadratiques. C'est confirmé en 1893 lors de la conférence de Chicago où Minkowski indique que son théorème a d'abord été découvert pour l'ellipsoïde. Dans un deuxième temps, il semble que Minkowski ait examiné de plus près propriétés des domaines considérés qui permettaient à sa méthode de fonctionner. Il s'est rendu compte que les hypothèses de symétrie et de convexité sont essentielles, ce qui le conduit à l'énoncé général de son théorème. Ce résultat devient alors indépendant des formes quadratiques qui ne sont qu'un cas particulier des fonctions distances qu'il étudie. Minkowski s'exprime à ce sujet dans une lettre à Hilbert[222] du 22 décembre 1890 :

> « Dagegen habe ich den von mir gegebenen Beweis für den Satz vom Minimum einer positiven quadratischen Form außerordentlich verallgemeinert, und bin dazu gekommen, daß der Vortheil speciell der quadratischen Formen ein sehr illusorischer ist, indem andere definite Formen (allerdings nicht gerade rationale) viel weitergehendere Folgerungen gestatten. So habe ich folgendes Resultat gefunden, welches durch Benutzung quadratischer Formen nicht gewonnen werden kann : Die Discriminante irgend eines Zahlkörpers, welcher aus einer ganzzahligen Gleichung mit $n-2\beta$ reellen und 2β complexen Wurzeln entspringt, ist dem absoluten Werthe nach immer

[222] « En revanche, j'ai extraordinairement généralisé la preuve que j'ai donnée du théorème sur le minimum d'une forme quadratique positive et suit arrivé [à la conclusion que] l'avantage des formes quadratiques est très illusoire, en ce que d'autres formes définies (bien entendu pas exactement rationnelle) permettent des conséquences bien plus étendues. Ainsi j'ai trouvé le résultat suivant qui ne peut pas être obtenu en utilisant des formes quadratiques ; le discriminant de n'importe quel corps de nombres, qui provient d'une équation à coefficients entiers avec $n-2\beta$ racines réelles et 2β racines complexes, est en valeur absolue toujours plus grand que

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\beta}\ \frac{n^{2n}}{(n!)^2}\ . \text{ »}$$

Lettre de Minkowski à Hilbert du 22 décembre 1890, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.41.

größer als

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\beta} \frac{n^{2n}}{(n!)^2} \; . \text{ »}$$

Cette citation permet de voir que Minkowski avait très certainement démontré son théorème à la fin de l'année 1890, il le cite dès 1891 dans la conférence de Halle, puis des énoncés plus précis sont donnés en 1893.

Nous avons pu aussi voir dans les articles précédents que Minkowski ne présente pas toujours de la même manière son travail sur la géométrie des nombres. En particulier, le théorème sur les convexes est parfois exposé en des termes purement géométriques et à d'autres occasions de façon plus analytique ou arithmétique. Si nous regardons par exemple les conférences de Halle et de Chicago, le vocabulaire employé est : réseau, volume, distance, corps étalon, symétrie et convexité. De plus, la distance radiale particulière $E(ab)$ est définie géométriquement (voir cette définition page 75), la deuxième condition dans la définition des distances radiales, $S(cd) = tS(ab)$ pour $d-c = t(b-a)$, est interprété géométriquement[223]

> « Cette relation doit être interprétée dans le sens du calcul barycentrique et signifie que les droites *cd* et *ab* ont même direction et que leurs longueurs (au sens ordinaire du mot) sont dans le rapport de $t : 1$. »

Dans l'application qu'il propose concernant l'approximation diophantienne, Minkowski utilise un parallélépipède puis un octaèdre. L'interprétation géométrique de cette méthode d'approximation simultanée de nombres réels par des rationnels n'est pas reprise dans la lettre à Hermite de 1893 où elle est pourtant énoncée. Cette différence de traitement se retrouve dans toute la correspondance adressée à Hermite dont nous avons parlé. Le vocabulaire utilisé par Minkowski dans ces lettres est plus spécialisé. Nous n'y trouvons pas le vocabulaire autour de la notion de distance radiale, mais ces dernières sont remplacées par les fonctions φ auxquelles Minkowski ne donne pas de nom particulier. De la même manière, la notion de réseau n'apparaît pas mais ce sont des points à coordonnées entières qui sont utilisés et les volumes des corps sont devenus des intégrales. Ces changements illustrent bien la traduction analytique de son travail que Minkowski dit lui même vouloir faire dans une des lettres à Hermite.

Une première explication pour ces choix différents d'exposition est suggérée par les publics auxquels s'adressent les communications dont nous venons de parler. Nous avons d'une part des conférences effectuées dans des cadres où Minkowski ne s'adresse pas nécessairement à des spécialistes de théorie des nombres. À Halle, il s'exprime devant le congrès des naturalistes et des médecins et à Chicago les interventions sont aussi prévues pour toucher un large public

[223] Minkowski 1896c p.395.

> « Strikingly modern and readable, the papers and lectures presented in Chicago seemed crafted to communicate with the widest possible audience. [...] If many of these mathematicians were specialists, they certainly knew how to avoid the standard pitfalls that often plague the expert when addressing a more general audience[224]. »

Il donne donc dans ces deux derniers cas un rôle pédagogique à la géométrie. Présenté en termes géométriques son travail doit être plus simple et accessible. C'est une idée que nous trouvons aussi chez Felix Klein. Par exemple en 1893, lorsque ce dernier commente son traitement géométrique de la composition des formes quadratiques binaires c'est la simplicité et la clarté qui sont mises en avant au sujet de la géométrie

> « les considérations géométriques à l'aide desquelles je traite ces questions y introduisent un degré de simplicité et de clarté si élevé que ceux qui ne sont pas familiers avec l'ancienne exposition ne concevront qu'avec peine que l'on ait regardé ce sujet comme si extraordinairement difficile et abstrait[225]. »

À l'inverse, Hermite est un spécialiste des sujets abordés par Minkowski. De plus, ces recherches en théorie des nombres appartiennent à une tradition liée à l'analyse et la géométrie n'intervient presque pas dans son travail. Hermite considère même la géométrie comme un domaine à part du reste des mathématiques

> « Les éléments des mathématiques présentent deux divisions bien tranchées : d'une part, l'Arithmétique et l'Algèbre ; de l'autre, la Géométrie[226]. »

Lorsqu'il s'adresse à Hermite, Minkowski choisit donc de se situer dans la continuité du travail du mathématicien français et préfère insister sur les aspects analytiques de sa théorie plus que sur la géométrie.

1.3.2 Description du livre *Geometrie der Zahlen*

1.3.2.1 Les différentes éditions

Le livre de Minkowski *Geometrie der Zahlen*[227] est publié pour la première fois en 1896. En fait, l'ouvrage est en préparation depuis plusieurs années, nous avons pu voir qu'il y fait de nombreuses fois références dans ces articles publiés entre 1891 et 1896. Sa correspondance avec Hilbert permet aussi de se rendre compte que la rédaction lui a demandé plus de temps que prévu et que la publication a été reportée à plusieurs reprises. Dans un passage d'une lettre datée du 30 août 1892 que nous avons déjà citée

[224] Parshall et Rowe 1994 p.313.
[225] Klein 1898 p.59.
[226] Hermite 1873.
[227] Minkowski 1896a.

(voir page 46), il annonce à son ami une publication prochaine. En juin 1893, il écrit encore

> « so muss ich dies schon zu Ende führen. Hoffentlich dauert es nicht mehr lange. Das letzte, was ich in mein Opus eingefügt habe, war ein Beweis für die periodische Entwicklung von quadratischen Irrationalzahlen in Kettenbrüche[228]. »

Il semble que ce soit son travail sur des questions touchant les fractions continues qui ne le satisfait pas et lui fait remettre la publication[229]. Il se résout finalement à publier, l'état de son travail en 1896 doit faire l'objet d'un premier fascicule

> « Wie ich nun jüngstens wiederum von Weber einen Mahnbrief erhielt mit dem Vorschlage, doch wenigstens das bisher Gedruckte zu publiciren, entschloss ich mich dazu und auch Teubner geht bereitwillig darauf ein, so dass jedenfalls noch in diesem Monat 256 Seiten des Buches als eine erste Lieferung erscheinen[230]. »

Minkowski a effectivement travaillé à la préparation du deuxième fascicule

> « Ich habe seit unserer Trennung eifrig an meiner zweiten Lieferung weitergearbeitet[231]. »

Cette seconde partie ne fut jamais publiée. D'après David Hilbert et Andreas Speiser[232], les recherches qui devaient apparaître dans ce fascicule se trouvent dans les articles numérotés XIII à XXI dans les oeuvres complètes de Minkowski[233].
La deuxième édition de *Geometrie der Zahlen* est publiée en 1910. Les deux éditions sont presque identiques, il est seulement ajouté dans la seconde une courte préface de Hilbert et Speiser, un avertissement de l'éditeur rédigé en 1893 et une annonce de la publication du premier fascicule datant de 1896, tous les deux rédigés par Minkowski. Des suppléments de 14 pages sont aussi ajoutés au dernier chapitre dont un index[234]. Le livre est édité à nouveau en 1953 par Chelsea Publishing Company[235]. Nous y retrouvons seulement l'annonce de Minkowski de 1896 ainsi que les suppléments à la fin

[228] « donc je dois bien conduire cela à bonne fin. Espérons que cela ne dure plus longtemps. La dernière chose que j'ai introduite dans mon opus était une preuve pour le développement périodique des irrationnelles quadratiques en fractions continues. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 2 juin 1893, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.51-52.

[229] Voir par exemple la citation page 47.

[230] « Comme j'ai encore reçu dernièrement une sommation de Weber avec la proposition de publier au moins ce qui a été imprimé jusqu'à présent, je m'y suis décidé et Teubner a accepté obligeamment si bien qu'en tout cas ce mois-ci 256 pages du livre paraissent en tant que premier fascicule. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 10 février 1896, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.77.

[231] « Depuis notre séparation, j'ai travaillé avec zèle au deuxième fascicule. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 22 juin 1900, Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.127.

[232] Voir la préface de Minkowski 1910.

[233] Minkowski 1911.

[234] Kjeldsen 2002 p.481.

[235] Minkowski 1953.

du livre, le texte est donc celui de 1910. Remarquons toutefois que la table des matières doit être celle de 1896 car les suppléments n'y figurent pas.

1.3.2.2 Un aperçu du contenu

Nous utilisons ici indifféremment les éditions de 1910 et 1953 de la *Geometrie der Zahlen* qui ont la même pagination. Le livre comporte cinq chapitres dans lesquels nous pouvons trouver les démonstrations qui ne sont pas toujours données dans les articles publiés précédemment.
Dans la description qui suit nous nous sommes aussi servi du livre *Development of the Minkowski Geometry of Numbers* de Harris Hancock[236]. La plus grande partie de cet ouvrage est en fait une traduction plus ou moins fidèle des travaux publiés de Minkowski, *Geometrie der Zahlen* y est en particulier repris dans son intégralité. Le tableau suivant indique dans quels chapitres du livre de Hancock nous pouvons retrouver les différentes parties de celui de Minkowski[237].

Geometrie der Zahlen, Minkowski	*Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, Hancock
Chapitre I	Chapitre II
Chapitre II	Chapitre III
Chapitre III	Chapitre IV
Chapitre IV, paragraphes 36 à 40	Chapitre V
Chapitre IV, paragraphes 41 à 44	Chapitre VI
Chapitre IV, paragraphe 45	Chapitre VII
Chapitre V, paragraphes 46 à 50	Chapitre XIII
Chapitre V, paragraphe 51	Chapitre XIV
Chapitre V, paragraphe 52	Chapitre XV
Chapitre V, paragraphes 53 à 54	Chapitre XVI
Chapitre V, paragraphes 55 à 57	Chapitre XVII

TAB. 1.1 – Correspondance entre les livres de Minkowski et de Hancock

Dans le premier chapitre qui a pour titre *Von den nirgends concaven Flächen*, Minkowski étudie de manière approfondie la notion de distance radiale $S(\mathfrak{ab})$ telle que

[236] HANCOCK 1964.

[237] Même si c'est très rare, Hancock s'écarte parfois du texte de Minkowski, donne quelques détails supplémentaires ou des applications numériques. La plus grande partie des ajouts sont faits dans des chapitres à part.

nous l'avons déjà rencontrée dans la conférence de Chicago. Il reprend en particulier l'exemple de la distance $E(\mathfrak{ab})$, appelée « die Spanne von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ », démontre à son sujet l'existence des constantes g et G vérifiant

$$gE(\mathfrak{ab}) \;\leq\; S(\mathfrak{ab}) \;\leq\; GE(\mathfrak{ab})$$

pour n'importe quelle distance radiale concordante. Il prouve la continuité des distances radiales concordantes simplement énoncée en 1893.
Les propriétés des corps étalons associés à des distances radiales sont aussi démontrées : symétrie, convexité[238], étude des plans tangents, caractérisation de l'intérieur, de la frontière et de l'extérieur... Minkowski montre des résultats sur les distances radiales mais aussi par exemple le théorème de Weierstrass en dimension n quelconque

> « Eine Punktmenge, welche in einem gegebenen Würfel mit endlicher Kante unendlich viele Punkte enthält, besitzt in dem Würfel mindestens eine Häufungsstelle. (Ein Theorem von Weierstrass.)[239] »

La fin du chapitre est consacré à l'étude de système d'inégalités linéaires. Le lien avec le reste du chapitre vient du fait que les plans tangents aux corps étalons sont donnés par des équations linéaires et séparent l'espace en deux demi-espaces qui sont donc caractérisés par des inéquations linéaires[240].

Le chapitre 2, *Vom Volumen der Körper*, commence par quelques résultats sur les fonctions continues, par exemple, en termes modernes, le fait qu'une fonction continue sur un ensemble fermé et borné de l'espace de dimension n est uniformément continue et qu'elle est bornée et atteint ses bornes. Minkowski fait ensuite le lien entre les distances radiales $S(\mathfrak{ab})$ et les fonctions φ rencontrées dans les lettres à Hermite (fonctions qui sont ici notées f)[241]. Il montre alors des propriétés du corps étalon lorsque la distance est continue, en particulier qu'il est alors fermé. Dans la suite, Minkowski s'intéresse au volume[242] des corps étalons associés à des distances radiales concordantes, il justifie l'existence de ce volume puis donne des propriétés du volume d'une réunion de corps étalons. Il traite ensuite l'exemple du calcul du volume de parallélépipèdes, puis la modification du volume d'un corps lorsqu'on lui applique une substitution linéaire. Toutes les démonstrations concernant le volume sont ici faites sans recours au calcul

[238] Minkowski parle de surface nulle part concave par rapport à un point, le terme convexe est réservé à la stricte convexité.
[239] « Un ensemble de points qui contient une infinité de points à l'intérieur d'un cube donné de côtés finis possède à l'intérieur du cube un point d'accumulation (Un théorème de Weierstrass) », Minkowski 1910 p.5-6.
[240] Pour une étude détaillée de cette fin de chapitre voir Kjeldsen 2002 p.483-486.
[241] Minkowski 1953.
[242] La notion de volume que Minkowski utilise est celle que nous avons rencontrée dans la conférence de Chicago.

intégral, Minkowski encadre les corps qu'il étudie par des hypercubes.

Le troisième chapitre est consacré au théorème sur les points d'un réseau dans un domaine convexe et symétrique par rapport à un point. Il appelle réseau (« Zahlengitter ») tout système de points x_1, x_2, … , x_n où les x_i sont des nombres entiers. Il énonce et démontre ensuite son théorème, la présentation est assez proche de celle faite à l'occasion de la conférence de Chicago. Mais il remarque que le résultat peut être interprété analytiquement,

> « Diesen Sätzen kann die folgende, rein analytische Fassung gegeben werden[243] ».

Il reprend alors le théorème tel que nous l'avons vu dans la lettre à Hermite. Il étudie ensuite des cas limites du théorème. Par exemple, si M désigne la distance radiale minimale entre deux points quelconques dans le réseau, Minkowski s'intéresse aux points du réseau se trouvant sur la frontière des corps définis par une inégalité du type

$$S(\mathfrak{a}u) \;\leq\; M\ ,$$

où $\mathfrak{a}$ appartient au réseau, soit A le nombre de ces points. Il montre d'abord que

$$A \;\leq\; 3^n - 1$$

et que dans le cas d'un hypercube il y a égalité. Cette inégalité est ensuite affinée, pour des corps qui sont strictement convexes elle devient

$$A \;\leq\; 2^{n+1} - 2\ .$$

Après cela Minkowski revient au théorème et se demande pour quels corps l'égalité a lieu. Si nous reprenons la démonstration vue dans la conférence de Chicago, la démonstration conduit à l'inégalité

$$\left(\frac{M}{2}\right)^3 J \;\leq\; 1\ ,$$

où J est le volume du corps étalon. Le cas d'égalité correspond à la situation où les corps donnés par $S(\mathfrak{a}u) \leq \frac{M}{2}$ (pour $\mathfrak{a}$ dans le réseau) sont tous de volume 1, des propriétés et des caractérisations de ces corps sont alors proposées. D'abord, ils doivent remplir tout l'espace et avoir au moins $2^{n+1} - 2$ points du réseau sur leur frontière. Ils peuvent être aussi caractérisés par une condition sur les points du réseau situés sur leur frontière : pour être dans le cas d'égalité il faut et il suffit que les points du réseau sur la frontière appartiennent au moins à deux corps $S(\mathfrak{a}u) \leq \frac{M}{2}$. L'étude des plans tangents

[243] « À ces propositions peut être donnée la présentation suivante, purement analytique », Minkowski 1953 p.76.

aux corps précédents amène Minkowski à montrer en particulier que leur frontière est constituée d'au plus $2^{n+1} - 2$ faces[244].

Des applications du théorème énoncé au chapitre 3 sont données dans le quatrième chapitre. Dans les paragraphes numérotés de 36 à 40, Minkowski revient sur les applications concernant les formes linéaires. Il s'intéresse d'abord à ν formes linéaires de n variables et à coefficients réels $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ du type

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \, ,$$

n de ces formes sont supposées indépendantes. Il applique alors son théorème à la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ définie comme étant le maximum de $|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$ ce qui implique l'existence d'entiers $x_1, \ldots, x_n$ non tous nuls et tels que[245]

$$|\xi_1| \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}} \, , \qquad \ldots \, , \qquad |\xi_\nu| \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}} \, .$$

Ce résultat est ensuite appliqué à des formes linéaires particulières afin de retrouver les théorèmes relatifs à l'approximation simultanée de nombres réels par des rationnels déjà évoqués dans les lettres à Hermite[246]. Minkowski traite ensuite le cas où certaines des formes sont à coefficients complexes. Soient pour cela $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n formes linéaires de déterminant $\Delta \neq 0$ telles que les r premières $\xi_1, \ldots, \xi_r$ soient à coefficients réels et que les $2s$ dernières ($s > 0$ et $2s < n$) soient à coefficients complexes conjugués

$$\frac{\eta_1 + i\zeta_1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{\eta_1 - i\zeta_1}{\sqrt{2}} \, ; \, \ldots \, ; \frac{\eta_s + i\zeta_s}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{\eta_s - i\zeta_s}{\sqrt{2}} \, .$$

Comme le volume du domaine défini par les inégalités

$$|v_1| \leq 1 \, , \, \ldots \, , \, |v_n| \leq 1$$

est égal à $\dfrac{2^r \, (2\pi)^s}{|\Delta|}$, le théorème donne donc l'existence d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls tels que

$$|v_1| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{s}{n}} |\Delta^{\frac{1}{n}}| \, , \quad |v_2| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{s}{n}} |\Delta^{\frac{1}{n}}| \, , \quad \ldots \, , \quad |v_n| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{s}{n}} |\Delta^{\frac{1}{n}}| \, .$$

En suivant le modèle du cas où les formes sont toutes réelles, ce dernier résultat est utilisé afin de réaliser l'approximation simultanée de nombres complexes. Soient $b_h + i c_h$

[244] Ce résultat était déjà donné par Minkowski à Chicago dans le cas de la dimension 3, mais la preuve n'était pas détaillée.
[245] $J = \int dx_1 \ldots dx_n$, où l'intégrale est calculée sur le domaine $-1 \leq \xi_1 \leq 1, \ldots, -1 \leq \xi_\nu \leq 1$.
[246] Voir par exemple page 83.

$(h = 1, \ldots, m-1)$ les nombres complexes à approcher, il existe toujours m entiers complexes[247] $y_h + iz_h$ $(h = 1, \ldots, m-1, m)$ pour lesquels $y_m + iz_m$ est non nul, les modules

$$\left|\frac{y_h + iz_h}{y_m + iz_m} - b_h - ic_h\right| \qquad (h = 1, \ldots, m-1)$$

sont plus petits que n'importe quelle quantité positive fixée et pour tous les entiers h compris entre 1 et $m-1$:

$$\left|\frac{y_h + iz_h}{y_m + iz_m} - b_h - ic_h\right| < \frac{m-1}{m} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2m-1}{m} \frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2m-2}} \frac{1}{|y_m + iz_m|^{\frac{m}{m-1}}} .$$

Les applications suivantes concernent les sommes de puissances de formes linéaires, thème que nous avons déjà rencontré d'une part dans la lettre à Hermite de 1891 et d'autre part dans la conférence de Chicago pour le cas de trois formes. Dans ce qui suit nous gardons les formes v_i telles qu'elles ont été définies précédemment et pour un réel p, posons

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Minkowski commence par étudier f en fonction du paramètre p. Pour $p \geq 1$, cette fonction est une distance radiale et concordante, plus précisément la surface $f = 1$ est convexe (« nirgends concave ») pour $p \leq 1$ et strictement convexe (« überall convex ») si $p > 1$. f est une fonction croissante de $p > 0$, la suite K_p des corps étalons associés aux fonctions f est donc décroissante pour l'inclusion et leur volume J_p décroit aussi. Lorsque p tend vers 0, Minkowski remarque que f converge vers $\sqrt[n]{|v_1 v_2 \ldots v_n|}$ et si p tend vers $+\infty$ alors le corps K_p devient

$$|v_1| \leq 1\,, \quad |v_2| \leq 1\,, \quad \ldots\,, \; |v_n| \leq 1\,,$$

$K_{+\infty}$ est donc le corps déjà rencontré ci-dessus. De l'expression du volume de K_p, Minkowski déduit que pour $n > 1$, $p \geq 1$, il existe des entiers x_1, x_2, …, x_n non tous nuls et qui vérifient

$$\frac{|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p}{n} < \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \frac{n^{-\frac{n}{p}}\, \Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right)^r 2^{-\frac{2s}{p}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right)\right)^s} |\Delta|\right]^{\frac{p}{n}} .$$

Il y a une exception au résultat précédent quand $p = 1$, $s = 0$, $n = 2$ et si une des formes $\dfrac{v_1 \pm v_2}{(2|\Delta|)^{\frac{1}{2}}}$ a des coefficients entiers premiers entre eux, dans cette situation l'éga-

[247]C'est-à-dire que y_h et z_h sont des nombres entiers rationnels.

lité peut se présenter[248]. Minkowski commente enfin la borne obtenue pour $p = 2$ qui est le cas des formes quadratiques et fut le point de départ de ses recherches contenues dans ce livre[249].

Minkowski passe ensuite aux applications concernant la théorie des nombres algébriques et ce sont, pour la plupart, des résultats qui avaient été annoncés dans les travaux antérieurs de Minkowski. Il commence cette partie par quelques rappels sur cette théorie, puis expose quelques conséquences des théorèmes précédents sur les formes linéaires pour les corps de nombres. Il rappelle d'abord que le discriminant D d'un tel corps est toujours divisible par un nombre premier[250], puis à l'aide de la borne trouvée pour la somme de puissances de formes linéaires il justifie que pour un corps de degré n ayant $2s$ corps conjugués imaginaires[251]

$$|D| > \left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \frac{n^n}{1.2\ldots n} \right)^2 .$$

il en déduit qu'un nombre D fixé ne peut être le discriminant de corps que pour un nombre fini de degré n. Une démonstration du théorème de Dirichlet sur les unités complexes est ensuite proposée.

Le chapitre se termine par un long paragraphe dans lequel il introduit les notions de parallélogramme libre (« frei ») et de parallélogramme extrême (« aüsserste »).
Soient $\xi = \alpha x + \beta y$ et $\eta = \gamma x + \delta y$ deux formes linéaires telles que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Minkowski note $\{\lambda, \mu\}$ le parallélogramme défini par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi \leq \lambda\,, \qquad -\mu \leq \eta \leq \mu$$

et il considère le réseau des nombres entiers. Un parallélogramme $\{\lambda, \mu\}$ qui ne contient aucun point du réseau dans son intérieur est dit libre. Un parallélogramme libre $\{\lambda, \mu\}$ qui perd cette propriété pour un petit accroissement de λ ou de μ est appelé extrême. Minkowski introduit aussi les chaînes de parallélogrammes ou de substitutions. Après avoir démontré des résultats sur ces notions, il les applique à différentes situations, d'abord aux fractions continues, ensuite à la question de l'équivalence et de la réduction des formes quadratiques binaires définies et indéfinies.

[248] Un exemple du cas d'égalité est proposé dans Hancock 1964, vol.I, p.207.
[249] Minkowski 1953 p.122-123.
[250] Voir aussi la lettre à Hermite de 1891.
[251] Notons que dans ce passage Minkowski n'utilise pas le vocabulaire moderne de la théorie algébrique des nombres mais exprime ces résultats en termes de racines d'une équation.

Le thème central du dernier chapitre, *Eine weitere analytisch-arithmetische Ungleichung*, est la généralisation du théorème sur les points d'un réseau dans les domaines convexes déjà énoncée dans la lettre à Hermite de 1893 (voir page 83). Minkowski définit ce qui est maintenant appelé les minima successifs S_1, S_2, …, S_n pour une distance radiale S, ces quantités vérifient alors l'inégalité

$$S_1 S_2 \dots S_n \;\leq\; 2^n \;,$$

où J est le volume du corps étalon associé à la distance S. Dans un premier temps, une démonstration est donnée seulement dans le cas de l'ellipsoïde et l'étude de ce cas particulier lui permet de retrouver la finitude du nombre de classes de formes quadratiques à coefficients entiers définies positives pour un déterminant fixé. Un paragraphe est ensuite consacré à des lemmes sur la notion de volume nécessaires à la preuve du théorème. Il justifie par exemple qu'une intégrale du type

$$\int dx_1\, dx_2\, \dots\, dx_n \;,$$

évaluée sur le corps étalon d'une distance radiale, peut se calculer en intégrant d'abord par rapport aux m premières variables x_1, …, x_m, puis en intégrant par rapport aux dernières x_{m+1}, …, x_n. La démonstration du théorème suit ainsi que l'énoncé tel qu'il était donné dans la lettre écrite à Hermite. Le chapitre se termine par une discussion du cas d'égalité dans le théorème et avec des applications de ce résultat.

Nous avons déjà remarqué la place importante occupée dans la géométrie des nombres par le théorème des points d'un réseau dans les parties convexes symétriques par rapport à un point. L'organisation du livre de Minkowski confirme la place centrale de ce résultat dans cette théorie. L'importance du troisième chapitre dans lequel le théorème est exposé est aussi relevé dans le compte rendu du livre fait par Cahen dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* en 1897 :

> « Le troisième chapitre est intitulé : *Des corps qui dans leurs volumes contiennent plus d'un point à coordonnées entières.* C'est le plus important de l'Ouvrage et, pour ainsi dire, le chapitre fondamental[252]. »

Le livre *Geometrie der Zahlen* semble en effet construit autour de ce théorème et chaque partie a une fonction par rapport à lui. La première partie du livre (chapitres I et II) introduit les notions préliminaires nécessaires à la présentation du théorème. Le théorème lui-même est présenté dans le chapitre III avec sa démonstration et des discussions sur ces cas limites. Le chapitre suivant est consacré aux applications du théorème et enfin le dernier chapitre en donne un énoncé plus précis avec la notion de minima successifs.

[252] Cahen 1897 p.26.

1.3.3 La géométrie des nombres entre 1897 et 1909

Nous disposons pour la période 1897-1909 de différents types de sources pour rendre compte du travail de Minkowski sur la géométrie des nombres. D'abord, la rubrique *Zur Geometrie der Zahlen* de ses oeuvres complètes[253] recensent 8 publications entre 1899 et 1905. Dans ces articles Minkowski aborde en liaison avec la géométrie des nombres des thèmes comme la théorie algébrique des nombres, l'approximation, l'empilement de corps centrés en des points d'un réseau et la question de l'équivalence entre formes. D'autre part, Minkowski publie en 1907 un deuxième livre consacré à la géométrie des nombres dont le titre est *Diophantische Approximationen*. Cet ouvrage est issu de cours donnés à l'université de Göttingen durant le semestre d'hiver de l'année 1903-1904.

1.3.3.1 Géométrie des nombres et nombres algébriques

Trois des articles publiés par Minkowski entre 1897 et 1909 ont pour thème principal la théorie des nombres algébriques[254]. Dans l'un d'entre eux publié en 1900, il revient sur les unités dans un corps de nombres algébriques et démontre à nouveau le théorème de Dirichlet énoncé sous la forme suivante :

> « In einem Galois'schen Körper kann man stets eine solche Einheit angeben, daß eine jede Einheit dieses Körpers ein Product aus einer Einheitswurzel und aus Potenzen dieser Einheit und ihrer conjugirten Einheiten mit rationalen Exponenten ist[255]. »

Les deux autres articles qui concernent les nombres algébriques sont complémentaires. Ils sont publiés en 1899 puis en 1902 et ont pour point de départ un résultat de Lagrange permettant de caractériser les nombres réels qui sont algébriques de degré 2. Dans un mémoire publié en 1770 dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, Lagrange avait en effet démontré qu'un nombre irrationnel est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers si et seulement si son développement en fraction continue est périodique[256]. Reformulé dans le cadre de la théorie algébrique des nombres de la fin du XIX^{e} siècle, ce théorème fournit un critère permettant de savoir si un nombre irrationnel est algébrique de degré 2. Minkowski se propose de trouver un critère analogue pour déterminer si un nombre réel ou complexe est algébrique de degré un entier n donné. Il s'agit d'un problème qui avait déjà été envisagé par Hermite.

[253] Les autres parties de la classification des oeuvres complètes de Minkowski sont *Zur Theorie der quadratischen Formen, Zur Geometrie, Zur Physik, Rede auf Dirichlet.*

[254] Minkowski 1899, 1900, 1902.

[255] « Dans un corps galoisien on peut toujours trouver une unité telle que toute unité de ce corps est un produit d'une racine de l'unité et de puissances de cette unité et des unités conjuguées. » Minkowski 1900 p.93.

[256] Lagrange 1770 ou Lagrange 1868 p.603.

La première partie du mémoire de Minkowski de 1899 est consacrée à des définitions et des résultats préliminaires qui lui seront utiles dans l'énoncé et la démonstration de son critère. Il note ξ_1, ..., ξ_ν des formes linéaires homogènes de n variables x_1, ..., x_n et à coefficients réels ou complexes et qui ne peuvent s'annuler toutes que quand tous les x_i sont égaux à 0. Il définit ensuite la fonction f en posant

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{k=1,2,\ldots,\nu} |\xi_k(x_1, \ldots, x_n)| .$$

Nous reconnaissons une fonction déjà utilisée par Minkowski dans *Geometrie der Zahlen* et dans ses articles précédents[257], il justifie cependant à nouveau qu'elle vérifie les propriétés :

1) $f(-x_1, \ldots, -x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$,
2) $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t\, f(x_1, \ldots, x_n)$ quand $t > 0$,
3) il existe des constantes positives g et G telles que

$$g \max |x_k| \leq f(x_1, \ldots, x_n) \leq G \max |x_k| ,$$

4) pour deux systèmes quelconques de réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$,

$$f(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n) + f(b_1, \ldots, b_n) .$$

La nouvelle intervention de ces fonctions montre la place centrale qu'elles occupent dans la théorie de Minkowski.

Ce dernier démontre ensuite un résultat relatif aux substitutions. Pour un entier h compris entre 1 et n, si $p_1^{(h)}$, ..., $p_n^{(h)}$ sont des points indépendants d'un réseau et tels que la substitution P définie par

$$x_k = p_k^{(1)} z_1 + \ \ldots \ + p_k^{(n)} z_n \qquad\qquad (k = 1, \ldots, n)$$

est entière et de déterminant non nul. Il montre qu'il existe une substitution A de déterminant ± 1 telle que la substitution $P^{-1}A$ soit donnée par

$$\begin{cases} z_1 = \gamma_1^{(1)} y_1 + \gamma_1^{(2)} y_2 + \cdots + \gamma_1^{(n)} y_n \,, \\ z_2 = \qquad\quad \gamma_2^{(2)} y_2 + \cdots + \gamma_2^{(n)} y_n \,, \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ z_n = \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \gamma_n^{(n)} y_n \,, \end{cases} \qquad\qquad (\gamma_h^{(k)} = 0 \text{ si } h > k),$$

[257]Elle correspond à la notion actuelle de norme infinie.

où les coefficients $\gamma_h^{(k)}$ vérifient les conditions supplémentaires

$$0 < \gamma_h^{(h)} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \gamma_h^{(k)} < \gamma_h^{(h)} \;\; \text{si} \;\; h < k\,.$$

Minkowski définit ensuite une suite de minima associés à la fonction f. Il détermine d'abord un point du réseau $(p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)})$ tel que $f(p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)}) = F_1$ est la plus petite valeur possible prise par f sur les points du réseau. Soit ensuite $(p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(n)})$ un point du réseau indépendant du premier et tel que $f(p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(n)}) = F_2$ est la plus petite valeur pour les points du réseau indépendants de $(p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)})$. En itérant ce procédé, il arrive à un point $(p_n^{(1)}, \ldots, p_n^{(n)})$ du réseau tel que le déterminant des n points obtenus est non nul et tel que $f(p_n^{(1)}, \ldots, p_n^{(n)}) = F_n$ est la plus petite valeur possible pour les points du réseau indépendants des $n-1$ premiers. Les quantités F_1, F_2, …, F_n sont déterminées de manière unique et elles vérifient

$$F_1 \;\leq\; F_2 \;\leq\; \ldots \;\leq\; F_n\,.$$

Il rappelle que dans le cinquième chapitre de son livre *Geometrie der Zahlen*, il avait démontré que

$$F_1\,F_2\,\ldots\,F_n\,J \;\leq\; 2^n\,,$$

où J est le volume du domaine $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 1$. Dans cet article, il se contente de montrer l'inégalité[258]

$$F_1\,F_2\,\ldots\,F_n\,J \;\leq\; n!\,2^n$$

qui est l'objet du lemme I et qui est suffisante pour les applications qu'il a en vue. Dans le lemme II, il prouve en plus que la valeur absolue du déterminant $|p_k^{(h)}|$ est toujours inférieure ou égale à $n!$.

Dans la seconde partie de l'article, Minkowski va appliquer les résultats précédents pour donner un critère afin de reconnaître si un nombre est algébrique de degré n. Soit donc a un nombre réel ou complexe, son critère est fondé sur l'étude de la fonction

$$\xi = x_1 + x_2 a + \cdots + x_n a^{n-1}\,,$$

où x_1, x_2, …, x_n sont des entiers rationnels.
Minkowski introduit ensuite la notion de substitution appartenant à un entier r (« eine zur Zahl r gehörende Substitution[259] »), puis de chaîne de substitutions appartenant à a (« zu a gehörende Kette von Substitutionen[260] »).

[258] Minkowski 1899 p.68.
[259] Minkowski 1899 p.75.
[260] Minkowski 1899 p.75.

Soit pour cela r un entier rationnel, il considère les valeurs de ξ quand x_1, x_2, …, x_n sont compris entre $-r$ et r, le cas où $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ est exclus. Parmi ces valeurs de x_1, x_2, …, x_n, choisissons $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1)}$, …, $p_n^{(1)}$ tels que $|\xi|$ soit minimale et posons alors

$$\xi(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}) = \alpha_1 \,.$$

De plus, comme $|\xi(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)| = |\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$, le système

$$(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)})$$

est pris de telle sorte que le dernier des $p_k^{(1)}$ non nul est strictement positif. Soit ensuite $(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)})$ indépendant de $(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)})$ tel que

$$|\xi(p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)})| = |\alpha_2|$$

est minimale avec le dernier des $p_k^{(2)}$ non nul strictement positif, etc…
La substitution obtenue

$$x_k = p_k^{(1)} z_1 + p_k^{(2)} z_2 + \cdots + p_k^{(n)} z_n$$

est notée P. Son déterminant est différent de 0 et elle est construite de telle manière que

$$\xi P = \chi = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n \ ,$$

avec en plus $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_n|$. P est une substitution appartenant à r, une telle substitution n'est pas unique en général mais les quantités $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, …, $|\alpha_n|$ le sont.
Prenons $r_1 = 1$ et P_1 une substitution appartenant à r_1. Il se peut que P_1 appartienne aussi aux entiers suivants $2, 3, \ldots$ Si P_1 n'appartient pas à tous les entiers suivants, soit r_2 le plus petit entier auquel P_1 n'appartient pas, puis P_2 une substitution appartenant à r_2. Par suite, P_3 appartenant à r_3, P_4 appartenant à r_4 … sont déterminées. Minkowski impose en fait une condition supplémentaire pour la construction de la suite P_1, P_2, … Il est possible en effet que pour la substitution P_i certains coefficients, par exemple α_1, α_2, …, α_j, de l'expression $\chi_i = \xi P_i$ soient nuls. Dans ce cas, les colonnes de P_i qui correspondent aux coefficients égaux à 0 sont gardées dans les substitutions suivantes P_{i+1}, P_{i+2}, … Cette condition a pour effet de conserver les coefficients nuls dans les expressions χ_{i+1}, χ_{i+2}, …
La suite de substitutions P_1, P_2, P_3, …, qui peut être finie ou infinie, est appelée chaîne de substitutions appartenant à a par Minkowski. Il note aussi que la suite d'entiers r_1, r_2, r_3 … est uniquement déterminée par la donnée de a, puis démontre que toutes les substitutions d'une telle chaîne ont un déterminant dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $n!$.

La fin de l'article est consacrée à l'énoncé puis la démonstration du critère pour les nombres algébriques. Minkowski traite à part le cas où $n = 2$ et a est un nombre complexe. $a = b+ic$ est algébrique de degré 2 si et seulement si b et c^2 sont des nombres rationnels.
Si maintenant a est quelconque (le cas précédent étant exclu), posons $\sigma = 1$ lorsque a est réel, $\sigma = 2$ quand il est complexe et supposons enfin $n > \sigma$. En gardant les mêmes notations que précédemment, le critère proposé par Minkowski s'énonce de la manière suivante[261] :

1°) Si a n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à n, la chaîne de substitutions appartenant à a, P_1, P_2, ... ne s'interrompt jamais, les équations $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, ... sont toutes différentes et les coefficients de chaque forme χ_k sont non nuls.

2°) Si a est un nombre algébrique de degré n, la chaîne de substitutions appartenant à a, P_1, P_2, ... ne s'interrompt jamais, parmi les équations $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, ... il n'y en a qu'un nombre fini qui sont différentes et toutes les formes χ_k ont tous leurs coefficients non nuls.

3°) Si a est algébrique de degré $n - m$, avec $m > 0$ et $n - m > \sigma$, la chaîne de substitutions appartenant à a, P_1, P_2, ... ne s'interrompt jamais, s'il n'y a qu'un nombre fini des équations $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, ... qui sont différentes et s'il existe un indice k_0 à partir duquel les m premiers coefficients des formes χ_k sont égaux à 0 et les $n - m$ suivants sont non nuls.

4°) Si a est algébrique de degré σ, la chaîne de substitutions appartenant à a, P_1, P_2, ... s'interrompt après un nombre fini d'étapes.

Dans son article de 1902, Minkowski reprend la notion de chaîne de substitutions afin d'étudier le problème suivant :

> « Welche algebraische Zahlen besitzen analoge periodische Approximationen, wie sie die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades vermöge der Periodizität ihrer Entwicklungen in gewöhnliche Kettenbrüche aufweisen[262]. »

[261] Minkowski 1899 p.77-78.
[262] « Indiquer quels nombres algébriques possèdent des approximations périodiques analogues à celles des nombres algébriques réelles de degré 2 grâce à la périodicité de leur développement en fractions continues ordinaires. » Minkowski 1902 p.333.

Soit α un nombre algébrique de degré $n > \sigma$, où σ est défini comme dans l'article précédent. Minkowski considère une chaîne de substitutions $S_1, S_2, \ldots$ appartenant à α. À partir de cette chaîne de substitutions est construit une autre suite de substitutions $Q_1, Q_2, \ldots$ définie par les égalités

$$S_2 = S_1 Q_1\ ,\ S_3 = S_2 Q_2\ , \quad \ldots \quad S_{j+1} = S_j Q_j\ .$$

La chaîne $S_1, S_2, \ldots$ est alors dite périodique s'il existe des indices j_0 et p_0 tels que pour tout $j \geq j_0$, $Q_j = Q_{j+p_0}$. Dans la suite ce sont les nombres algébriques α qui admettent une chaîne de substitutions périodiques qui sont étudiés[263].
Minkowski donne dans un premier temps une condition nécessaire à l'existence d'une chaîne de substitutions périodique. Pour que α admette une chaîne périodique, il doit exister dans le corps engendré par α une unité ϑ telle que :

(i) sa valeur absolue est strictement inférieure à 1,

(ii) les conjugués de cette unité dans les corps conjugués correspondants (à l'exception de $\bar{\vartheta}$ dans le corps engendré par $\bar{\alpha}$ quand α est un nombre complexe) doivent être égaux en valeur absolue.

Il prouve ensuite que cette condition est en fait aussi suffisante ce qui l'amène à approfondir l'étude des cas où une telle unité existe dans le corps engendré par α. Il montre finalement que les conditions ne sont vérifiées que dans six cas différents qui sont donc les seules situations pour lesquelles il existe une chaîne de substitutions périodique pour α. Ces cas sont les suivants :

a) α est réel et $n = 2$,

b) α est réel, $n = 3$ et le corps engendré par α a deux corps conjugués qui sont complexes,

[263]Là-encore cette manière d'aborder le problème est très proche du programme de Hermite pour les nombres algébriques, voir Goldstein 2007 p.391-394 et en particulier la citation de 1880 de Léon Charve, élève de Hermite, à la page 393 :

> « On sait que, si l'on développe en fraction continue une irrationnelle du second degré, le calcul est périodique. Cette périodicité constitue une propriété très remarquable des racines des équations du second degré, et elle peut même servir de définition à ces irrationnelles. Or la théorie des fractions continues est liée étroitement à la théorie des formes quadratiques binaires, de sorte que le développement en fraction continue d'une racine α d'une équation du second degré est identique à la recherche des minima successifs de l'expression $(x-\alpha y)^2+\Delta(x-\beta y)^2$, où β désigne la deuxième racine de l'équation considérée et Δ une quantité qu'on fait croître positivement de 0 à ∞. D'un autre côté, la recherche de ces minima revient à la réduction de la forme binaire
> $f = (x - \alpha y)^2 + \Delta(x - \beta y)^2$ pour toute valeur de Δ. En opérant cette réduction, on trouve alors que la suite des formes réduites équivalentes à f pour toute valeur de Δ s'obtient par un calcul périodique. On est alors conduit à se demander si quelque mode d'approximation des quantités ne donnerait pas une périodicité analogue pour les irrationnelles d'un degré supérieur au second. C'est la considération des formes quadratiques qui conduit à cette extension de la théorie des fractions continues, et donne ces nouvelles méthodes d'approximation. »

c) α est complexe et $n = 3$,

d) α est complexe, $n = 4$ et le corps engendré par α a tous ses corps conjugués complexes,

e) α est complexe, $n = 4$ et le corps engendré par α possède un sous-corps réel de degré 2,

f) α est complexe, $n = 6$ et le corps engendré par α possède un sous-corps réel de degré 3 et deux sous-corps complexes conjugués entre eux.

Pour terminer, Minkowski se pose le problème de déterminer une chaîne de substitutions périodique (quand elle existe) connaissant α mais pas nécessairement ses conjugués. Pour α réel et $n = 2$, c'est une question résolue par le développement en fraction continue de α. Minkowski propose ici une méthode lorsque α est un nombre complexe de degré 3. Il justifie en fait que dans cette situation le procédé donné pour construire une chaîne de substitutions conduit à une chaîne qui est périodique.

Ce travail de Minkowski sur la théorie des nombres algébriques est en fait lié à celui qu'il effectue dans la même période sur des questions d'approximations.

1.3.3.2 Géométrie des nombres et approximation

Nous avons regroupé deux articles de Minkowski sur ce thème de l'approximation[264] publiés tous les deux en 1901. Le premier, daté de 1899 alors que Minkowski est à Zürich, est publié en allemand. Il contient des résultats sur les formes linéaires homogènes et non homogènes qui sont appliquées à l'approximation d'un nombre réel. Le point de vue adopté est celui du développement en fraction continue et ce travail se rattache ainsi aux articles précédents sur les nombres algébriques. Le second en français est beaucoup plus court car les résultats sont énoncés sans démonstration. Minkowski y expose des théorèmes sur l'estimation des formes linéaires qui sont cette fois appliquées à l'approximation simultanée de deux réels ou bien à l'approximation de quantités complexes dans des corps de nombres algébriques particuliers.

a) Approximation et fractions continues

Dans l'article intitulé *Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen*, Minkowski s'intéresse aux développements en fraction continue d'un réel a pour lesquels les numérateurs partiels sont ± 1, les dénominateurs partiels sont des entiers positifs et les réduites $\frac{x}{y}$ vérifient les conditions :

1°) x et y sont premiers entre eux,

[264] Minkowski 1901b,a.

2°) $y > 0$,
3°) $|(x - ay)\,y| < \dfrac{1}{2}$.
a est supposé ici ne pas être un demi-entier. Ces conditions avaient déjà été données par Minkowski dans son article de 1896 sur ce sujet, mais il note qu'il n'avait pas alors remarqué qu'elles caractérisent complètement le développement obtenu[265]. Tout le début de l'article concerne des théorèmes sur le produit de deux formes linéaires à coefficients réels $\xi = \alpha x + \beta y$ et $\eta = \gamma x + \delta y$. Ces résultats sont dans un deuxième temps appliqués aux deux formes particulières $x - ay$ et y afin d'approcher le réel a.

Dans le théorème I, Minkowski démontre que si les coefficients des formes vérifient $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, il existe des entiers x, y, non tous deux nuls, tels que[266]

$$|\xi\,\eta| \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

Il précise aussitôt les cas d'égalités dans cette dernière inégalité : si le produit $\xi\eta$ n'est pas équivalent à XY ou à $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ alors il existe des entiers x, y, non tous deux nuls, pour lesquels $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ et

$$|\xi\,\eta| \;<\; \frac{1}{2}\,.$$

Les formes équivalentes sont par définition celles qui sont obtenues à partir de $\xi\eta$ par des substitutions à coefficients entiers $x = pX + p'Y$, $y = qX + q'Y$ et à déterminant ± 1.
Minkowski choisit un système de coordonnées dont l'origine est notée O. Pour un point A de coordonnées $(x = p, y = q)$, A_0 désigne le point dont les coordonnées sont

$$(x = -p, y = -q).$$

Les points du réseau sont ceux de coordonnées

$$(\xi = \alpha x + \beta y, \eta = \gamma x + \delta y)$$

avec x et y des nombres entiers. Soient maintenant ρ et σ des paramètres positifs, les points $R(\xi = \rho, \eta = 0)$, $R_0(\xi = -\rho, \eta = 0)$, $S(\xi = 0, \eta = \sigma)$, $S_0(\xi = 0, \eta = -\sigma)$ sont les sommets d'un parallélogramme centré en O dont les diagonales sont les droites d'équation $\xi = 0$ et $\eta = 0$. Ce parallélogramme, noté $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$, est aussi défini par

[265] C'est le cas où $\Omega = 1$ dans MINKOWSKI 1896b p.44.
[266] MINKOWSKI 1901b p.92.

l'inégalité

$$\left|\frac{\xi}{\rho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leq 1 .$$

Les paramètres ρ et σ sont ensuite choisis de telle sorte que le seul point du réseau à l'intérieur du parallélogramme $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ soit O et qu'il ait un point $A(x = p, y = q)$ appartenant au réseau sur sa frontière. Par symétrie par rapport à l'origine, le point $A_0(x = -p, y = -q)$ est aussi un point du réseau sur la frontière de $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$, il est donc possible de supposer pour A que $\eta \geq 0$. Posons alors pour A, $\xi = \varepsilon\lambda$ et $\eta = \mu$, où $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\varepsilon = \pm 1$.
Le segment OA qui est inclus dans $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ ne peut contenir des points du réseau autres que O et A. Par conséquent, p et q sont premiers entre eux et il existe donc deux entiers r et s tels que $ps - qr = \varepsilon$. Minkowski effectue le changement de coordonnées défini par

$$x = p\bar{X} + rY , \qquad y = q\bar{X} + sY .$$

En posant $\bar{\lambda} = \varepsilon(\alpha r + \beta s)$ et $\bar{\mu} = \gamma r + \delta s$, il obtient

$$\varepsilon\xi = \lambda\bar{X} + \bar{\lambda}Y \qquad \text{et} \qquad \eta = \mu\bar{X} + \bar{\mu}Y .$$

Or le déterminant de ces deux formes est égal à

$$\begin{vmatrix} \lambda & \bar{\lambda} \\ \mu & \bar{\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon(\alpha p + \beta q) & \varepsilon(\alpha r + \beta s) \\ p\gamma + \delta q & \gamma r + \delta s \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = \varepsilon \times 1 \times \varepsilon = 1 ,$$

ce qui permet d'exprimer $\bar{X}$ et Y en fonction de ξ et η, ainsi

$$\bar{X} = \varepsilon\xi\bar{\mu} - \bar{\lambda}\eta , \qquad Y = \lambda\eta - \mu\varepsilon\xi .$$

De plus, comme le changement de variables est à coefficients entiers et de déterminant $\varepsilon = \pm 1$, les points du réseau (x, y) correspondent à des points du réseau $(\bar{X}, Y)$. En particulier, la droite OA est la droite d'équation $Y = 0$ et le point A est donc le point du réseau qui correspond à $Y = 0$ et $\bar{X} = 1$. Tous les points du réseau situés sur cette droite sont obtenus pour $\bar{X} = \ldots, -1, 0, 1, 2 \ldots$ et sont à la distance OA les uns des autres. Les autres points du réseau sont répartis sur les droites parallèles à OA $(Y = \pm 1, Y = \pm 2, \ldots)$ de la même manière.
Dans la suite de la preuve, Minkowski sépare trois cas selon que le point A est un sommet, le milieu d'un côté du parallélogramme $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$, ou bien ni l'un ni l'autre. Nous ne détaillons ici que ce dernier cas.
Soit maintenant le point F de coordonnées $(\xi = -\varepsilon\lambda, \eta = \mu)$. Le parallélogramme

FAF_0A_0 est défini par les inégalités

$$-\lambda \leq \xi \leq \lambda\,, \qquad -\mu \leq \eta \leq \mu$$

et il est contenu strictement (à part ses sommets) dans $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ (voir la figure 1.6 qui est un dessin extrait de l'article de Minkowski[267]).

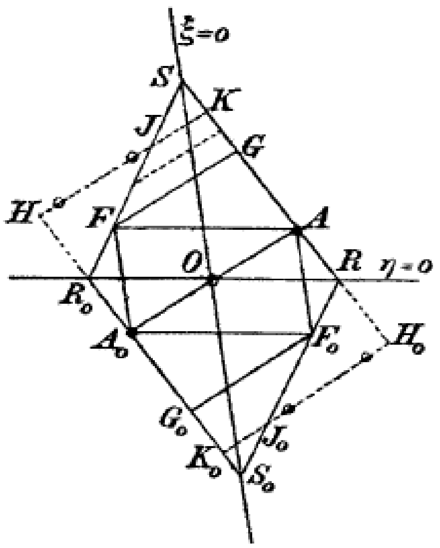


FIG. 1.6 – Illustration du premier cas dans la preuve du théorème I

La droite parallèle à OA passant par F coupe la frontière de $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ en un autre point G. Par suite, FG est strictement plus grand que A_0O et $A_0O = OA$, donc $FG > OA$. Nous avons vu que sur une droite parallèle à OA les points du réseau sont à distance OA les uns des autres, ainsi les droites $Y = \pm 1$ ne peuvent être situées entre les droites OA et FG sinon l'inégalité $FG > OA$ impliquerait l'existence d'un point du réseau distinct de O dans le parallélogramme $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$. Minkowski en déduit que pour tous les points entre les droites OA et FG, $|Y| < 1$. En particulier, pour le point F :

$$Y = \lambda\eta - \mu\varepsilon\xi = \lambda\mu - \mu\varepsilon(-\varepsilon\lambda) = 2\lambda\mu\,,$$

ce qui implique

$$|2\lambda\mu| < 1\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\xi\eta| < \frac{1}{2}\,.$$

Ceci termine le premier cas, c'est pour les deux autres cas pour lesquels A est un sommet ou le milieu d'un côté de $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ que l'égalité peut se produire.

[267] MINKOWSKI 1901b p.94.

Dans le théorème II, Minkowski montre que lorsque $x = p$, $y = q$ sont des entiers premiers entre eux pour lesquels $|\xi| > 0$ et $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, alors il est possible de trouver deux autres entiers p', q' tels que $pq' - qp' = \pm 1$, $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ et $|\xi|$ est plus petit que pour p et q. Ces résultats lui permettent d'arriver au théorème IV qui est à la base du développement en fraction continue qu'il veut proposer. Soit toujours $\xi = \alpha x + \beta y$ et $\eta = \gamma x + \delta y$ deux formes linéaires à coefficients réels avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le produit $\xi\eta$ est supposé ne pas être équivalent à la forme XY ni à $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. L'ensemble des couples d'entiers x, y premiers entre eux, tels que $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ et $\eta > 0$, ou $\eta = 0$ et $\xi > 0$, est rangé selon les valeurs croissantes de η. Deux couples successifs p, q et p', q' de cette suite sont tels que

$$pq' - qp' = \pm 1 \ .$$

La suite de ces couples admet un premier terme si et seulement si $\frac{\delta}{-\gamma}$ est rationnel. Ce couple est alors tel que $\eta = 0$, $\xi > 0$ et $\frac{x}{\delta} = \frac{y}{-\gamma} > 0$. La suite admet un dernier terme pour lequel $\eta > 0$ et $\xi = 0$ si et seulement si $\frac{-\beta}{\alpha}$ est rationnel, dans ce cas $\frac{x}{-\beta} = \frac{y}{\alpha} > 0$. Enfin, si la suite n'a pas de dernier terme, $|\xi|$ tend vers 0, $|\eta|$ vers $+\infty$ et si la suite n'a pas de premier terme, $|\xi|$ tend vers $+\infty$ et $|\eta|$ converge vers 0.
À la suite de ce théorème, nous retrouvons un vocabulaire déjà employé par Minkowski dans ses articles précédents. La suite des points du réseau rangés selon les valeurs croissantes de η est appelée la chaîne des formes ξ, η et est notée

$$p_i\ ,\ q_i \qquad\qquad (i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)\ .$$

La substitution T_i définie avec deux termes successifs de la suite

$$x = p_{i-1}X_i + p_iY_i\ , \qquad y = q_{i-1}X_i + q_iY_i$$

est appelée une substitution de la chaîne. Minkowski note aussi

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i-1}\ , & p_i \\ q_{i-1}\ , & q_i \end{pmatrix} .$$

Un peu plus loin dans l'article[268], il applique ces théorèmes aux formes $\xi = x - ay$, $\eta = y$, où a est un réel fixé, ce qui le conduit au théorème VI. Dans ce théorème a est supposé ne pas être un entier ou un demi-entier et il construit une suite p_i, q_i en posant :

- $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ puis $q_1 = 1$ et $p_1 = h_0$ où h_0 est l'entier le plus proche de a, ainsi $|a - h_0| < \frac{1}{2}$.
- Si p_i, q_i sont définis et tels que $p_i - aq_i$ est non nul, soient ϑ_i le signe du quotient

[268] Minkowski 1901b p.114-115.

$\dfrac{p_{i-1} - aq_{i-1}}{p_i - aq_i}$ et g_i la partie entière de la valeur absolue de ce quotient. Posons ensuite $h_i = g_i$ ou $h_i = g_i + 1$ selon que

$$|((p_{i-1} - aq_{i-1}) - \vartheta_i g_i(p_i - aq_i))(g_i q_i - \vartheta_i q_{i-1})| \; < \quad \text{ou} \quad \geq \frac{1}{2} \,.$$

– Enfin p_{i+1} et q_{i+1} sont donnés par

$$p_{i+1} = h_i p_i - \vartheta_i p_{i-1} \qquad \text{et} \qquad q_{i+1} = h_i q_i - \vartheta_i q_{i-1}.$$

Cette suite p_i, q_i vérifie alors les propriétés suivantes :

1°. Si a est rationnel, la suite s'arrête avec des entiers p_w, q_w pour lesquels $p_w - aq_w = 0$ et si a est irrationnel la suite est infinie.

2°. Deux termes consécutifs de la suite vérifient la relation

$$p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = \vartheta_1 \vartheta_2 \ldots \vartheta_i = \pm 1 \,.$$

Les entiers p_i et q_i sont toujours premiers entre eux.

3°. Le rapport $\frac{p_k}{q_k}$ est donné par

$$\frac{p_k}{q_k} = h_0 - \frac{\vartheta_1|}{|h_1} - \frac{\vartheta_2|}{|h_2} - \cdots - \frac{\vartheta_{k-1}|}{|h_{k-1}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

p_k et q_k sont alors égaux au numérateur et au dénominateur du membre de droite de l'égalité précédente quand il est exprimé sous la forme d'un quotient de deux fonctions de h_i et ϑ_i.

4°. q_i est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs, de plus

$$\frac{1}{2} > |p_1 - aq_1| > |p_2 - aq_2| > |p_3 - aq_3| > \cdots \,,$$

ce qui implique que $|\frac{p_k}{q_k} - a|$ est strictement décroissante. Quand a est irrationnel, les fractions $\dfrac{p_k}{q_k}$ convergent vers a.

5°. Chaque couple d'entiers p_k, q_k satisfait à l'inégalité

$$|(p_k - aq_k)q_k| \; < \; \frac{1}{2} \,.$$

Réciproquement, si x, y sont des entiers premiers entre eux avec $y > 0$ et $|(x - ay)y| < \frac{1}{2}$, alors x, y est un couple d'entiers p_i, q_i de la suite précédente.

Ce développement en fraction continue est qualifié de « diagonal » par Minkowski, par comparaison au développement ordinaire appelé « parallèle ».
La fin de l'article est consacré à la comparaison des deux développements. Par exemple,

Minkowski justifie que les réduites du développement diagonal sont toutes des réduites du développement parallèle, ainsi le développement diagonal converge plus rapidement vers le réel a. Il montre enfin que comme pour le développement ordinaire, le développement en fraction continue diagonal est périodique si et seulement si a est la racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

Une partie de cet article concerne un résultat sur le produit de deux formes linéaires non homogènes. Minkowski s'y intéresse en liaison directe avec les résultats déjà obtenus. Mais ce thème deviendra un thème important pour la géométrie des nombres repris par de nombreux successeurs de Minkowski.
Dans le théorème V, $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ sont toujours deux formes linéaires à coefficients réels et de déterminant 1 et ξ_0, η_0 sont deux réels quelconques. Il existe alors des entiers x et y pour lesquels

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \ \leq \ \frac{1}{4}\ .$$

Dans sa démonstration, Minkowski commence par traiter à part les cas où $\xi\eta$ est équivalent à la forme XY ou à la forme $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$, ces deux situations sont ensuite exclues.
Soit $x = pX + p'Y$, $y = qX + q'Y$ une substitution de la chaîne associée à ξ, η, où $A(p, q)$ et $A'(p', q')$ sont deux points du réseau tels qu'ils étaient définis dans le théorème II (voir page 111). Minkowski considère le parallélogramme RSR_0S_0, noté aussi $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$, pour lequel les points A et A' sont sur sa frontière et qui ne contient pas de point du réseau dans son intérieur autre que l'origine[269]. Rappelons que ce parallélogramme est aussi défini par l'inégalité

$$\left|\frac{\xi}{\rho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \ \leq \ 1\ .$$

Pour le point A, $\xi = \varepsilon\lambda$ et $\eta = \mu$ avec $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. De même pour le point A', posons $\xi = \varepsilon'\lambda'$, $\eta' = \mu'$, où $\varepsilon' = \pm 1$, $\lambda' \geq 0$ et $\mu' \geq 0$. Les cas $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\varepsilon = -\varepsilon'$ sont démontrés séparément, dans la suite nous donnons les grandes étapes de la preuve pour $\varepsilon = -\varepsilon'$. Soient maintenant les milieux de deux côtés adjacents de $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ donnés par $M(\xi = \frac{\varepsilon\rho}{2}, \eta = \frac{\sigma}{2})$ et $M'(\xi = \frac{-\varepsilon\rho}{2}, \eta = \frac{\sigma}{2})$ (voir la figure 1.7[270]).

Le fait que $|\xi\eta|$ ne soit pas équivalent à XY ou $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ implique que nous ne pouvons avoir $\lambda' = \mu = 0$ et nécessairement $A \neq M$, $A' \neq M'$. Minkowski justifie ensuite que $A'M' \leq AM$. Puis il construit les parallélogrammes $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$ centrés en tous les points du réseau. La frontière du parallélogramme $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$ centré en O rencontre les frontières

[269] L'existence d'un tel parallélogramme a été justifiée dans la preuve d'un des théorèmes précédents.
[270] MINKOWSKI 1901b p.110. Les parallélogrammes $\mathfrak{B}(\rho, \sigma)$ sont sur ce dessin remplacés par des carrés.

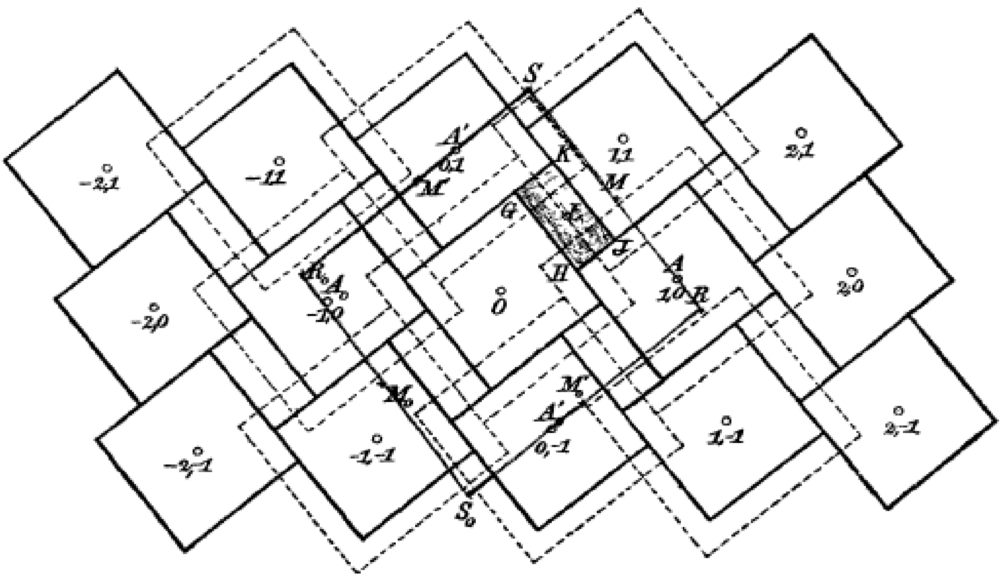


FIG. 1.7 – Illustration pour la preuve du théorème V

de ceux qui sont centrés en A, A_0, A', A'_0 qui sont les points du réseau les plus proches de O. Mais les côtés de ces parallélogrammes ne coincident pas complètement, ainsi l'ensemble des $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$ ne recouvre pas tout le plan. Il reste donc des "trous" qui sont des parallélogrammes centrés aux points $X + \frac{1}{2}$, $Y + \frac{1}{2}$, c'est par exemple le rectangle $GHJK$ sur la figure 1.7. Nous avons alors

$$GH = MA \leq MS = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad GK = M'A' < M'S = \frac{1}{2}RS\,,$$

or $A'M' \leq AM$ et donc $GK \leq GH$. En remarquant que les côtés de $GHJK$ sont plus petits que ceux de $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$, il montre que l'aire de $GHJK$ est strictement inférieure à l'aire de $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$ qui est égale à

$$\frac{1}{2}\rho\,\sigma\ .$$

Minkowski veut ensuite transformer le parallélogramme $\mathfrak{B}(\frac{\rho}{2}, \frac{\sigma}{2})$ par une homothétie de centre O de telle manière que l'ensemble des parallélogrammes ainsi obtenus recouvre tout le plan. Pour cela il ajuste le rapport de l'homothétie k pour que chaque nouveau parallélogramme prenne la moitié des $GHJK$ qui sont les portions du plan non recouvertes. C'est-à-dire qu'il choisit que $\frac{1}{k-1}$ soit égal au rapport de la distance du point O à la droite GH à la distance du point L à la droite GH. Il vient en particulier que

$$\frac{1}{k-1} = \frac{\frac{1}{2}M'S}{\frac{1}{2}GK} = \frac{\frac{1}{2}M'S}{\frac{1}{2}M'A'} = \frac{M'S}{M'A'}\,,$$

or nous avons vu que $M'S > M'A'$ ce qui implique $1 < k < 2$.
Minkowski construit donc les parallélogrammes $\mathfrak{B}(\frac{k\rho}{2}, \frac{k\sigma}{2})$ centrés en tous les points du

réseau (ils sont représentés en pointillés sur la figure 1.7). Comme ce dernier système de parallélogrammes recouvre tout le plan, le point (ξ_0, η_0) appartient à l'un des $\mathfrak{B}(\frac{k\rho}{2}, \frac{k\sigma}{2})$ dont les coordonnées du centre (x, y), qui sont des entiers, vérifient

$$\left|\frac{\xi - \xi_0}{\rho}\right| + \left|\frac{\eta - \eta_0}{\sigma}\right| \leq \frac{k}{2}\,.$$

Les autres cas dans cette preuve sont traités par une méthode similaire à celle que nous venons d'exposer.

Dans cet article, les problèmes sont abordés géométriquement : construction de parallélogrammes qui sont transformés par des homothéties, calculs d'aire, comparaisons de distances etc... Bien que Minkowski ne s'exprime pas de façon explicite là-dessus, il semble que les figures, auxquelles il renvoie dans certains passages, jouent un rôle dans ces constructions géométriques. En effet, la rédaction de Minkowski paraît intégrer le fait que le lecteur a un dessin sous les yeux et s'y reporte. Les objets manipulés par Minkowski (points, figures géométriques...) sont définis de manière parfaitement rigoureuse dans le texte, il ne s'agit donc pas ici de pallier ce type d'ambiguïté[271]. Cependant, beaucoup de points ou de notations sont introduits dans la preuve et le dessin apparaît comme le moyen de saisir globalement les arguments de la démonstration. D'autre part, ces arguments ne sont pas toujours développés de façon précise et il est souvent nécessaire de faire appel aux illustrations pour suivre le raisonnement. De plus, Minkowski considère que ce traitement géométrique rend cette théorie plus intuitive

> « Im Folgenden gebe ich eine auf geometrischen Betrachtungen gegründete und dadurch sehr anschauliche *Theorie des Systems zweier linearer Formen* $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ mit *beliebigen* reellen Coefficienten und mit *ganzzahligen* Unbestimmten[272]. »

b) De nouveaux théorèmes sur l'approximation

L'organisation du deuxième article de Minkowski publié en 1901 sur l'approximation[273] ressemble à celle du précédent. D'abord sont démontrés des résultats sur les « minima de formes algébriques », ainsi qu'à la détermination des formes réalisant ces

[271]Préciser la définition des objets est une des fonctions des figures dans les textes mathématiques grecs de l'antiquité qui est relevée par Reviel Netz, voir Netz 1999.

[272]« Dans ce qui suit je donne une Théorie du système de deux formes linéaires $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ à coefficients réels arbitraires et à indéterminées entières qui est fondée sur des considérations géométriques et donc très intuitive. » Minkowski 1901b p.92.

[273]Minkowski 1901a.

minima. Dans un deuxième temps, ces théorèmes sont utilisés dans la théorie de l'approximation. Les preuves des théorèmes ne figurent pas dans l'article et Minkowski renvoie à la deuxième partie de sa *Geometrie der Zahlen* pour les consulter. Cette deuxième partie correspond au livre *Diophantische Approximationen*[274] publié en 1907.

Le premier théorème concerne quatre formes linéaires de trois variables[275] :

> « Théorème. — Soient φ, χ, ψ, ω quatre formes linéaires à trois variables x, y, z, à coefficients réels quelconques et de sorte que l'on ait
>
> $$\varphi + \chi + \psi + \omega = 0.$$
>
> Supposons que le déterminant de trois de ces formes soit toujours différent de zéro et désignons sa valeur absolue par $4D$.
>
> Alors il existe toujours trois nombres entiers x, y, z, qui ne sont pas tous égaux à zéro et de sorte que toutes les quatre formes φ, χ, ψ, ω soient en valeur absolue moindres que
>
> $$\sqrt[3]{\frac{4D}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}}\,.$$
>
> La limite $d = \sqrt[3]{\frac{108}{19}\,D}$ donnée ici est précise. »

Minkowski précise aussitôt que l'inégalité précédente est en général stricte et que l'égalité se produit seulement lorsque les formes sont équivalentes[276] à

$$d\left(X - \frac{2}{3}Y\right), \quad d\left(Y - \frac{2}{3}Z\right), \quad d\left(-\frac{2}{3}X + Z\right), \quad -\frac{1}{3}\,d\,(X+Y+Z)\,.$$

Après avoir mentionné les conséquences que peut avoir ce théorème en cristallographie, Minkowski l'applique à la somme des valeurs absolues de trois formes. Soient ξ, η, ζ trois formes de trois variables à coefficients réels et de déterminant $\pm D$, où $D > 0$. Le théorème précédent, appliqué aux formes

$$\varphi = -\xi + \eta + \zeta \quad \chi = \xi - \eta + \zeta\,, \quad \psi = \xi + \eta - \zeta\,, \quad \omega = -\xi - \eta - \zeta\,,$$

donne l'existence d'entiers x, y, z différents de $0, 0, 0$ tels que

$$|\xi| + |\eta| + |\zeta| \;\leq\; \sqrt[3]{\frac{108}{19}\,D}\,.$$

[274] Minkowski 1907.

[275] Minkowski 1901a p.72-73.

[276] L'équivalence est définie par des substitutions linéaires à coefficients entiers et de déterminant ± 1.

Il en déduit ensuite que

$$|\xi\,\eta\,\zeta| \;<\; \frac{4}{19}\,D\,.$$

Minkowski remarque lui-même que l'inégalité précédente n'est pas la meilleure possible. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question, la meilleure estimation pour le produit de trois formes linéaires sera donnée dans les années 1930 par Harold Davenport.
En choisissant différemment les formes φ, χ, ψ, ω dans le théorème 1, il obtient aussi

$$|\xi| + |\zeta| \;\leq\; \sqrt[3]{\frac{54}{19}\,D}\,, \qquad |\eta| + |\zeta| \;\leq\; \sqrt[3]{\frac{54}{19}\,D}\,,$$

ce qui lui permet de montrer que

$$|\xi^2\zeta| \;<\; \frac{8}{19}\,D\,, \qquad |\eta^2\zeta| \;<\; \frac{8}{19}\,D\,.$$

Dans ce résultat, Minkowski pose ensuite

$$\xi = x - az\,, \qquad \eta = y - bz\,, \qquad \zeta = \frac{z}{t^3}\,,$$

où a, b sont des nombres réels quelconques et t un paramètre strictement positif. Comme le déterminant de ces trois formes est $\frac{1}{t^3}$, il existe des entiers x, y, z, où z peut être choisi strictement positif, pour lesquels

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| \;<\; \sqrt{\frac{8}{19}}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad \left|\frac{y}{z} - b\right| \;<\; \sqrt{\frac{8}{19}}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Nous reconnaissons un procédé déjà employé par Minkowski afin d'obtenir une approximation simultanée de deux nombres réels. Cependant l'amélioration de la borne pour les sommes de valeurs absolues de deux formes linéaires le conduit à une meilleure approximation que ce qu'il avait par exemple présenté à Chicago en 1893 (voir page 81) où il avait obtenu $\frac{2}{3}$ à la place de $\sqrt{\frac{8}{19}}$.

La fin de l'article concerne des formes linéaires complexes et l'approximation de nombres complexes. Soient $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ deux formes linéaires à coefficients complexes et $D = |\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$.

> « On peut toujours trouver, dans le corps algébrique de $i = \sqrt{-1}$[277], des nombres entiers complexes[278] x, y différents du système $0, 0$ de sorte que

[277] C'est-à-dire $\mathbb{Q}(i)$.

[278] Ce sont les nombres complexes qui s'écrivent sous la forme $a + ib$ avec a et b des nombres entiers rationnels. L'ensemble de ces nombres est maintenant appelé l'anneau des entiers de Gauss et il est noté $\mathbb{Z}[i]$. C'est aussi l'anneau des entiers du corps de nombres algébriques $\mathbb{Q}(i)$.

l'on ait

$$|\xi| \;\le\; \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\,D}\,, \qquad |\eta| \;\le\; \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\,D}\;. \text{ »}$$

L'égalité se produit « lorsqu'il existe une substitution

$$x = pX + rY\;, \qquad y = qX + sY\;,$$

où p, q, r, s sont des nombres entiers dans le corps de i et le déterminant $ps - qr = \pm 1$ ou $\pm i$, de sorte que, par cette substitution, ξ, η soient transformées en

$$\lambda\, d \left\{ X + \left[\frac{1}{2} - i \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] Y \right\}, \qquad \mu\, d \left\{ \left[\frac{i}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] X + Y \right\},$$

λ et μ étant des quantités dont la valeur absolue est égale à 1. »
Ce théorème concerne le « corps algébrique de la quatrième racine de l'unité », Minkowski énonce ensuite un résultat similaire dans le « corps de la troisième racine de l'unité »notée $j = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Puis en appliquant ce dernier théorème aux formes

$$\xi = x - ay\;, \qquad \eta = \frac{y}{t^2}\;,$$

où a est un nombre complexe quelconque et $t > 1$, il obtient que[279]

> « dans le corps de $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (mais pas dans le corps de $\sqrt{-1}$), il y aura toujours des nombres entiers complexes x, y tels que
>
> $$0 \;<\; |y| \;\le\; t\,, \qquad |x - ay| \;<\; \frac{1}{t}\,,$$
>
> d'où l'on tire encore
>
> $$|(x-ay)y| \;<\; 1\;. \text{ »}$$

Avec ces résultats, Minkowski montre que les méthodes qui lui ont permis d'approcher des nombres réels par des rationnels peuvent être généralisées pour élaborer une théorie de l'approximation dans des corps de nombres algébriques. L'absence des démonstrations dans cet article ne permet cependant pas de voir qu'elle est l'origine des théorèmes présentés ici.

[279] Minkowski 1901a p.76.

1.3.3.3 Empilements réguliers de corps congruents

Des éléments de réponse sur l'origine de ces résultats sont apportés dans un article publié en 1904 dans lequel Minkowski s'intéresse à l'empilement régulier de corps convexes[280]. Etant donné un corps convexe K et un réseau, considérons l'ensemble des corps qui sont l'image de K par une translation d'un vecteur à coordonnées entières par rapport au réseau. Il s'agit alors de déterminer le réseau tel que tous les corps obtenus ne puissent se rencontrer que sur leur frontière et qu'ils occupent la plus grande partie possible de l'espace.
Dans la première partie de cette article Minkowski montre qu'il peut se ramener au cas où K admet un point du réseau comme centre. Il étudie donc ensuite seulement des corps convexes centrés dont les centres forment un réseau de l'espace de dimension 3.
Notons $\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, $\eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$, $\zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$ des substitutions réelles dont la valeur absolue du déterminant est Δ. Δ est aussi le volume du parallélogramme défini par les inégalités

$$0 \leq x < 1\,, \qquad 0 \leq y < 1\,, \qquad 0 \leq z < 1\,.$$

Pour des valeurs entières des variables x, y, z les formes ξ, η, ζ définissent un réseau dont le domaine fondamental est donné par les inégalités précédentes.
Minkowski introduit aussi la distance radiale associée au corps K,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = f(x, y, z)\,.$$

Pour que les corps obtenus par translation de K soient disjoints, K ne peut contenir des points du réseau dans son intérieur autre que O, ainsi tous les points de coordonnées entières x, y, z différents de $0, 0, 0$ doivent vérifier

$$f(x, y, z) \geq 1\,.$$

Enfin si J est le volume de K, la proportion de l'espace occupée par l'ensemble des corps K_G (corps dont le centre est le point G du réseau) est alors $\dfrac{J}{\Delta}$. Le problème devient alors la détermination des coefficients des formes ξ, η, ζ tels que Δ est le plus petit possible et que $f(x, y, z) \geq 1$ pour tous les entiers x, y, z.
Minkowski démontre en particulier le résultat suivant : pour un corps convexe K donné, il pose $\mathcal{R} = K + K'$, où K' est le symétrique de K par rapport à O. Pour trouver les déterminants minimaux Δ pour K, il suffit d'étudier les réseaux pour lesquels[281] :

(I) les points $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(0, 1, -1)$; $(-1, 0, 1)$; $(1, -1, 0)$ sont sur la fron-

[280] Minkowski 1904a.
[281] Minkowski 1904a p.329.

tière de $\mathcal{R}$ et les points $(-1,1,1); (1,-1,1); (1,1,-1)$ est à l'extérieur de $\mathcal{R}$,

(II) les points $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (0,1,1); (1,0,1); (1,1,0)$ sont sur la frontière de $\mathcal{R}$ et le point $(1,1,1)$ à l'extérieur,

(III) les points $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (0,1,1); (1,0,1); (1,1,0); (1,1,1)$ sont tous sur la frontière de $\mathcal{R}$.

Minkowski illustre ce dernier résultat avec les dessins de la figure 1.8 [282]. Le premier de ces dessins montre le domaine obtenu avec les points du cas (I) et leurs symétriques par rapport à O, le deuxième correspond au cas (III).

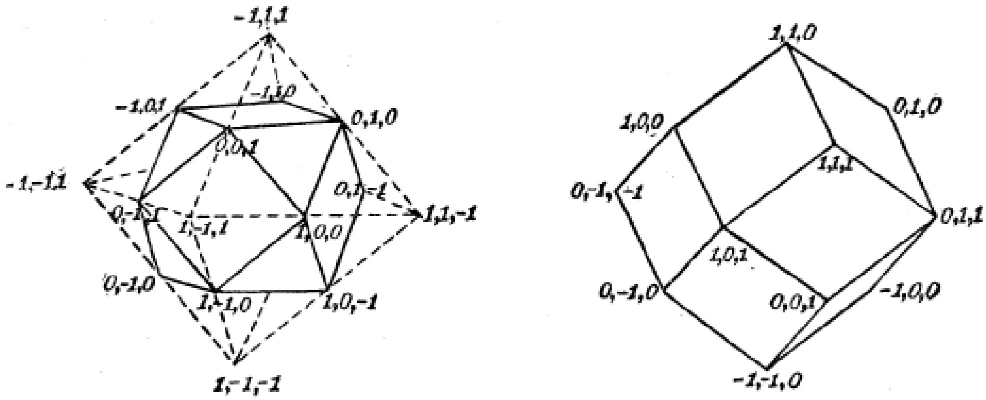


FIG. 1.8 – Illustration des cas (I) et (III)

Ce théorème permet de démontrer que pour des sphères la proportion maximale d'espace occupé est $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}$. L'étude des empilements de tétraèdres ou d'octaèdres entraîne aussi certains des théorèmes sur les formes linéaires énoncés sans démonstration dans l'article précédent.

1.3.3.4 Retour sur l'équivalence des formes quadratiques

Dans son dernier article publié sur la géométrie des nombres[283], Minkowski revient sur l'étude de l'équivalence entre formes quadratiques de n variables et sur la notion de forme réduite[284]. Il propose un traitement géométrique de ces questions.

Considérons une forme quadratique f de n variables, à coefficients réels et définie

[282] MINKOWSKI 1904a p.330.

[283] MINKOWSKI 1905.

[284] La notion de réduction chez Minkowski est discutée dans SCHWERMER 2007. Joachim Schwermer en indique aussi des versions antérieures manuscrites.

positive, notons

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où $a_{hk} = a_{kh}$ pour tous les indices h et k. Cette forme est représentée par le point de coordonnées (a_{hk}) dans un espace A de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Le problème de la réduction de ces formes est alors reformulé géométriquement

> « wir suchen in der Mannigfaltigkeit A einen Bereich B, in dem jede Klasse positiver quadratischer Formen durch einen Punkt, und wenn der Punkt in das Innere von B fällt, auch nur durch einen einzigen Punkt repräsentiert wird[285]. »

Rappelons que deux formes

$$f = \sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k \,, \qquad g = \sum_{h,k} b_{hk} y_h y_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont dites équivalentes si elles sont déduites l'une de l'autre par une transformation linéaire à coefficients entiers et de déterminant ± 1. Minkowski introduit des notions supplémentaires pour comparer f et g afin de définir une nouvelle notion de forme réduite. Les deux formes sont également placées (« gleichgestellt[286] ») si

$$a_{11} = b_{11} \,, \ a_{22} = b_{22} \,, \ \ldots \ , \ a_{nn} = b_{nn} \,.$$

Si maintenant pour $l = 1, 2, \ldots, n$ les coefficients des formes vérifient

$$a_{11} = b_{11} \,, \ \ldots \ , \ a_{l-1,l-1} = b_{l-1,l-1} \,, \ a_{ll} > b_{ll}$$

alors f est supérieure à g à la l-ème place ou g est inférieure à f à la l-ème place. Dans chaque classe, il existe des formes qui sont minimales pour la relation précédente et toutes ces formes minimales sont également placées. Il existe certaines classes de formes qui contiennent une unique forme minimale, ce sont les classes générales (« allgemein[287] »). Une forme f et sa classe sont dites générales si l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

[285] « nous cherchons dans la multiplicité A un domaine B dans lequel chaque classe de formes quadratiques positives sera représentée par un point, et si le point tombe à l'intérieur de B, par un point unique. » Minkowski 1905 p.221.

[286] Minkowski 1905 p.225.

[287] Minkowski 1905 p.226.

où les x_i et les y_i sont des entiers, a pour seules solutions $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.
Minkowski présente sa définition des formes réduites comme une simplification de celle qu'avait donné Hermite. Les formes réduites sont des formes minimales dans la classe avec des propriétés supplémentaires. Il appelle donc réduite une forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{hk} x_h x_k$$

qui vérifie les deux conditions suivantes[288] :

$$\text{(I)} \qquad f(s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots, s_n^{(l)}) \geq a_{ll} \ , \quad \text{pour tout} \ \ l = 1, 2, \ldots, n,$$

où $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots, s_n^{(l)}$ est un système d'entiers quelconque pour lequel le plus grand commun diviseur de $s_l^{(l)}, s_{l+1}^{(l)}, \ldots, s_n^{(l)}$ vaut 1 ;

$$\text{(II)} \qquad a_{12} \geq 0, \quad a_{23} \geq 0, \quad \ldots \ , \quad a_{n-1,n} \geq 0.$$

Les deux systèmes d'entiers $s_h^{(l)} = e_h^{(l)}$ et $s_h^{(l)} = -e_h^{(l)}$, où $e_h^{(l)} = 0$ si $h \neq l$ et 1 sinon, sont exclus dans les inégalités (I).
Dans chaque classe de formes quadratiques définies positives, il existe alors une forme réduite au sens précédent. Les conditions (I) des formes réduites sont en nombre infini mais Minkowski montre qu'il est possible de vérifier ces inégalités seulement dans un nombre fini de cas qui impliquent tous les autres.

La traduction en termes géométriques de ce qui précède permet de définir le domaine B cherché comme étant l'ensemble des points $f = (a_{hk})$ qui vérifient les conditions (I) et (II). Minkowski démontre dans la suite un certain nombre de propriétés géométriques de B qu'il appelle domaine réduit (« reduzierten Raum[289] »). D'abord, il justifie que B est un cône convexe dont le sommet est à l'origine $f = 0$ et qui est limité par un nombre fini de plans passant par l'origine. Ensuite, il définit les formes arêtes (« Kantenform ») comme étant des formes réduites non identiquement nulles qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme de deux formes réduites non nulles et non multiples l'une de l'autre. Une telle forme est représentée par un point situé sur une arête de B. En choisissant une forme arête sur chaque arête de B, Minkowski obtient un nombre fini de formes arêtes φ_1, φ_2, …, φ_r telles que toute forme réduite f peut s'écrire

$$f = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_r\varphi_r \ ,$$

[288] Minkowski 1905 p.228.
[289] Minkowski 1905 p.229.

où les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sont positifs. Réciproquement, une forme s'écrivant ainsi est réduite.
Ce type de raisonnement n'est pas nouveau dans le travail de Minkowski. La fin du premier chapitre de sa *Geometrie der Zahlen* était en effet consacrée à l'étude des systèmes d'inéquations linéaires. Il avait alors introduit la notion de solution extrême et démontré que toute solution du système peut s'exprimer comme une combinaison linéaire à coefficients positifs d'un nombre fini de formes extrêmes. Minkowski fait lui-même référence à ce passage de son livre de 1896, il semble d'ailleurs qu'il fut inclus dans *Geometrie der Zahlen* afin que les résultats puissent être utilisés dans le cadre qui est celui de l'article qui nous intéresse ici[290]. La question de la réduction des formes quadratiques devait alors faire l'objet d'un chapitre du livre qui ne fut finalement jamais publié[291]. Le lien entre systèmes d'inégalités linéaires et géométrie est qu'un tel système définit un ensemble convexe, les propriétés précédentes sont en fait caractéristiques des domaines convexes[292].

Minkowski revient ensuite sur la question du minimum $M(f)$ d'une forme quadratique f pour des valeurs entières des variables. $M(f)$ est un invariant de la classe d'équivalence de f et pour une forme réduite $M(f) = a_{11}$. Nous avons déjà vu qu'il existe une constante λ_n telle que

$$D(f) \geq \lambda_n [M(f)]^n \,,$$

où $D(f)$ est le déterminant de f. La détermination de la borne supérieure de $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ est un problème important de la théorie déjà abordé par Hermite. Korkine et Zolotareff ont en particulier étudié les formes dites extrêmes pour lesquelles $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ est un maximum local quand f est soumise à une variation infinitésimale. Minkowski prouve par exemple qu'une forme extrême qui est dans le domaine réduit est nécessairement une forme arête du domaine[293]. De plus, la forme arête située sur la surface $D(f) = 1$ et pour laquelle a_{11} est maximum représente une classe extrême et donne la borne supérieure de toutes les valeurs possibles de $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$.

Notons maintenant $B(D)$ le sous-domaine de B dont les formes f ont un déterminant $D(f)$ plus petit qu'un réel strictement positif D donné. Une grande partie de

[290] Les liens entre la fin du chapitre I de la *Geometrie der Zahlen* et l'article de 1905 sont expliqués dans Kjeldsen 2002 p.484-489.

[291] Voir la préface de Hilbert et Speiser dans Minkowski 1910.

[292] Les livres de géométrie actuels appellent parfois théorème de Minkowski le résultat qui dit qu'un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux, voir Berger 2006 p.43. Les points extrêmaux de B sont ici les formes arêtes.

[293] Minkowski 1905 p.248.

l'article (presque 20 pages) est consacrée au calcul du volume de ce domaine $B(D)$. Il démontre que ce volume est égal à $v_n\, D^{\frac{n+1}{2}}$, où

$$v_n = \frac{2}{n+1} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2+3+\cdots+n}} S_2 S_3 \ldots S_n\ .$$

Dans l'expression précédente, S_k désigne la série

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots\ .$$

L'article se termine par deux applications de ce calcul. D'abord, il permet de montrer qu'il existe un empilement régulier de sphères dans l'espace de dimension n pour lequel le rapport de l'espace occupé par ces sphères à l'espace total est au moins $\frac{1}{2^{n-1}}\, S_n$. Enfin, v_n intervient dans une formule asymptotique pour le nombre de classe de formes quadratiques à coefficients entiers déjà annoncée par Minkowski dans sa lettre à Hermite de 1893 (voir page 86). Soit D un entier strictement positif, $H(D)$ désigne le nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques définies positives, à coefficients entiers et de déterminant D. $H(D)$ est fini et Minkowski démontre que[294]

$$\lim_{D=\infty} \left(\frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(D)}{D^{\frac{n+1}{2}}} \right) = v_n\ .$$

Cet article est caractéristique du travail de Minkowski avec un va-et-vient permanent entre arithmétique et géométrie. Des notions arithmétiques comme l'équivalence ou la réduction sont interprétées géométriquement avec le domaine réduit et l'étude des propriétés géométriques du domaine réduit permet d'obtenir de nouveaux théorèmes arithmétiques, par exemple la possibilité d'exprimer n'importe quelle forme réduite comme combinaison linéaire positive d'un nombre fini d'entre elles. Un calcul de volume implique un résultat asymptotique pour le nombre de classes de formes quadratiques.

1.3.3.5 Un bref aperçu de *Diophantische Approximationen*

Comme nous l'avons déjà remarqué, Minkowski ne publia jamais la deuxième partie de *Geometrie der Zahlen*. Il publie cependant un second livre sur la géométrie des nombres en 1907 dont le statut est différent du premier de 1896. Il s'agit en effet d'un livre qui est issus d'un cours donné à l'université de Göttingen pendant le semestre d'hiver 1903-1904 qui doit être une introduction à la théorie des nombres, ce qui est indiqué par le titre : *Diophantische Approximationen ; eine Einführung in die Zahlentheorie*. L'objectif principal de Minkowski n'est donc pas d'y présenter les tout derniers

[294] Minkowski 1905 p.269.

développements de son travail (bien que certains s'y trouvent) et comme nous le verrons il ne se place pas dans le cadre le plus général possible.
Dans la préface Minkowski remercie A. Axer qui l'a aidé dans la rédaction de l'ouvrage en particulier pour le dernier chapitre rédigé à partir de notes manuscrites de Minkowski. Après la première édition[295] de 1907, une deuxième édition[296] identique est publiée en 1957.
Nous donnons ici un aperçu très rapide du contenu du livre car il ne traite pas de thèmes nouveaux par rapport aux articles publiés par Minkowski[297].

Le livre comporte six chapitres, le premier prend comme point de départ le principe de Dirichlet :

> « Wenn $n+1$ Dinge auf n Fächer irgendwie verteilt werden, so muß es darunter mindestens ein Fach geben, welches mehr als ein Ding aufnimmt[298]. »

Minkowski montre en particulier comment utiliser ce résultat pour approcher un nombre réel par un rationnel et pour l'approximation simultanée de deux nombres réels par des rationnels de même dénominateur.
La suite du livre est construite autour du théorème sur les domaines convexes à centre qui est appliqué à différentes situations.
Dans le deuxième chapitre qui traite des réseaux en dimension 2, Minkowski énonce les théorèmes qu'il a obtenu pour deux formes linéaires de deux variables homogènes ou non homogènes. Pour cela il applique le principe de la démonstration du théorème sur les convexes à des parallélogrammes. Le théorème général est ensuite prouvé pour n'importe quel convexe à centre en dimension 2. Cet énoncé est utilisé pour étudier par exemple les domaines

$$|\xi|^p + |\eta|^p \leq 1\,,$$

où ξ, η sont des formes linéaires homogènes et $p \geq 1$. Quand $p = 2$, il obtient un résultat pour les formes quadratiques définies positives qui est appliqué à l'empilement régulier de disques dans le plan.
Le chapitre 3 suit un peu le même modèle que le précédent mais pour les réseaux en dimension 3. Nous y trouvons donc les résultats relatifs à trois formes linéaires homogènes (produit, somme...) à coefficients réels ou complexes.
Les deux chapitres qui suivent traitent de la théorie algébrique des nombres. Dans le chapitre 4, après des rappels sur cette théorie Minkowski aborde la question du discriminant des corps de nombres algébriques et le théorème des unités. Le chapitre 5

[295] Minkowski 1907.
[296] Minkowski 1957.
[297] Voir aussi Tannery 1908.
[298] « Si $n+1$ objets sont répartis n'importe comment dans n tiroirs, il doit nécessairement y avoir parmi eux un tiroir qui reçoit plus qu'un objet. » Minkowski 1907 p.1.

concerne les idéaux. Parmi les théorèmes importants qui y sont énoncés nous trouvons par exemple la finitude du nombre de classes d'idéaux ou la décomposition de n'importe quel idéal en produit d'idéaux premiers.
Enfin le dernier chapitre, Minkowski étudie des formes linéaires dont les variables appartiennent au corps de nombres algébriques engendré par i ($K(i)$) ou bien à celui engendré par j ($K(j)$). Il a pour cela besoin de considérer des réseaux en dimension 4. Minkowski démontre en particulier les théorèmes sur $K(i)$ et $K(j)$ qu'il avait énoncés sans preuve dans son article de 1901 (voir page 117)[299].

1.3.3.6 Quelques remarques sur le travail des années 1897-1909

À partir de 1897, Minkowski paraît davantage vouloir privilégier des preuves et des méthodes constructives. Il donne des procédures pour construire certaines substitutions ou bien des chaînes de substitutions. Il construit aussi géométriquement des solutions aux inégalités qu'il étudie (en particulier sur les formes linéaires). Pour la théorie des corps de nombres algébriques, il recherche des critères pour décider si un nombre est algébrique de degré donné, il propose aussi un nouvel algorithme de développements en fraction continue

> « Ich habe mich in der letzten Zeit wieder mit Verallgemeinerungen der Kettenbruchalgorithmen beschäftigt. Jeder Schritt erfordert dabei lange Rechnungen, zu denen die Resultate bisher nicht von dem Gegenstande loszureissen. Im Hintergrunde verbergen sich da noch gewiss schöne Dinge[300]. »

Pour Minkowski, il ne s'agit pas seulement de donner des méthodes qui permettent de calculer des solutions de manière explicite, mais aussi d'éclairer avec un point de vue nouveau les aspects les plus théoriques des domaines étudiés

> « Ich selbst rechne jetzt viele Beispiele mit meinen neuen Algorithmen, und ich glaube, dass viel Licht namentlich für die Theorie der kubischen Körper von diesen neuen rechnerischen Hülfsmitteln ausgehen wird[301]. »

Ceci semble confirmer le commentaire de Zassenhaus sur Minkowski qui selon lui « tried hard to establish the fondations of constructive algebraic number theory[302] ».

[299] MINKOWSKI 1901a.
[300] « Je me suis encore occupé ces derniers temps de la généralisation de l'algorithme des fractions continues. Chaque pas coûte de longs calculs, dont les résultats jusqu'ici ne se détachent pas de l'objet. En arrière-plan se cachent encore néanmoins sûrement de jolies choses. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 13 avril 1898, RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.107.
[301] « Je calcule moi-même maintenant beaucoup d'exemples avec mes nouveaux algorithmes et je crois que beaucoup de lumière va sortir de ces nouveaux modes de calculs pour la théorie des corps cubiques. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 20 juillet 1898, RÜDENBERG et ZASSENHAUS 1973 p.109.
[302] ZASSENHAUS 1975 p.453, mais aussi p.444. Pour des exemples de l'utilisation du travail de Minkowski dans ce contexte voir POHST 1993.

Ces remarques amènent un commentaire plus général à propos de Minkowski. Sa conception des mathématiques n'est pas facile à situer par rapport à celles de son époque. Il semble par divers aspects au milieu de différents courants parfois perçus comme antagonistes.
Une part importante de ses recherches portent sur des sujets mathématiques considérés comme abstraits. Les développements des mathématiques parmi les plus conceptuels de l'époque ne paraissent pas lui poser de problèmes : dès 1891, il commence à adopter le vocabulaire des corps de nombres dans l'étude des nombres algébriques[303], il est aussi un des premiers mathématiciens, avec Hilbert, à défendre la théorie des ensembles de Georg Cantor

> « Die spätere Geschichte wird Cantor als einen der tiefsinnigsten Mathematiker dieser Zeit bezeichnen ; es ist sehr zu bedauern, daß eine nicht auf sachlichen Gründen allein beruhende Opposition, die von einem sehr angesehenen Mathematiker ausging, Cantor die Freude an seinen wissenschaftlichen Forschungen trüben konnte[304]. »

Dans les premières années de son travail sur la géométrie des nombres, Minkowski semble s'intéresser seulement à des résultats d'existence : que cela soit sous sa forme géométrique ou analytique, le théorème sur les corps convexes à centre est de ce type. En même temps, Minkowski laisse une place fondamentale à l'intuition. Après la publication en 1896 de *Geometrie der Zahlen*, nous venons de voir qu'il apparaît davantage dans son travail un souci d'effectivité. Nous pouvons faire ici un parallèle avec le travail d'Hilbert sur les invariants qui après avoir démontré de façon non-constructive l'existence d'une base d'invariants pour un système de formes algébriques se tourne ensuite vers des méthodes permettant d'expliciter ces bases[305]. En revanche, Minkowski semble beaucoup moins intéressé qu'Hilbert par le problème des fondements, à propos de son collègue de Bonn, Lilienthal, il écrit

> « Er wird mir bald zu tief und geht beständig auf die Begriffe und Grundlagen ein, wo ich bestimmte Facta haben möchte[306] ».

Enfin, bien que beaucoup des travaux mathématiques de Minkowski appartiennent à ce que nous appelerions aujourd'hui les mathématiques pures, il s'est aussi beaucoup investi à la fois comme enseignant et comme chercheur dans les applications des mathématiques à d'autres domaines comme la physique et la chimie

[303] Voir la lettre à Hermite de 1891.

[304] « L'histoire ultérieure décrira Cantor comme un des plus profonds mathématiciens de son temps ; il est très regrettable qu'une opposition ne reposant pas toute entière sur des motifs factuels et provenant d'un mathématicien très considéré puisse priver Cantor de la joie des recherches scientifiques. » Minkowski cité dans Hilbert 1911 p.XXVII.

[305] Boniface 2004, chapitre II.

[306] « Il deviendra bientôt trop profond pour moi et plonge constamment vers les concepts et les fondements, là où je voudrais avoir des faits définis », Lettre de Minkowski à Hilbert du 29 décembre 1887 dans Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.33.

> « Sonst beschäftige ich mich noch viel mit Anwendungen. Von der Thermodynamik bin ich auf Chemie gekommen. Ich denke immer, eines Tages Klein gegen seine vielen Angreifer in der Weise beizuspringen, dass ich zeige, dass die Mathematiker auch wirklich etwas für die Praxis leisten können, und zwar besseres als die Bewegungen des Kreisels festzustellen[307]. »

Là encore, ses travaux dans ces domaines pouvent être théoriques (en relativité) mais aussi de nature expérimentale comme pendant les années qu'il passe à Bonn.

1.4 La géométrie des nombres pour Minkowski : une nouvelle discipline des mathématiques ?

Nous avons vu que Minkowski a baptisé lui-même *Geometrie der Zahlen* une partie de ses travaux. Dans cette partie nous essayons de voir ce qui caractérise la géométrie des nombres pour Minkowski. Par exemple, est-ce pour lui une nouvelle discipline des mathématiques ? Si c'est le cas, qu'est-ce qui lui donne son identité, une unité ?
Une autre question qui nous intéresse ici est celle de la place que Minkowski entend faire occuper à ce travail par rapport aux autres disciplines des mathématiques. Le nom de géométrie des nombres suggère déjà qu'il s'agit d'une théorie en interaction avec plusieurs disciplines (géométrie et arithmétique), ce qui est confirmé par les nombreux champs d'applications possibles que nous avons rencontrés. Nous verrons quelle signification Minkowski donne à cette particularité de ce travail.

1.4.1 Des problèmes anciens abordés avec de nouvelles méthodes

Si la géométrie des nombres est une nouvelle discipline des mathématiques, ce n'est pas parce que Minkowski s'intéresse à l'origine à de nouvelles questions ou bien de nouveaux objets d'étude. Les problèmes qui occupent Minkowski ont déjà été traités par d'autres mathématiciens. Rappelons quelques exemples.
La théorie arithmétique des formes est un sujet important de la théorie des nombres du XIX[e] siècle. La définition des formes réduites, la détermination d'estimations pour les minima des formes sont des questions au centre de cette théorie et sur lesquelles Min-

[307] « Sinon je m'occupe encore beaucoup d'applications. De la thermodynamique je suis arrivé à la chimie. Je pense toujours secourir un jour Klein de ses nombreux attaquants en montrant que les mathématiciens peuvent aussi vraiment faire quelque chose pour la pratique et sans doute mieux qu'établir les mouvements d'une toupie. » Lettre de Minkowski à Hilbert du 11 février 1899 dans Rüdenberg et Zassenhaus 1973 p.113.

kowski travaille très tôt dans sa carrière. La théorie des nombres algébriques a connu aussi des développements importants avant Minkowski avec par exemple des travaux de Hermite, Kummer, Kronecker ou Dedekind. En ce qui concerne les fractions continues, les recherches de Minkowski se place dans la continuité des travaux de Lagrange et de Hermite.

Minkowski cite particulièrement Hermite dans ses publications, en effet il a obtenu beaucoup de résultats qui approfondissent les travaux du mathématicien français. Hermite est réciproquement très élogieux dans ses commentaires sur les avancées faites par Minkowski. Dans son discours à l'occasion du décès de Minkowski, Hilbert cite deux extraits de la correspondance de Hermite à Minkowski[308] :

> « Au premier coup d'oeil j'ai reconnu que vous avez été bien au delà de mes recherches en nous ouvrant dans le domaine arithmétique des voies toutes nouvelles. »
> « Je me sens rempli d'étonnement et de plaisir devant vos principes et vos résultats, ils m'ouvrent comme un monde arithmétique entièrement nouveau, où les questions fondamentales de notre science sont traitées avec un éclatant succès auquel tous les géomètres rendront hommage. Vous voulez bien, Monsieur, – et je vous en suis sincèrement reconnaissant – rapporter à mes anciennes recherches le point de départ de vos beaux travaux, mais vous les avez tant dépassées qu'elles ne gardent plus d'autre mérite que d'avoir ouvert la voie dans laquelle vous êtes entré. »

Minkowski considère donc le travail de Hermite comme une source importante pour ses recherches. Mais nous voyons aussi que pour Hermite, le travail de Minkowski n'est pas seulement la continuation de ses « anciennes recherches » mais qu'il est aussi porteur d'innovation. Mais où se trouvent les innovations dans le travail de Minkowski alors qu'il n'aborde pas de nouveaux problèmes ?

Dans les commentaires, ce qui caractérise son travail c'est davantage le développement de nouvelles méthodes dans l'investigation des « questions fondamentales de notre science ». Pour Jean-Pierre Serre par exemple, Minkowski est à l'origine de « l'ensemble de méthodes appelé "géométrie des nombres"[309] ». Parmi les outils importants utilisés par Minkowski et qui avaient été peu ou pas utilisés dans le cadre de la théorie des nombres nous avons rencontré par exemple une nouvelle notion de distance, les réseaux, les corps convexes et la notion de volume. Dans leurs commentaires sur la géométrie des nombres, les mathématiciens n'insistent pas toujours sur la même notion. En 1891 à Halle, Minkowski insiste davantage sur les réseaux de points (voir la citation page 73). En 1909, Hilbert choisit de mettre l'accent sur le concept de corps convexe

[308] Hilbert 1911 p.xiv. D'après Hilbert, le deuxième extrait vient d'une lettre de Hermite à Minkowski de novembre 1892 et le premier d'une lettre écrite deux ans plus tôt.
[309] Serre 1993 p.4.

> « Dieser Umstand führte Minkowski zum ersten Male zu der Erkenntnis, daß überhaupt der *Begriff des konvexen Körpers* ein fundamentaler Begriff in unserer Wissenschaft ist und zu deren fruchtbarsten Forschungsmitteln gehört[310]. »

Un point commun des outils qui viennent d'être cités est qu'ils interviennent tous de manière fondamentale dans le théorème sur les corps convexes centrés sur les points d'un réseaux. Ce théorème est souvent considéré comme le résultat « qui fonde la géométrie des nombres[311]. » En effet, dans toutes les publications de Minkowski sur la géométrie des nombres soit ce théorème est utilisé directement, soit c'est le principe de la démonstration de ce résultat qui est appliqué à une situation particulière. Il apparaît donc que ce théorème caractérise le travail de Minkowski sur la géométrie des nombres.

Ce qui est mis en avant dans les commentaires plus tardifs sur la géométrie des nombres c'est l'introduction de méthodes géométriques en théorie des nombres. Donnons en quelques exemples (dans l'ordre chronologique) :

> « In der *Geometrie der Zahlen* ist von Gedankengängen die Rede, in denen geometrische Begriffe und Methoden auf zahlentheoretische Fragen angewandt werden[312]. »

> « the geometry of numbers as such came into being only when Minkowski brought in the geometric viewpoint[313]. »

> « The geometry of numbers deals with the use of geometric notions[314] »

> « Where other mathematicians had attacked problems of certain types algebraically, Minkowski's genius was to approach them from a geometrical point of view[315]. »

L'intervention de la géométrie dans des questions arithmétiques est certainement ce qui est le plus représentatif de l'image de la géométrie des nombres et du travail de

[310] « Cette circonstance conduisit Minkowski pour la première fois vers la reconnaissance qu'en général, le *concept de corps convexe* est un concept fondamental dans notre science et qu'il fait parti des méthodes les plus fécondes pour la recherche. » Hilbert 1911 p.XI.

[311] Martinet 1996 p.61. Voir aussi à ce sujet la citation extraite de Hardy et Wright 1938 page 76.

[312] « Dans la Géométrie des nombres il est question de raisonnements dans lesquels des concepts et des méthodes géométriques sont appliqués à des questions de théorie des nombres. » Keller 1954 p.27.

[313] Préface de Lekkerkerker 1969.

[314] Goldman 1998 p.440.

[315] Olds et al. 2000 p.3.

Minkowski. L'originalité dans la géométrie des nombres ne réside donc pas tant dans l'introduction de nouveaux objets ni de nouveaux problèmes, mais dans le développement de nouvelles méthodes. La géométrie des nombres serait donc chez Minkowski, un ensemble de techniques de nature géométrique permettant d'étudier des questions arithmétiques sous un angle nouveau. Mais à quel type de géométrie les commentaires précédents font-ils référence ? Comment la caractériser et la situer par rapport à la géométrie de l'époque ?

1.4.2 La géométrie dans la géométrie des nombres de Minkowski

1.4.2.1 Quelques éléments pour caractériser la géométrie

Dans son compte rendu sur le premier livre de Minkowski *Geometrie der Zahlen*, Eugène Cahen écrit à propos de la géométrie qui y est employée :

> « Comme le titre de l'Ouvrage l'indique, c'est par des considérations géométriques que l'auteur arrive à ses théorèmes ; mais ce sont des considérations géométriques d'une espèce particulière[316]. »

La géométrie utilisée dans la géométrie des nombres semble donc perçue comme spécifique.
Pour avoir une idée des thèmes privilégiés dans les recherches en géométrie au tournant des XIX^e^ et XX^e^ siècles, nous reproduisons d'une part la table des matières du tome III de l'édition française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*[317] qui concerne la géométrie (voir la figure 1.9) ; d'autre part, la classification des chapitres de géométrie du volume 26 de l'année 1895 du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (voir la figure 1.10). Nous avons choisi le volume de 1895 car c'est celui qui correspond à l'année avant la publication du livre *Geometrie der Zahlen*, de plus la classification pour les sections de géométrie ne change pas au moins jusqu'en 1902.

Une comparaison des deux montre que parmi les sujets importants se trouvent par exemple la question des fondements, la géométrie analytique, la géométrie synthétique, les coniques et les courbes dans le plan et l'espace (géométrie algébrique). Il est assez difficile de placer la géométrie utilisée par Minkowski dans ce panorama. Il n'existe pas de rubrique particulière pour l'étude de la convexité ou pour les questions de volume. La nouvelle notion de distance introduite par Minkowski n'a pas non plus une place

[316] Cahen 1897 p.25.
[317] Molk 1911-1915.

Tome III — GÉOMÉTRIE

Volume 1 — Fondements de la géométrie. Géométrie générale

fasc. 1 – 30 mars 1911	III-1	Principes de la géométrie **F. Enriques**	1-147
	III-1a	Notes sur la géométrie non-archimédienne **A. Schoenflies**	148-151
	III-2	Les notions de ligne et de surface *(à suivre)* **H. von Mangoldt – L. Zoretti**	152-160
fasc. 2 – 8 juillet 1915	III-2	*(suite et fin)*	161-184
	III-3	Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIXe siècle **G. Fano – S. Carrus**	185-259
	III-4	Géométrie énumérative **H.G. Zeuthen – M. Pieri**	260-331
Elie Cartan, *Œuvres complètes* Partie III, Vol. 2, G.-V., 1955	III-5	La théorie des groupes continus et la géométrie **G. Fano – E. Cartan**	1-135

Volume 2 — Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire

fasc. 1 – 23 décembre 1913	III-8	Géométrie projective **A. Schoenflies – A. Tresse**	1-143
	III-9	Configurations* **E. Steinitz – E. Merlin**	144-160

Volume 3 — Géométrie algébrique plane

fasc. 1 – 25 juin 1911	III-17	Coniques *(à suivre)* **F. Dingeldey – E. Fabry**	1-160
fasc. 2 – 3 août 1915	III-17	*(suite et fin)*	161-162
	III-18	Systèmes de coniques **F. Dingeldey – E. Fabry**	163-256
	III-19	Théorie générale des courbes planes algébriques* **L. Berzolari**	257-304

Volume 4 — Géométrie algébrique dans l'espace

fasc. 1 – 28 avril 1914	III-22	Quadriques **O. Staude – A. Grévy**	1-164

FIG. 1.9 – Table des matière du tome de géométrie de l'*Encyclopédie*

évidente dans ces différents thèmes. Dans l'*Encyclopédie*, les volumes 2, 3 et 4 traitent de sujets différents de ceux de Minkowski et dans le volume 1 nous avons relevé seulement 2 références à son travail[318]. Une concerne la définition de sa notion de distance, l'autre rappelle les définitions qu'il a données de la convexité et d'une surface fermée. Minkowski a aussi publié des articles classés comme de la géométrie dans ses oeuvres complètes. En fait ces publications sont toutes postérieures à *Geometrie der Zahlen* et les thèmes qui sont abordés sont tous liés aux notions géométriques qu'il a utilisées en théorie des nombres. Pour essayer de préciser le statut de la géométrie de Minkowski, nous pouvons donc regarder où ces articles sont classés dans le *Jahrbuch*. Sur les cinq publications recensées dans ses oeuvres en géométrie, trois sont dans des sections de géométrie du *Jahrbuch* : une dans la section 8 (*Reine, elementare und synthetische Geometrie*) chapitre 1 (*Prinzipien der Geometrie*), une dans la section 8 chapitre 2 (*Continuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie)*) et une dans la section 9 (*Analytische Geometrie*) chapitre 3 (*Analytische Geometrie des Raumes*). Les deux autres, qui ne sont donc pas vues comme de la géométrie mais davantage de l'analyse, se

[318]MOLK 1911-1915 p.124 et 183.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.
Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).
Capitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).
Capitel 4. Darstellende Geometrie.
Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.
A. Allgemeines.
B. Besondere ebene Gebilde.
C. Besondere räumliche Gebilde.
D. Gebilde in räummen von mehr als drei Dimensionen.
E. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.
Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.
A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.
B. Theorie der algebraischen Curven.
C. Gerade Linie und Kegelschnitte.
D. Andere specielle Curven.
Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.
A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.
B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.
C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.
D. Andere specielle Raumgebilde.
E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.
Capitel 4. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).
Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.
A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.
B. Conforme Abbildung und dergleichen.

FIG. 1.10 – Classification des chapitres de géométrie du tome 26 du *Jahrbuch*

trouvent dans la section 7, *Differential -und Integralrechnung*, chapitre 4 (*Bestimmte Integrale*) et chapitre 7 (*Variationrechnung*). Ces situations diverses pour les articles de géométrie de Minkowski témoignent bien de la difficulté à caractériser sa géométrie. Leur place permet cependant de mettre en évidence le rôle de la continuité dans son travail et la dimension analytique de sa géométrie.
Un autre aspect important de la géométrie de Minkowski est qu'il s'agit d'une géométrie à n dimensions. Même lorqu'il se contente d'une présentation de ses résultats en dimension 2 ou 3, il donne le plus souvent les indications nécessaires pour une généralisation en dimension quelconque. Tannery remarque dans son compte rendu sur *Diophantische Approximationen*, après avoir dit que Minkowski présente sa méthode en dimension 2 et 3 :

> « Elle s'étend au cas de n variables, grâce au langage de la géométrie à n dimensions, et M. Minkowski donne à l'occasion sur ce sujet des indications

brèves et suffisantes[319] ».

Ceci ne nous semble pas banal pour l'époque. En effet, comme le *Jahrbuch* et l'*Encyclopédie* le montrent, le traitement des dimensions 2 et 3 est un des principes qui organise les classifications et leur étude occupe une grande place. D'autre part, la suite du commentaire de Tannery à propos de la géométrie en dimension quelconque va aussi dans ce sens

> « il [Minkowski] a tenu à s'arrêter sur les deux cas [les dimensions 2 et 3] où le langage géométrique n'est pas un simple verbalisme[320]. »

De même lorsque Cahen parle de « considérations géométriques d'une espèce particulière » (voir la citation précédente de Cahen), il précise tout de suite « qu'il s'agit de Géométrie à n dimensions[321]. »

Dans son étude sur les systèmes d'inégalités linéaires, Tinne Hoff Kjeldsen[322] qualifie aussi d'analytique la présentation que fait Minkowski de sa géométrie. Le travail de Minkowski sur la convexité est décrit dans le contexte de la résolution des systèmes d'inégalités linéaires, point de vue que Minkowski adopte lui-même à la fin du premier chapitre de *Geometrie der Zahlen*. Minkowski relie l'étude des propriétés des convexes à l'existence d'un hyperplan d'appui en tout point de leur frontière. Un tel hyperplan sépare l'espace en deux, dont un contient tous les points du convexe, et chacun de ces demi-espaces est défini par une inéquation linéaire. L'aspect analytique ne provient pas dans ce cadre d'une insistance mise sur la continuité mais sur l'utilisation des équations d'hyperplans[323].

Le dernier point qui permet de qualifier d'analytique la géométrie développée par Minkowski est l'introduction de sa nouvelle notion de distance. Des questions géométriques sur un domaine convexe peuvent être ainsi reformulées de façon analytique avec la fonction distance associée. Minkowski qualifie lui-même de traduction analytique le passage aux fonctions distances dans sa lettre à Hermite de 1891 :

> « La méthode géométrique de mon travail, traduite en langue purement analytique, conduit à ce théorème[324]... »

En fait, pour Minkowski, ce qui caractérise le plus sa méthode géométrique n'est pas l'application dans le cadre de la théorie des nombres des concepts et des méthodes qui

[319] Tannery 1908 p.314-315.
[320] Tannery 1908 p.315.
[321] Cahen 1897 p.25.
[322] Kjeldsen 2002 p.483.
[323] Dans cette tradition de la résolution des systèmes d'inégalités linéaires décrite dans Kjeldsen 2002, il semble que Minkowski ait une certaine postérité et ce problème finit par intégrer la théorie de la convexité dans les années 1930.
[324] Minkowski 1891a p.209-210.

sont fournis par le domaine des mathématiques qu'est la géométrie. C'est davantage l'utilisation de la géométrie dans sa dimension intuitive et c'est ainsi que Minkowski justifie le nom de géométrie des nombres donné à ce travail

> « Geometrie der Zahlen habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin. Doch ist die Darstellung durchweg analytisch, wie dies schon durch den Umstand geboten war, dass ich von Anfang an eine Mannigfaltigkeit beliegen Ordnung betrachte[325]. »

1.4.2.2 Géométrie et *Anschauung* dans la géométrie des nombres

Le mot allemand *Anschauung* qui est utilisé par Minkowski pour caractériser l'emploi qu'il fait de la géométrie pose des problèmes de traduction en français. Le plus souvent il est traduit par *intuition*, mais venant du verbe *anschauen* qui signifie regarder, contempler, il s'agit en fait d'une intuition de nature visuelle. D'ailleurs il est souvent associé chez Minkowski au terme *raum* et se traduit alors par *intuition de l'espace*[326].
D'après Joachim Schwermer[327], l'importance de cette dimension intuitive apparaît déjà en 1887 dans son discours pour son habilitation

> « The ideas presented there were at the heart of Minkowski's geometrical thinking[328]. »

Cette *pensée géométrique* n'est pas seulement caractéristique de ses recherches mathématiques mais semble traverser tout son travail. Peter Galison reprend cette idée de « visual thinking » à propos du travail de Minkowski en mathématique et en physique

> « Characteristic of Minkowski's approach to scientific problems, both mathematical and physical, is his visual-geometric Anschauung[329]. »

Les commentaires de Minkowski mettant en avant l'aspect intuitif de son travail sont assez nombreux. Pensons d'abord au titre donné à l'exposé de la conférence de Chicago en 1893 : *Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind*[330].

---

[325] « J'ai intitulé cet écrit 'Géométrie des nombres' parce que j'ai été conduit aux méthodes qui y fournissent des propositions arithmétiques grâce à l'intuition spatiale. Pourtant la représentation est de bout en bout analytique comme c'était déjà offert par la circonstance que je considérais depuis le début une multiplicité d'ordre quelconque. » Minkowski 1910 p.V.

[326] Il est d'usage dans la tradition philosophique kantienne de séparer *Raumanschauung* (intuition de l'espace) de *Zeitanschauung* (intuition du temps). Les mathématiciens allemands du XIX^{e} siècle sont particulièrement imprégés de cette philosophie. Voir par exemple Rowe 1994 p.197.

[327] Voir Schwermer 1991, 2007.

[328] Schwermer 2007 p.487.

[329] Galison 1979 p.118.

[330] *Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace*, Minkowski 1896c.

Dès 1891, dans son article *Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen*, alors que l'expression géométrie des nombres n'apparaît pas encore, Minkowski parle de « anschauliche Auslegung des Aequivalenzbegriffs[331] ». Dans l'introduction d'un de ses cours le 28 octobre 1897, il remarque que la « geometrischer Anschauung » est la base de son approche de la théorie des nombres

> « Zu ihr [die angewandte Zahlentheorie] kann man vielfach von geometrischer Anschauung zur leichteren Auffindung von Sätzen Gebrauch machen und so entsteht ein Gebiet, welches zuerst in einzelnen Partien bei Gauss, Dirichlet, Eisenstein, Hermite auftaucht und welchem ich den Namen Geometrie der Zahlen gegeben habe. Es handelt sich von demselben also wesentlich um einen Gebrauch räumlicher Anschauung zur Aufdeckung von Beziehungen für ganze Zahlen[332] ».

Minkowski explique le nom de « Geometrie der Zahlen » donné à cette partie de son travail par cette utilisation des possibilités de représentation qu'offre la géométrie

> « Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, vom dem Charles Hermite einmal als der "introduction des variables continues dans la théorie des nombres" gesprochen hat. Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen.
> Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die *Geometrie der Zahlen* bezeichnet habe[333]. »

Les réseaux, qui peuvent être représentés géométriquement et acquièrent ainsi un caractère intuitif, ont une place fondamentale dans la théorie développée par Minkowski

[331] « l'interprétation visuelle du concept d'équivalence », MINKOWSKI 1891b p.288.

[332] « Pour elle (la théorie des nombres appliquée) on peut de multiples façons faire usage d'intuition géométrique afin de trouver plus facilement des propositions et ainsi est né un domaine qui a d'abord été initié pour des parties isolées par Gauss, Dirichlet, Eisenstein, Hermite et auquel j'ai donné le nom de géométrie des nombres. Il s'agit donc essentiellement d'un usage de l'intuition spatiale pour découvrir des relations sur les nombres entiers. » Minkowski cité dans GALISON 1979 p.87.

[333] « Dans ce qui suit je voudrais essayer de donner à grands traits un rapport sur un chapitre spécifique et susceptible de nombreuses applications de la théorie des nombres, un chapitre à propos duquel Charles Hermite a parlé autrefois d'"introduction des variables continues dans la théorie des nombres". Certains problèmes importants concernent ici l'estimation des plus petites contributions d'expressions variables continument pour des valeurs entières des variables.
Les faits intervenant dans ce domaine sont pour la plupart susceptibles d'une représentation géométrique, et cette circonstance a été décisive pour les progrès obtenus ici dans les derniers temps, de sorte que j'ai désigné le domaine entier comme la *Géométrie des nombres.* », MINKOWSKI 1904b p.164.

« In diesem und den nächsten Kapiteln sollen einige Eigenschaften des Zahlengitters entwickelt werden, die sich ebenso durch Anschaulichkeit auszeichnen wie sie mannigfache wichtige Anwendungen zulassen[334]. »

Finalement, ce qui caractérise et donne une unité à l'ensemble des textes qui sont regroupés sous le nom de géométrie des nombres est cette introduction de la géométrie dans des questions de théorie des nombres. Mais ce que Minkowski entend ici par géométrie est avant tout l'utilisation de représentations géométriques qui permettent d'avoir une meilleure intuition des objets étudiés. Pour illustrer l'importance de cette orientation dans le travail de Minkowski, citons une anecdote racontée par Galison d'après un document que lui aurait fourni Lily Rüdenberg la fille de Minkowski. Vers 1907, un étudiant écrit une parodie du catalogue des cours proposés à Göttingen dans lequel il se moque de Minkowski et de ses applications systématiques de la géométrie et de la visualisation à de nombreuses disciplines scientifiques (particulièrement la théorie des nombres) :

« H. Minkowski : Chemical Number Theory (self-advertisement). I can no longer hold back from the mathematical world one of the most interesting results of my application of number theory to chemistry. It concerns the 'periodic system' of the elements which, as everybody knows, is visualized through the following curve… [Minkowski graphs atomic volume against atomic weight.] The result becomes clear through the latest surprising results of Hilbert…and draws on the function I introduce earlier : $?(x), !(x), ;(x), = (x)$ which follows from…

$$\int_{z(a)}^{z(e)} \log \sqrt{?(y)^{(z)}}\, dz\,.$$

My detailed textbook about these matters should appear in the course of the century[335]. »

Cette dimension du travail de Minkowski prend sa place dans un mouvement plus large en particulier à Göttingen[336]. Felix Klein prend position par rapport à ce qu'il nomme l'arithmétisation des mathématiques

« il nous faut repousser cette idée que, dans la Science ainsi arithmétisée, nous aurions, comme en un extrait concentré, l'ensemble total proprement dit de la Mathématique existant déjà[337]. »

[334] « Dans ce chapitre et le suivant quelques propriétés du réseau de nombres doivent être développées qui se laissent autant décrire intuitivement qu'elles offres de multiples et importantes applications. » Minkowski 1910 p.73.

[335] Cité dans Galison 1979 p.111.

[336] Rowe 1989; Parshall et Rowe 1994, chapitre 4.

[337] Klein 1897 p.117.

Il défend une conception des mathématiques dans lesquelles l'intuition a une place importante à côté du raisonnement logique

> « Les développements mathématiques qui tirent leur origine de l'intuition ne peuvent d'autre part être admis comme possession définitive de la Science que lorsqu'ils ont été ramenés à une forme logique rigoureuse. Réciproquement, le traitement abstrait des relations logiques ne peut nous suffire, tant que leur portée n'a pas été vivifiée à l'aide de chaque mode d'intuition et tant que nous n'apercevons pas les combinaisons multiples qui relient le schéma logique, dans le domaine que nous avons choisi, avec les autres parties de nos connaissances[338]. »

Hilbert, souvent présenté comme formaliste, donne lui aussi un rôle à l'intuition par exemple dans l'axiomatisation de la géométrie ou de la physique[339].

Ce mode d'intervention de la géométrie conduit Minkowski à lui donner des fonctions précises, dans certaines situations elle va être préférée à l'analyse. En effet, comme le montre par exemple la comparaison du théorème sur les convexes dans les lettres à Hermite et à l'occasion de la conférence de Chicago, Minkowski a le choix de présenter son travail de façon géométrique ou plus analytique. Nous allons maintenant voir qu'il semble que ce choix est guidé par les valeurs différentes que Minkowski attribue à l'analyse et à la géométrie.

1.4.2.3 Les fonctions respectives de la géométrie et de l'analyse dans la géométrie des nombres chez Minkowski

Nous avons déjà noté que les notions géométriques utilisées par Minkowski comme les distances radiales, le volume, la convexité sont valables en dimension quelconque. Cependant il fait une différence lorsqu'il expose son travail en dimension inférieure à 3 par rapport à une présentation faite en dimension n. Dans les petites dimensions Minkowski préfère des présentations géométriques alors qu'il se tourne davantage vers l'analyse lorsqu'il se place en toute généralité. Rappelons la fin de la citation de la page 135 extraite de *Geometrie der Zahlen* :

> « Doch ist die Darstellung durchweg analytisch, wie dies schon durch den Umstand geboten war, dass ich von Anfang an eine Mannigfaltigkeit beliebiger Ordnung betrachte[340]. »

[338] Klein 1897 p.128.
[339] Voir Hilbert et Cohn-Vossen 1952; Boniface 2004; Corry 2000, 2002, 2006; Toepell 2005.
[340] Minkowski 1910 p.V.

Toujours dans la *Geometrie der Zahlen*, il justifie de manière encore plus claire que la nécessité d'une présentation analytique est liée à la question de la dimension :

> « Ich bin zu meinen Sätzen durch räumliche Anschauungen gekommen [...] Weil aber die Beschränkung auf eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen unthunlich erschien, so habe ich die Darstellung hier rein analytisch gefasst, nur befleissige ich mich des Gebrauchs solcher Ausdrücke, die geeignet sind, geometrische Vorstellungen wachzurufen[341]. »

Nous voyons que la question de la dimension est indissociable de celle de l'intuition. Pour Minkowski, l'intuition de l'espace n'est possible qu'en dimension 3 d'où la présentation analytique en dimension plus grande. Cependant, ce qui est exposé en dimension quelconque est suggéré par l'intuition des phénomènes en dimension 3. Le vocabulaire et les notions employées doivent donc rappeler cette origine intuitive qui se trouve dans les représentations géométriques, possibles dans les dimensions 2 et 3. Cette remarque est faite par Cahen dans son compte rendu sur le livre *Geometrie der Zahlen* :

> « Dans le cas particulier de $n = 3$, la représentation géométrique rend intuitif ce fait qu'il doit y avoir une relation entre le volume du corps et le nombre maximum ou minimum de points du réseau qu'il contient[342]. »

La dimension plus intuitive qui est ainsi donnée à la théorie des nombres est aussi soulignée par Klein en 1895

> « la discipline qui, pendant bien longtemps, a semblé la plus étrangère à l'intuition, je parle de la théorie des nombres, vient de prendre un nouvel et brillant essor par l'introduction des méthodes intuitives entre les mains de Minkowski et d'autres[343]. »

Nous avons déjà vu (voir page 92) que pour Klein une conséquence importante d'une approche par des méthodes géométriques est qu'elles permettent de simplifier la théorie à laquelle on s'intéresse.

Nous retrouvons ce thème de la simplicité dans le commentaire de Hilbert sur le théorème de Minkowski sur les corps convexes. Hilbert met en avant la simplicité du principe se trouvant derrière ce résultat par rapport à l'importance des problèmes qu'il permet de traiter

> « Minkowski succeeded in proving a theorem on lattices which has, despite its simplicity, resolved many problems of Number Theory that could not be treated by other methods[344]. »

[341] « Je suis arrivé à mes propositions par l'intuition spatiale [...] Mais parce que la limitation à une multiplicité de dimension trois paraît inopportune, j'ai fait ici une présentation purement analytique, je me suis seulement efforcé par l'usage d'expressions appropriées à rendre attentif aux représentations géométriques. » Minkowski 1910 p.VI.

[342] Cahen 1897 p.26-27.

[343] Klein 1897 p.124.

[344] Hilbert et Cohn-Vossen 1952 p.41.

Il est intéressant de noter dans cette citation que la simplicité n'est pas *a priori* une valeur positive pour Hilbert. Il semble préférer juger de la qualité d'une méthode ou d'une preuve par sa fécondité pour des recherches ultérieures :

> « On ne juge pas en soi-même quelle est, parmi plusieurs démonstrations, la plus simple et la plus naturelle ; il faut d'abord savoir si les principes invoqués sont susceptibles d'une généralisation et s'ils peuvent nous conduire à d'autres recherches[345]. »

Minkowski commente aussi cet avantage des méthodes géométriques dans la conclusion de *Diophantische Approximationen*

> « die Einfachheit der später zu befolgenden geometrischen Methoden ins rechte Licht zu setzen[346]. »

Cette simplicité vient en particulier du fait que les représentations géométriques permettent de donner une image d'objets mathématiques abstraits

> « Nunmehr entwarfen wir das geometrische Bild des Zahlengitters. [...] Wir wandten uns weiter dem allgemeinen Begriffe der algebraischen ganzen Zahlen zu. Wir erkannten das Zahlengitter als ein die Auffassung äußerst erleichterndes Bild der Gesamtheit der ganzen Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper[347] ».

Comme la géométrie permet de rendre plus simple et plus intuitive la théorie, Minkowski lui donne une fonction pédagogique. Le terme *Anschauung* porte en fait cette dimension pédagogique depuis le début du XIX^e^ siècle et la philosophie de l'éducation de Johann Heinrich Pestalozzi[348]. L'utilisation de représentations géométriques permet de faire comprendre des problèmes mathématiques difficiles même à des non spécialistes

> « Daß Minkowski auch Nichtfachleuten durch die Heranziehung treffender Gleichnisse und anschaulicher Bilder über schwierige mathematische Gegenstände vorzutragen und in ihnen eine Vorstellung von der Größe und Erhabenheit unserer Wissenschaft zu erwecken wußte[349] ».

La comparaison des présentations faites du théorème sur les convexes dans les lettres à Hermite et à la conférence de Chicago et l'exposé de 1891 à Halle nous ont permis

[345] Hilbert 1991 p.VI.

[346] « de mettre dans leur vraie lumière la simplicité des méthodes géométriques à suivre ultérieurement. » Minkowski 1907 p.234.

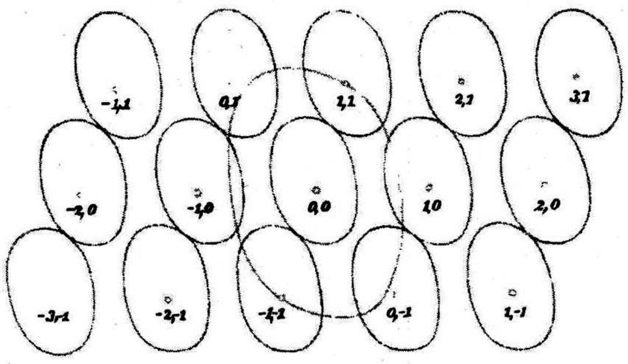
[347] « Jusqu'à présent nous esquissions l'image géométrique du réseau. [...] Nous nous tournions ensuite vers le concept général des nombres entiers algébriques. Nous reconnaissions dans le réseau une image de l'ensemble des entiers dans un corps de nombres algébriques facilitant extrêmement la représentation », Minkowski 1907 p.234.

[348] Arnheim 1976; Bullynck 2006; Gray 1999 p.73.

[349] « que Minkowski savait exposer aussi à des non spécialistes des objets mathématiques difficiles en ayant recours à des comparaisons frappantes et à des images intuitives et savait éveiller en eux une représentation de la grandeur et du charme de notre science », Hilbert 1911 p.XXVIII.

de voir que Minkowski fait le choix de la géométrie lorsqu'il s'adresse à des non spécialistes des thèmes qu'il traite (voir le paragraphe 1.3.1.5). Il se sert de la géométrie pour communiquer sur son travail à une autre occasion, il s'agit du congrès international des mathématiciens en 1904 à Heidelberg[350]. Il propose alors un exposé dans lequel sur un certain nombre de théorèmes obtenus dans le cadre de la géométrie des nombres. Chaque résultat présenté est systématiquement accompagné d'un dessin illustrant la démarche employée pour sa démonstration, si bien que dans les oeuvres complètes de Minkowski sur les 18 pages dans lesquelles est reproduit cette conférence 8 sont occupées par ces représentations géométriques. Par exemple, la preuve du théorème sur les corps convexes à centre est illustrée par la figure 1.11.

Fig. 1. Zahlengitter und konvexe Kurven.



$$f(x, y):$$

$$(1) \quad f(x, y) > 0, \quad x, y \neq 0,0; \quad f(0,0) = 0,$$

$$(2) \quad f(tx, ty) = t f(x, y), \quad t > 0,$$

$$(3) \quad f(-x, -y) = f(x, y),$$

$$(4) \quad f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \geqq f(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(5) \quad f(x, y) \leqq 1, \quad \iint dx\,dy = J;$$

$$(6) \quad f(x, y) \leqq \frac{2}{\sqrt{J}}.$$

Fig. 1.11 – Illustration utilisée par Minkowski en 1904 à Heidelberg.

Minkowski rejoint à nouveau une préoccupation de Hilbert. Son livre *Anschauliche Geometrie*, publié en 1932, est issu d'un cours donné à Göttingen dans les années 1920-1921 et retravaillé ensuite par Cohn-Vossen. Dans la préface où il explique que son objectif est justement de présenter la géométrie dans ses aspects visuels et intuitifs, Hilbert remarque :

« Thus a presentation of geometry in large brushstrokes, so to speak, and based on the approach through visual intuition, should contribute to a more

[350]Minkowski 1904b.

> just appreciation of mathematics by a wider range of people than just the specialists[351]. »

Minkowski n'est donc pas le seul à voir dans la géométrie un moyen de rendre plus intuitif et simplifier les mathématiques. Cependant sa démarche est perçue comme originale à cause de la place qu'elle occupe dans l'heuristique. Cette originalité est relevée dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* où les auteurs comparent justement l'emploi de la géométrie en théorie des nombres chez Klein et chez Minkowski :

> « Comme H. Minkowski, F. Klein a cherché à représenter géométriquement d'une façon systématique les principaux résultats de la théorie des nombres en particulier ceux qui se rapportent aux formes quadratiques binaires. Ses recherches diffèrent de celles de H. Minkowski en ce qu'elles ont moins servi à trouver des résultats nouveaux qu'à rendre intuitifs et plus simples des résultats déjà connus[352]. »

Nous retrouvons que l'idée commune aux deux mathématiciens que la géométrie facilite l'intuition et simplifie mais pour Minkowski elle joue aussi un rôle dans la découverte de « nouveaux résultats ». Cet aspect de l'intervention de la géométrie dans le travail de Minkowski est aussi commenté par Klein qui note à propos de la conférence faite à Chicago :

> « La géométrie y est employée directement à développer de nouvelles vérités arithmétiques[353] ».

Cette idée que l'intuition apportée par la géométrie est à l'origine de la découverte pour le mathématicien apparaît à plusieurs reprises chez Minkowski[354]. Par exemple, Il ouvre sa conférence à Chicago avec la phrase

> « Dans la théorie des nombres, comme dans chacun des autres domaines de l'Analyse, la découverte a lieu fréquemment au moyen de considérations géométriques, tandis qu'ensuite les vérifications analytiques sont peut-être seules communiquées[355]. »

Dans un premier temps, la recherche de théorèmes nouveaux est donc guidée par la géométrie qui intervient à travers la représentation qu'elle permet des problèmes étudiés. Ensuite seulement la présentation analytique est élaborée pour donner des preuves des résultats dans toute leur généralité (dimension quelconque) ou encore pour communiquer son travail à l'intention des spécialistes des mathématiques.

[351] Hilbert et Cohn-Vossen 1952 p.iii-iv.
[352] Cahen et Vahlen 1908 p.120.
[353] Klein 1898 p.58.
[354] Voir en particulier le début des citations déjà données page 136 et page 139.
[355] Minkowski 1896c p.393.

1.4.3 La place de la géométrie des nombres dans les mathématiques

1.4.3.1 La géométrie des nombres à la frontière entre plusieurs disciplines

La géométrie des nombres est considérée comme appartenant à la théorie des nombres. Nous le voyons à travers les commentaires des mathématiciens à son sujet mais aussi parce que les articles de Minkowski que nous avons présentés sont classés dans la section du *Jahrbuch* qui concerne l'arithmétique. Mais nous avons vu que la géométrie des nombres est en interaction avec de nombreux thèmes de la théorie des nombres : la théorie arithmétique des formes, l'approximation diophantienne, les fractions continues, les corps de nombres algébriques...
L'appartenance à l'arithmétique ne semble pas contestée certainement à cause des résultats qu'elle permet d'obtenir et de son origine dans la théorie arithmétique des formes quadratiques. Cependant la situation de la géométrie des nombres dans l'ensemble des mathématiques n'est pas toujours aussi claire. Nous avons montré que la géométrie y intervient de manière cruciale mais l'analyse aussi y trouve une place importante. C'est d'ailleurs l'analyse qui est mis d'abord en avant par Minkowski quand il présente son livre *Geometrie der Zahlen*

> « Diese Schrift enthält eine neue Art Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie[356] ».

Minkowski parle aussi de présentation analytique de son travail lorsqu'il est exprimé à l'aide de fonctions φ vérifiant les trois propriétés énoncées par exemple dans les lettres à Hermite (voir les conditions page 82).
En fait, quelle que soit la méthode employée, la présentation adoptée ou encore le problème étudié, la géométrie paraît être toujours présente dans le travail de Minkowski sur la géométrie des nombres. Parfois parce qu'il s'agit de recherches qu'il exprime de façon purement géométrique, c'est par exemple le cas lors de la conférence de Chicago[357]. Mais le plus souvent nous l'avons vu, la géométrie est associée à un autre point de vue analytique ou arithmétique. La géométrie se trouve alors à l'arrière plan et peut toujours être mobilisée pour donner un autre cadre dans lequel peut s'interpréter le travail en cours. Quand Minkowski décrit à Hermite les fonctions φ (qu'il appelle à d'autres occasions distances radiales) en termes analytiques, toutes les propriétés analytiques de ces fonctions ont une interprétation géométrique : $\varphi(x) = \varphi(-x)$ correspond à la symétrie du corps étalon par rapport à un point, l'inégalité $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)+\varphi(y)$ à sa convexité etc... Quand il s'intéresse à des problèmes arithmétiques sur les formes quadratiques là-encore la traduction géométrique n'est jamais loin. La question du minimum de ces

[356] « Cet écrit contient une nouvelle sorte d'applications de l'analyse de l'infini à la théorie des nombres », Minkowski 1910 p.IV.
[357] Minkowski 1896c.

formes pour des valeurs entières des variables a une signification en termes de distance entre les points d'un réseau. L'équivalence et la réduction sont étudiées en introduisant un domaine dont les propriétés géométriques (la convexité) fournissent un cadre pour travailler sur les formes quadratiques réduites.
Il apparaît donc que la géométrie des nombres est une théorie où se rencontrent analyse, arithmétique et géométrie mais où la géométrie occupe une place particulière en étant toujours adossée aux autres domaines.

1.4.3.2 La question de l'unité des mathématiques

En 1893, Klein considère que la théorie des nombres est à part du reste des mathématiques

> « La théorie des nombres est regardée d'habitude comme quelque chose d'excessivement difficile et abstrait, et n'ayant presque aucun rapport avec les autres branches de la science mathématique[358]. »

Minkowski voit lui les mathématiques divisées en deux grandes parties : d'un côté le domaine du continu avec la géométrie et l'analyse, d'autre part le domaine du discret avec l'arithmétique[359]. Cette opposition entre discret et continu semble très importante pour Minkowski. L'introduction des variables continues est pour lui une étape importante dans le travail en théorie des nombres[360], dans les toutes premières phrases de *Diophantische Approximationen* il revient sur cette question :

> « Der Urquell aller Mathematik sind die ganzen Zahlen. Dies verstehe ich nicht bloß in dem althergebrachten Sinne, daß auch der Begriff des Kontinuums sich aus der Betrachtung diskreter Mengen ableitet[361]. »

Mais Minkowski manifeste sa croyance en l'unité préétablie entre les disciplines des mathématiques. Dans la géométrie des nombres, il fait un lien entre des objets du domaine du continu (le volume, l'intégral) et des objets de nature discrète (les nombres entiers, le réseau) et cela en particulier à travers le théorème sur les points d'un réseau dans un corps convexe à centre. Ceci a donc pour conséquence pour Minkowski de rétablir l'unité des mathématiques

[358] KLEIN 1898 p.58.
[359] Cette séparation entre ces deux domaines est en partie héritée de Gauss. Avant lui la théorie des nombres était vue comme appartenant à l'analyse (analyse s'oppose ici à synthèse et ne désigne pas le domaine des mathématiques qui se développe par la suite autour, par exemple, de la notion de fonction). Voir GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007a p.21-22.
[360] Voir la citation dans laquelle il revient sur cet aspect du travail d'Hermite page 136.
[361] « La source de toutes les mathématiques sont les nombres entiers. Je n'entends pas cela seulement dans l'ancienne acception selon laquelle le concept de continu lui-même dérive de la considération d'ensembles discrets. » Préface de MINKOWSKI 1907.

> « daß es sich hier um Fragen handelt, welche die Fundamente der Größenlehre berühren, welche der Auffassung leicht zugänglich sind und welche uns die Disziplinen der Algebra, Arithmetik, Geometrie in harmonischer Wechselwirkung zeigen[362]. »

L'unité est donc obtenue par l'introduction d'un point de vue géométrique qui permet de réunir des résultats arithmétiques dispersés

> « welche Fülle der verschiedenartigsten und tiefliegendsten arithmetischen Wahrheiten werden in diesem Hauptwerke Minkowskis durch das geometrische Band gehalten und verknüpft[363] ! »

Minkowski n'est pas le seul mathématicien du XIX^e^ siècle à poser la question de l'unité des mathématiques. Dans la préface du *Zahlbericht*, Hilbert revient sur les liens entretenus par différents domaines des mathématiques en plaçant au centre la notion de corps de nombres algébriques. Hermite, qui est avant tout un analyste, pense que c'est l'analyse qui permet de réaliser l'unité[364]

> « Dans cette immense étendue de recherches qui nous a été ouverte par M. *Gauss*, l'Algèbre et la Théorie des Nombres, me paraissent devoir se confondre dans un même ordre de notions analytiques, dont nos connaissances actuelles ne nous permettent pas encore de nous faire une juste idée[365]. »

Le fait qu'Hermite réussit à surmonter cette opposition entre discret et continu par le recours à l'analyse est aussi souligné par Henri Poincaré lors du jubilé scientifique d'Hermite en 1892 :

> « La théorie des nombres cessait d'être un dédale grâce à l'introduction des variables continues sur un terrain qui semblait réservé exclusivement à la discontinuité. L'analyse sortant de son domaine vous amenait ainsi un précieux renfort[366]. »

Cette recherche de l'unité peut cependant prendre différentes formes selon les mathématiciens. Cela peut par exemple se traduire par des échanges de méthodes ou de concepts entre les domaines[367]. Avec Minkowski, des notions empruntées à un domaine (par exemple la convexité à la géométrie) sont utilisées dans un autre (la théorie des

---

[362] « qu'il s'agit ici de questions qui touchent aux fondements de la théorie des grandeurs qui sont d'accès facile à la compréhension et qui nous montrent les disciplines de l'algèbre, de l'arithmétique et de la géométrie en interaction harmonieuse. » MINKOWSKI 1904b p.173.

[363] « quelle quantité de vérités arithmétiques variées et profondes sont contenues, entrelacées par le lien géométrique, dans ce grand ouvrage de Minkowski ! » HILBERT 1911 p.XIV.

[364] Voir GOLDSTEIN 2008.

[365] HERMITE 1850 p.291.

[366] POINCARÉ 1893.

[367] GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007a p.53 où des exemples sont donnés.

nombres). Mais ce qui caractérise surtout l'unité, c'est la présence constante de la géométrie dans sa dimension intuitive qui englobe l'ensemble de la théorie.

Il est intéressant de noter que Minkowski croit aussi en l'harmonie préétablie entre les mathématiques et la physique[368] et que dans ce cas l'unité doit à nouveau provenir de la géométrie. Il s'agit cette fois de géométriser la théorie de la relativité dans laquelle Minkowski introduit la notion d'espace-temps[369]. Cette question de l'harmonie est une conséquence de sa théorie qu'il met en avant dans la conférence de Cologne en 1908 :

> « ceux qu'effraie ou que chagrine l'idée de changer quelque chose aux vieilles conceptions habituelles pourront se réconcilier avec lui, à la pensée d'une harmonie préétablie entre la Mathématique pure et la Physique[370]. »

Conclusion

Le résultat central de la géométrie des nombres chez Minkowski est le théorème sur l'existence d'un point d'un réseau dans un corps convexe possédant un centre de symétrie

> « dasjenige Theorem, welches mit Recht als das *Fundamentaltheorem* der Geometrie der Zahlen bezeichnet werden kann, weil es fast in jede Untersuchung auf diesem Gebiete hineinspielt[371]. »

Ce théorème est emblématique de la géométrie des nombres et lui donne en partie son identité. C'est un résultat avec des applications nombreuses dans divers domaines de la théorie des nombres, mais c'est aussi le paradigme pour une méthode. La démarche utilisée dans sa preuve (illustrée par la figure 1.11) est en effet reprise dans d'autres situations comme par exemple pour démontrer l'existence d'entiers x, y tels que

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \ \leq \ \frac{1}{4}\,,$$

où ξ et η sont des formes linéaires de déterminant 1 (voir page 113).

Un autre aspect essentiel de la géométrie des nombres de Minkowski est l'utilisation qui est faite de la géométrie. La géométrie qui intervient dans le travail de Minkowski est très spécifique. La notion de convexité est cruciale et d'une façon plus générale il

[368] Voir Galison 1979.
[369] Walter 1996 p.248.
[370] Minkowski 1909a p.517.
[371] « ce théorème qui peut avec droit être décrit comme le théorème fondamental de la géométrie des nombres parce qu'il intervient dans presque toutes les recherches de ce domaine. » Minkowski 1904b p.164.

utilise une géométrie qui peut être traduite analytiquement (par exemple en termes de fonctions distances ou de systèmes d'inégalités). Mais ce qui est encore plus caractéristique dans la géométrie des nombres de Minkowski, c'est l'emploi de représentations géométriques pour les phénomènes qui sont étudiés. Ce mode d'intervention de la géométrie amène Minkowski à l'utiliser dans des situations précises et en particulier pour favoriser l'intuition. Finalement, tout ce discours autour de l'*Anschauung* fonde pour Minkowski le lien de cette nouvelle discipline qu'il a baptisée *géométrie des nombres.* Hilbert revient sur tous ces aspects du travail de Minkowski en 1909 :

> « Dieser Beweis eines tiefliegenden zahlentheoretischen Satzes ohne rechnerische Hilfsmittel wesentlich auf Grund einer geometrisch anschaulichen Betrachtung ist eine Perle Minkowskischer Erfindungskunst. [...]
> Aber der obige Satz vom Volumen des Eichkörpers, den ich einen der anwendungsreichsten der Arithmetik nannte, bildet doch nur das Anfangsglied einer Reihe weiterer auf geometrischer Anschauung fußender Schlußweisen von weittragender Bedeutung[372]. »

Des critères de type internalistes apparaîssent donc bien adaptés à la définition de la géométrie des nombres comme discipline. Elle est caractérisée par des objets (distances, convexes), des résultats clés (les théorèmes sur les convexes), un système de preuves (le raisonnement dans la démonstration du théorème de Minkowski sur les convexes), des méthodes privilégiées (géométriques) et une systématique (théorème fondamental et ses applications). De plus, la discipline est intégrée au reste de la théorie des nombres par ses applications à des sujets variés comme l'approximation diophantienne ou les nombres algébriques ; mais aussi au reste des mathématiques par ses liens avec la géométrie, l'analyse et l'arithmétique.
Par contre, d'un point de vue social, la géométrie des nombres ne paraît pas être une construction collective. Elle n'est pas élaborée par un groupe de mathématiciens qui partageraient un paradigme commun, Minkowski participe seul au développement de la discipline. Ceci est bien illustré par les sources de Minkowski sur la géométrie des nombres que nous avons présentées au paragraphe 1.2. Les références de Minkowski sur la géométrie des nombres sont des mathématiciens décédés quand il commence à travailler sur ce sujet (Gauss, Dirichlet), ou bien qui se sont tournés vers d'autres thèmes de recherche (Hermite).
En revanche, Minkowski partage avec d'autres mathématiciens comme Hilbert ou Klein

[372] « Cette preuve d'un théorème profond de théorie des nombres sans moyen calculatoire, reposant essentiellement sur une considération géométrique intuitive est une perle de l'art heuristique de Minkowski. [...]
Mais la proposition ci-dessus sur le volume d'un corps étalon, que je nomme l'une des riches en application de l'arithmétique, ne forme pourtant que le début d'une série de plus vastes conclusions basées sur l'intuition géométrique et d'une grande portée. » Hilbert 1911 p.X-XI et p.XIII.

une conception commune sur l'organisation d'une discipline. Par exemple, dans le *Zahlbericht*, Hilbert met au centre de l'étude des nombres algébriques la notion de corps de nombres. Il privilégie certaines méthodes (par exemple celle de Hurwitz-Kronecker devant celle de Dedekind pour la preuve de la décomposition d'un idéal en produit d'idéaux premiers) et il offre un traitement systématique de la théorie. Il y a aussi des points communs dans la manière dont Hilbert et Minkowski envisagent l'enseignement de leurs travaux respectifs. Dans les cours, la théorie des corps de nombres est développée dans les cas particuliers des corps quadratiques et cubiques par Hilbert et ses élèves[373]. De même, dans *Diophantische Approximationen*, Minkowski insiste sur la géométrie des nombres en dimension 2 et 3.
Les échelles d'analyse sont ici pertinentes pour voir à quels niveaux les facteurs collectifs ou intellectuels agissent dans la construction de la géométrie des nombres en tant que discipline.

Ce premier chapitre était centré sur la pratique mathématique de Minkowski. Avec le chapitre suivant, nous passons à un autre niveau en analysant la production collective de recherche sur la géométrie des nombres.

[373]Schappacher 2005 p.701 et 704.

Chapitre 2

Trois terrains d'observation pour repérer la géométrie des nombres après Minkowski : le *Jahrbuch*, les livres, l'*Enzyklopädie*

Sommaire

Une question qui surgit rapidement lorsque l'on essaie de faire l'histoire d'une discipline scientifique est celle de ses limites. Nous devons délimiter la recherche pertinente effectuée sur le sujet, repérer les thèmes mathématiques qui relèvent de la discipline ou encore les mathématiciens qui participent à son développement.
Pour les mathématiques deux méthodes ont principalement été utilisées par les historiens. Nous disposons de plusieurs classifications comme par exemple celle du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* entre 1868 et 1942, celle de *l'index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques* de 1893 à 1916 ou bien maintenant celle des *Mathematical Reviews*. Ces classifications qui organisent les connaissances mathématiques en disciplines, sous-disciplines etc, fournissent une première approche pour aborder les questions précédentes.

Ces classifications, qui sont en fait le reflet du point de vue d'un spécialiste ou d'un groupe de spécialistes, posent cependant des problèmes : elles bougent dans le temps, elles ne sont pas toutes équivalentes[1] et un même vocabulaire à différentes époques peut cacher des réalités diverses[2].
Une autre stratégie consiste justement à regarder comment les spécialistes caractérisent la discipline. Le problème avec le point de vue des spécialistes est qu'il n'est pas toujours le même : il change d'un mathématicien à l'autre, d'une époque à une autre et pour un même scientifique il évolue aussi parfois au cours de sa carrière. De plus, la manière avec laquelle le spécialiste se repère à l'intérieur des disciplines mathématiques n'est pas nécessairement opératoire pour l'analyse historique. Pour citer un cas extrême, voyons ce que dit André Weil à propos de la théorie des nombres :

> « Perhaps, before I go on, I ought to say something about what number-theory is. Housman, the English poet, once got one of those silly letters of inquiry from some literary magazine, asking him and others to define poetry. His answer was "If you ask a fox-terrier to define a rat, he may not be able to do it, but when he smells one he knows it." When I smell number-theory I think I know it, and when I smell something else, I think I know it too[3]. »

Tout cela témoigne de la difficulté à délimiter une discipline scientifique particulière.

Comme cela a été rappelé dans l'introduction, les travaux sur la notion de discipline scientifique ont mis en évidence deux types de facteurs dans la définition d'une discipline. D'une part, des facteurs sociaux et institutionnels (journaux spécialisés, postes universitaires, organisation de séminaires ou de conférences, soutien financier alloué à la discipline etc), d'autre part, des critères scientifiques : la discipline est caractérisée par un certain nombre de concepts fondamentaux

> « To mathematicians a theory is a collection of ideas relating to mathematical objects[4]. »

Par exemple pour la théorie des nombres :

> « The higher arithmetic, or the theory of numbers, is concerned with the properties of the natural numbers 1, 2, 3, ...[5] »

C'est pour déterminer ces aspects de la définition de la discipline que l'opinion des spécialistes est sollicitée et que les classifications des journaux sont utilisées.

[1]Voir Goldstein 1999 p.198-199 pour une illustration des différences entre des classifications.
[2]Gispert 1991 p.76-77.
[3]Weil 1974 p.280.
[4]Fisher 1966-1967 p.137.
[5]Davenport 1952 p.7.

Dans ce chapitre, trois indicateurs sont mobilisés pour repérer la géométrie des nombres après le travail de Minkowski : d'abord le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui doit donner un accès à la production de recherche sur ce sujet dans la première moitié du XX^e siècle ; ensuite, les manuels sur la géométrie des nombres publiés après 1950 ; enfin la synthèse de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Les deux derniers fourniront un regard rétrospectif sur la période de recherche qui nous intéresse ici.

2.1 Un premier repérage dans le *Jahrbuch*

La première source que nous utilisons pour étudier les développements de la géométrie des nombres à partir du travail de Hermann Minkowski est le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. En effet, il propose un recensement de tous les articles et livres de mathématiques publiés à partir de 1868[6] et jusqu'en 1942. Les articles sont classés par thèmes d'abord dans des « Abschnitte », comme par exemple *Geschichte und Philosophie* ou bien *Algebra*[7] qui sont elles-mêmes divisées en chapitres (Capitel 1 : *Geschichte*, Capitel 2 : *Philosophie*) qui peuvent être à leur tour organisés avec différentes parties.

Le *Jahrbuch* semble donc être un outil particulièrement efficace pour repérer les travaux effectués dans un domaine précis des mathématiques ce qui est ici notre objectif[8]. Nous allons cependant voir qu'un certain nombre de difficultés apparaissent et qu'elles vont nous amener à faire des choix qui doivent conduire à s'interroger sur la signification d'un tel recensement, ses limites et sur l'image qu'il produit de la géométrie des nombres.

Le premier choix à faire, qui n'est pas spécifique à l'utilisation du *Jahrbuch*, est de savoir en quelle année commencer le dépouillement. Si nous regardons les commentaires faits par des mathématiciens sur la géométrie des nombres au cours du XX^e siècle, tous s'accordent pour situer sa naissance dans le travail de Minkowski. Dans ses *Gesammelte Abhandlungen*[9], qui sont publiées en 1911, une partie regroupe ses travaux sur la géométrie des nombres et le premier article sur ce sujet est de 1891, c'est donc à cette date que nous avons choisi de débuter le recensement dans le *Jahrbuch*.

[6] Le premier volume est publié en 1871.

[7] Comme nous le verrons la classification change pendant la période où le *Jahrbuch* est publié, ces exemples et les suivants sont issus pour l'instant du volume 1.

[8] Pour un autre exemple de repérage d'un courant de recherche scientifiques (les théories unitaires) qui utilise entre autre le *Jahrbuch* voir Goldstein et Ritter 2003.

[9] Minkowski 1911.

Nous devons ensuite déterminer dans quelles rubriques du *Jahrbuch* aller chercher les textes qui concernent la géométrie des nombres. Voyons pour cela quelle classification il propose en 1891.

2.1.1 La classification du *Jahrbuch* en 1891

Le premier niveau de classement est comme nous l'avons dit les « Abschnitte ». Le volume de l'année 1891 en compte douze :

- Erster Abschnitt : *Geschichte und Philosophie*
- Zweiter Abschnitt : *Algebra*
- Dritter Abschnitt : *Niedere und höhere Arithmetik*
- Vierter Abschnitt : *Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung*
- Fünfter Abschnitt : *Reihen*
- Sechster Abschnitt : *Differential- und Integralrechnung*
- Siebenter Abschnitt : *Functionentheorie*
- Achter Abschnitt : *Reine, elementare und synthetische Geometrie*
- Neunter Abschnitt : *Analytische Geometrie*
- Zehnter Abschnitt : *Mechanik*
- Elfter Abschnitt : *Mathematische Physik*
- Zwölfter Abschnitt : *Geodäsie, Astronomie, Meteorologie*

Si nous regardons quelques définitions de la géométrie des nombres données par des mathématiciens il apparait qu'elle est considérée comme faisant partie de la théorie des nombres :

> « The geometry of numbers is a branch of number theory[10] ».
>
> « The geometry of numbers deals essentially with an arithmetical question[11] ».
>
> « In the geometry of numbers, we treat a general class of problems in number theory[12] ».

Nous nous intéressons donc plus particulièrement à la troisième section *Niedere und höhere Arithmetik* qui est elle-même divisée en trois chapitres :

- Capitel 1 : *Niedere Arithmetik*
- Capitel 2 : *Zahlentheorie*
  - A. *Allgemeines*
  - B. *Theorie der Formen*
- Capitel 3 : Kettenbrüche

[10] Olds et al. 2000 p.xiii.
[11] Mordell 1961 p.89-90.
[12] Davenport 1948.

Les travaux de Minkowski sur la géométrie des nombres étant issus de son intérêt pour l'étude arithmétique des formes, nous nous attendons à trouver la géométrie des nombres dans la section B du chapitre 2. Mais nous remarquons que la géométrie des nombres n'apparait pas de façon explicite dans la classification de cette troisième partie et elle est même absente de la classification de tout le volume de 1891. Cela n'a rien d'étonnant car le travail de Minkowski sur ce sujet commence juste et c'est lui qui baptise ainsi cette théorie. Ce qui est en revanche plus singulier, c'est que cette situation va se prolonger jusqu'au volume 46 des années 1916-1918. Pendant cette période, il n'est donc pas possible de trouver les textes concernant la géométrie des nombres en cherchant ce thème dans la classification. Nous pouvons par contre essayer d'adopter la démarche inverse : partir de textes considérés comme appartenant à la géométrie des nombres et voir où ils sont classés dans le *Jahrbuch* et ainsi repérer les rubriques de la classification pertinentes pour notre sujet.
Quels textes suffisamment représentatifs de la géométrie des nombres peuvent nous servir de témoins ? À nouveau nous pouvons utiliser le fait que Minkowski est vu comme l'origine incontestée de la géométrie des nombres. Nous allons reprendre ses articles classés comme de la géométrie des nombres dans ses *Gesammelte Abhandlungen* puis les situer dans la classification du *Jahrbuch*.

2.1.2 Les articles de Minkowski sur la géométrie des nombres

Dans ses *Gesammelte Abhandlungen* le travail de Minkowski est séparé en cinq grands thèmes de recherche :
- *Zur Theorie der quadratischen Formen*
- *Zur Geometrie der Zahlen*
- *Zur Geometrie*
- *Zur Physik*
- *Rede auf Dirichlet*

Les articles recensés dans la partie sur la géométrie des nombres sont les suivants :

(1) « Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 107, S.278-297, 1891.

(2) « Théorèmes arithmétiques (Extrait d'une lettre de M. H. Minkowski à M. Hermite », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t.112, p.209-212, 1891.

(3) « Über Geometrie der Zahlen », *Verhandlungen der 64. Naturforscher- und Ärzteversammlung zu Halle*, 1891, S.13, und *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 1, S.64-65, 1892.

(4) « Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite », *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2[e] série, t.XVII, p.24-29, 1893.

(5) « Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind », *Mathematical Papers read at the international Mathematical Congress held in connection with the world's Columbian Exposition Chicago, 1893, p.201-207* ; traduction en français : « Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace », de L. Laugel, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3[e] série, t.XV, p.393-403, 1896.

(6) « Zur Theorie der Kettenbrüche », traduction en français de L. Laugel : « Généralisation de la théorie des fractions continues », *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 3[e] série, t.XIII, p.41-60, 1896.

(7) « Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen », *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, mathematisch-physikalische Klasse, 1899, S.64-88.

(8) « Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern », *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S.90-93.

(9) « Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen », *Mathematische Annalen*, Bd. 54, S.91-124, 1901.

(10) « Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide de nombres rationnels », *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2[e] série, t.XXV, p.72-76, 1901.

(11) « Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen », *Acta Mathematica*, Bd. 26, S.333-351, 1902.

(12) « Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper », *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, mathematisch-physikalische Klasse, 1904, S.311-355.

(13) « Zur Geometrie der Zahlen », *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Heidelberg, 1904, S.164-173.

(14) « Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 129, S.220-274, 1905.

Remarquons d'abord que (12) ne semble pas avoir été recensé dans le *Jahrbuch*. Tous les autres articles sont bien dans la troisième partie concernant l'arithmétique conformément aux définitions de la géométrie des nombres que nous avons vues. Ensuite, 7 articles (3, 4, 5, 7, 8, 11 et 13) sont dans la section *A. Allgemeines* du chapitre 2 *Zahlentheorie*, 5 articles (1, 2, 9, 10 et 14) sont dans la section *B. Theorie der Formen* de ce même chapitre et enfin 1 article (6) est dans le chapitre 3 *Kettenbrüche*.
Cette répartition n'est pas vraiment surprenante, les articles exposant des principes généraux de la géométrie des nombres sont dans les *généralités* avec ceux qui sont en liaison avec la théorie des corps de nombres algébriques, théorie qui n'a pas non plus de rubrique autonome. Les articles traitant des formes quadratiques mais aussi de l'approximation des nombres rationnels sont dans *Théorie des formes*. La présence des résultats concernant l'approximation dans cette partie s'explique par le fait que les méthodes développées par Minkowski sur ce sujet sont dans la tradition du travail d'Hermite et utilisent les théorèmes sur les minima des formes quadratiques.
Ce premier repérage de quelques articles montre une première difficulté importante pour ce recensement qui est la variété des thèmes pouvant être abordés en liaison avec la géométrie des nombres, problème sur lequel nous aurons l'occasion de revenir.

2.1.3 La géométrie des nombres dans le *Jahrbuch* entre 1891 et 1915

Le relevé des articles de Minkowski nous amène à chercher les textes sur la géométrie des nombres dans les chapitres 2 et 3 de la troisième partie du *Jahrbuch*, partie pour laquelle la classification ne change pas sur la période 1891-1915. Dans ces chapitres, nous avons relevé les articles ou les livres[13] pour lesquels Minkowski ou la géométrie des nombres sont cités soit dans le titre soit dans le résumé proposé par le *Jahrbuch*. Les publications qui satisfont à ces critères sont données à la fin de ce chapitre (voir page 171).

[13] Les ouvrages généraux sur les mathématiques ou la théorie des nombres mais qui ne sont pas consacrés exclusivement à la géométrie des nombres ont été exclus.

Cette première liste d'articles permet déjà de faire quelques commentaires. D'abord pour une période qui s'étend sur 25 ans nous obtenons 17 articles consacrés à la géométrie des nombres (hors ceux écrits par Minkowski lui-même) ce qui semble être assez peu. Pour un point de comparaison les données fournies par Catherine Goldstein[14] permettent d'estimer que le nombre total d'articles recensés par le *Jahrbuch* sur cette période 1891-1915 dans les chapitres qui nous ont ici intéressés est d'environ 2100.
À nouveau nous pouvons voir la diversité des thèmes abordés en liaison avec la géométrie des nombres, par exemple des questions sur les formes linéaires (Hurwitz, Levi B., Remak, Humbert-Got, Fujiwara), les formes quadratiques (Voronoï, Uspenskij, Bricard), la théorie des corps de nombres algébriques (Weber-Wellstein, Levi F.), l'approximation diophantienne (Kakeya). Enfin certains articles abordent plusieurs de ces thèmes (Châtelet, Blichfeldt). Parmi ces articles, celui de Hans Frederik Blichfeldt ressort car comme son titre l'évoque bien, c'est le seul qui place la géométrie des nombres au centre de l'étude sans être seulement une nouvelle preuve d'un résultat de Minkowski ou bien l'application d'un théorème de Minkowski dans un autre domaine.

2.1.4 La géométrie des nombres dans le *Jahrbuch* à partir de 1916

À partir de 1916, la situation semble être plus favorable pour repérer la géométrie des nombres dans le *Jahrbuch* car elle apparaît explicitement dans la classification. Pendant la période précédente il n'y a pas eu de grands changements dans cette classification (à part quelques modifications dans différentes sections) mais dans le volume 46 des années 1916-1918 elle est profondément remaniée. Elle passe de douze sections à huit, en particulier une grande section d'analyse est créée (la quatrième) et inclus par exemple les probabilités, les séries, le calcul différentiel et intégral et la théorie des fonctions qui étaient dans des sections autonomes. De même, la section cinq regroupe toute la géométrie qui était séparée en deux parties et la section deux réunit l'arithmétique et l'algèbre. C'est bien entendu dans cette deuxième section que la géométrie des nombres fait son apparition :

Zweiter Abschnitt. *Arithmetik und Algebra.*

Kapitel 1. *Grundlagen der Arithmetik und der Algebra. Allgemeines.*
Kapitel 2. *Elementare Arithmetik und Algebra. Kombinationslehre.*
Kapitel 3. *Theorie der Polynome und der algebraischen Gleichungen. Algebraische Eigenschaften der Polynome. Verteilung der Wurzeln. Galoissche Theorie.*

[14] Goldstein 1999 p.196.

Kapitel 4. *Theorie der Formen.*
Determinanten. Invariantentheorie. Symmetrische Funktionen und Verwandtes. Bilineare und quadratische Formen. Lineare Substitutionen. Modulsysteme und Elimination.
Kapitel 5. *Gruppentheorie.*
Abstrakte Theorie der Körper und Moduln. Gruppentheorie. Systeme hyperkomplexer
Zahlen.
Kapitel 6. *Niedere Zahlentheorie. Additive Zahlentheorie. Diophantische Gleichungen.*
Kapitel 7. *Arithmetische Theorie der Formen.*
Kapitel 8. *Algebraische Zahlen. Analytische Zahlentheorie.*
Kapitel 9. *Transzendente Zahlen. Approximation reeller Zahlen durch rationale.*
Geometrie der Zahlen.

La géométrie des nombres se trouve donc dans le chapitre 9 avec les nombres transcendants et l'approximation des nombres réels par des rationnels. Ce chapitre ne bouge pas jusqu'en 1925 où son titre change, *Approximation reeller Zahlen durch rationale* est remplacé par *Diophantische Approximationen*, puis en 1928 *Arithmetik und Algebra* devient la troisième section. La géométrie des nombres disparaît à nouveau de la classification en 1935 et ne revient que dans le deuxième volume de l'année 1939. Dans ce volume 65 II, la géométrie des nombres est dans le chapitre 7 - *Zalhentheorie* de la section C - *Arithmetik und Algebra* et c'est le point l) intitulé *Geometrie der Zahlen* qui lui est consacré. Ceci est modifié dès le volume suivant puisque que pour l'année 1940, *Geometrie der Zahlen* se trouve dans le point m) et elle perd son isolation dans la classification car elle est regroupée avec les réseaux de points (*Gitterpunkte*). Elle ne se trouve donc plus avec l'approximation diophantienne et les problèmes de transcendance qui font l'objet du chapitre 8 dans les volumes 65 II et 66, puis qui sont eux aussi séparés dans volume 67 de l'année 1941. L'approximation diophantienne est alors dans une rubrique autonome du chapitre 7 et la transcendance devient le thème unique du chapitre 8. La classification change à nouveau l'année suivante mais la géométrie des nombres reste avec les réseaux de points.
Comme nous aurons l'occasion d'y revenir, ces changements de regroupement pour la géométrie des nombres sont significatifs de l'évolution de ce domaine ; celui-ci semble être de plus en plus assimilé au traitement des problèmes liés aux réseaux[15].

Malgré l'apparition de la géométrie des nombres dans la classification, nous ne pouvons pas nous contenter de relever tous les articles présents dans la partie où elle se trouve pour continuer le recensement. D'abord parce que, comme cela a été vu, la géo-

[15] Voir par exemple le travail de Mordell sur les formes cubiques binaires au chapitre 4.

métrie des nombres est à nouveau absente de la classification pendant quelques années. Mais aussi parce qu'elle n'est presque jamais dans une rubrique autonome et que, par exemple, tous les articles concernant l'approximation diophantienne ou les questions de transcendance ne sont pas liés à la géométrie des nombres. La seule exception où la géométrie des nombres est seule dans une partie de la classification est le volume II de 1939, mais dans ce volume un seul texte est recensé par le *Jahrbuch* dans cette section. Il s'agit du livre de Harris Hancock *Developments of the Minkowski Geometry of Numbers*.
Nous avons donc effectué le recensement de la manière suivante. Quand la géométrie des nombres est dans la classification nous avons relevé les textes qui sont dans le chapitre ou la partie où elle se trouve et qui vérifient les critères déjà utilisés pour la période précédente. À savoir, Minkowski ou la géométrie des nombres doivent être cités dans le titre de l'article ou dans le résumé du *Jahrbuch*, ou encore le résumé doit mentionner l'utilisation du théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans un domaine convexe. Lorsque la géométrie des nombres n'est plus dans la classification, des articles concernant ce thème de façon évidente (car c'est dit explicitement dans le titre par exemple) continuent à être classés dans le chapitre 8 *Diophantische Approximationen und Transzendenzprobleme*. Nous avons donc continué à faire le recensement dans ce chapitre avec les mêmes critères et pour homogénéiser ces choix sur toute la période, quand la géométrie des nombres devient indépendante de ces deux thèmes (l'approximation diophantienne et la transcendance) les parties les concernant ont encore été étudiées.
La liste des résultats obtenus est donnée en fin de chapitre (voir page 172).

2.1.5 Bilan et limites de ce recensement

Le recensement a été effectué sur une période de 52 ans (de 1891 à 1942) et 108 publications ont été relevés soit environ deux en moyenne par an ce qui semble finalement assez peu. La géométrie des nombres apparaît donc comme un domaine plutôt restreint quantitativement. Le nombre de publications est très faible avant les années 1930, entre 1891 et 1930 un peu moins d'un article par an est publié. Le sujet commence à décoller petit à petit au cours des années 1930, la moyenne des publications annuelles passant à presque six pour la période allant de 1931 à 1942 (voir la figure 2.1).

Ces conclusions sont cependant à prendre avec prudence, d'abord parce que les chiffres sont ici très petits. Ensuite, cette tendance à la hausse des publications n'est pas un phénomène isolé, elle est observée aussi par exemple à l'échelle de toutes les pu-

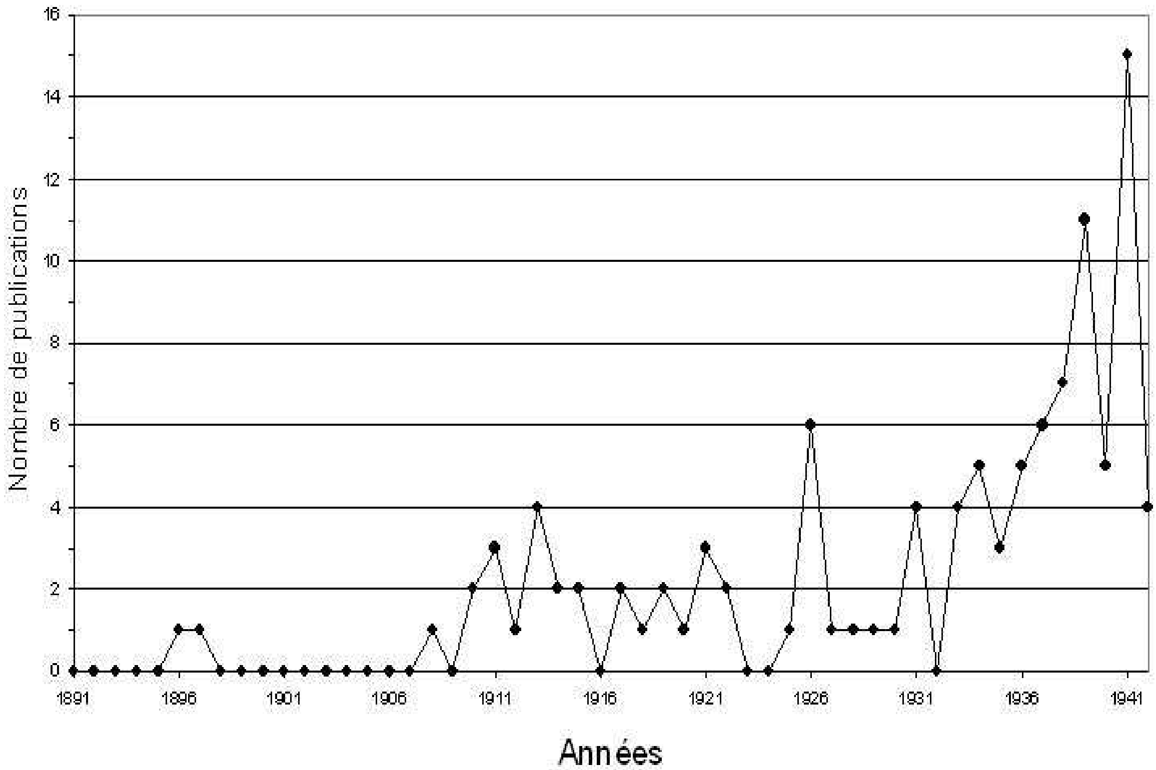


FIG. 2.1 – Publications annuelles recensées en géométrie des nombres dans le *Jahrbuch*

blications en théorie des nombres[16]. À titre de comparaison nous donnons un graphique (voir la figure 2.2) représentant l'évolution du nombre de publications en théorie des nombres dans le *Jahrbuch* entre 1916 (année d'apparition de la géométrie des nombres dans la classification) et 1942[17]. À nouveau comme il n'existe pas de rubrique "théorie des nombres" isolée et stable sur toute la période considérée, nous devons dire ce qui a été regroupé sous cette catégorie.

Nous avons pris la section qui regroupe l'arithmétique et l'algèbre qui est la deuxième entre 1916 et 1927 ; la troisième ensuite. À l'intérieur de cette section nous avons relevé toutes les publications des chapitres qui concernent l'arithmétique à l'exception de celui sur les fondements quand il existe. Pour le tome 46 des années 1916-1918 cela correspond aux chapitres 2 (*Elementare Arithmetik und Algebra. Kombinationslehre*), 6 (*Niedere Zahlentheorie. Additive Zahlentheorie. Diophantische Gleichungen*), 7 (*Arithmetische Theorie der Formen*), 8 (*Algebraische Zahlen. Analytische Zahlentheorie*) et 9 (*Transzendente Zahlen. Approximation reeller Zahlen durch rationale. Geometrie der Zahlen*). Cette répartition ne bouge presque pas jusqu'en 1934, à part des reformu-

[16]La chute observée sur les deux graphiques pour l'année 1942 est à relativiser car un seul volume du *Jahrbuch* a été publié pour cette année là.

[17]Lorsque le même tome du *Jahrbuch* couvre plusieurs années nous avons pris pour chacune des années la moyenne des publications recensées dans le tome.

lations des titres de chapitres et le fait que l'arithmétique élémentaire passe dans le chapitre 1, sur cette période nous avons donc relevé les publications des chapitres 1, 6, 7, 8 et 9. Certains de ces chapitres disparaissent ensuite et nous avons donc comptabilisé alors seulement ceux qui restent : le chapitre 9 disparaît en 1935, le 1 en 1939 et le 8 en 1942. Ces disparitions correspondent en général à des remaniements dans les autres chapitres.

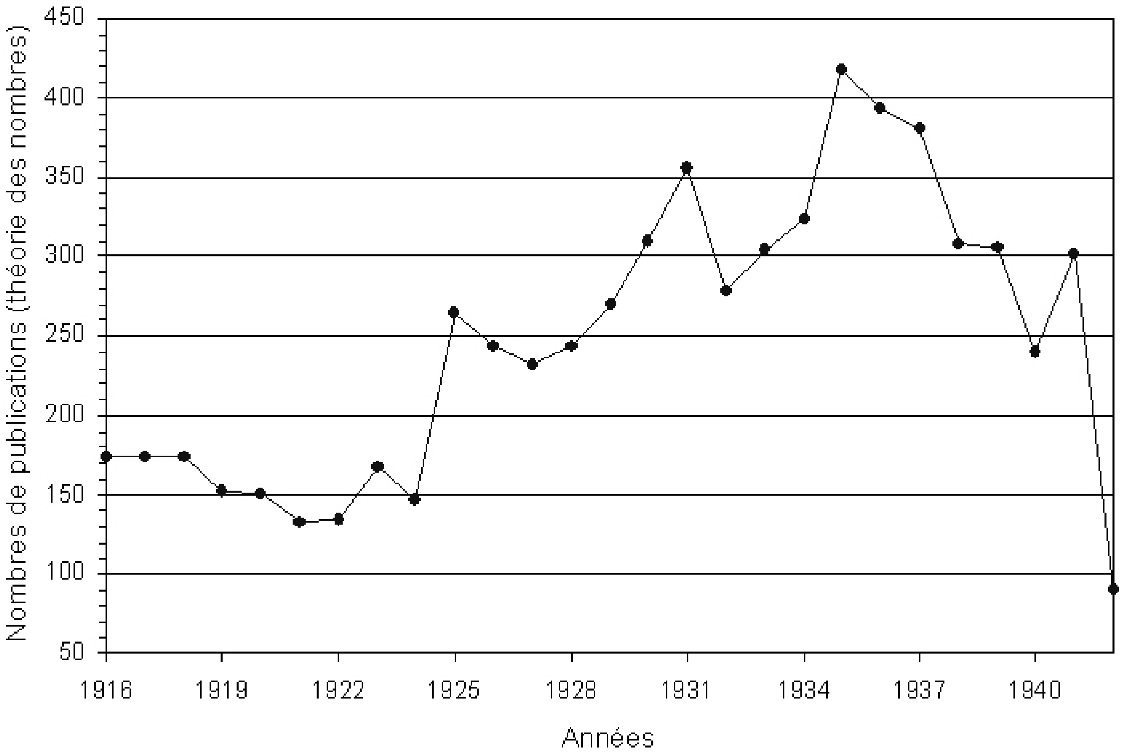


FIG. 2.2 – Publications annuelles recensées en théorie des nombres dans le *Jahrbuch*

Même si la hausse du nombre de publications concernant la géométrie des nombres est à nuancer, le recensement fait permet quand même de voir que la géométrie des nombres n'est pas un thème de recherche qui disparaît et qu'il y a un intérêt continu pour ce sujet même après la mort de Minkowski.

Pour ces 108 publications nous avons 57 auteurs différents ce qui donne en moyenne un peu moins de deux articles par auteur. Sur ces 57 mathématiciens, 34 n'apparaissent qu'une seule fois dans le recensement et 44 pas plus de deux fois. Ceci suggère que peu de ces mathématiciens s'intéressent à la géométrie des nombres de manière continue. Les 101 articles sont publiés dans 43 journaux différents. Parmi ces journaux, nous pouvons observer une forte représentation des journaux anglophones (9 journaux[18] qui publient 34 articles) devant les journaux allemands (21 articles dans 8 journaux différents).

Parmi les auteurs les plus plus prolifiques six publient au moins 5 textes. D'abord, Barend Meulenbeld, Matsusaburô Fujiwara, Oskar Perron et Hans Frederik Blichfeldt apparaissent cinq fois comme auteur et Jurjen Ferdinand Koksma sept fois. Les articles de Fujiwara concernent essentiellement des applications de la géométrie des nombres aux formes quadratiques, ceux de Perron, Meulenbeld et Koksma (4 articles sont écrits en collaboration) ont surtout pour thème l'approximation diophantienne et les formes linéaires. Les articles de Blichfeldt semblent être particulièrement intéressants pour étudier les développements de la géométrie des nombres, d'abord parce que de tous les mathématiciens cités c'est lui qui publie en premier sur ce sujet, ensuite parce que deux de ses articles annoncent de nouveaux principes en géométrie des nombres et deux autres sont des articles généraux sur ce thème.
Enfin l'auteur le plus prolifique est Louis Joel Mordell avec 12 articles et ses publications semblent correspondre justement à la période où le sujet se développe. Il est en particulier en grande partie responsable du pic de 1941, année pour laquelle il publie presque un tiers des articles recensés. Il apparaît donc comme un mathématicien important pour l'étude de la géométrie des nombres.

Essayons de voir maintenant qu'elles sont les limites de ce recensement. Une première limite évidente sont les oublis qui peuvent être dus par exemple à l'absence de résumé dans le *Jahrbuch*, au choix des critères du recensement pouvant être trop restrictifs pour saisir toutes les publications concernant la géométrie des nombres etc...
Ensuite, l'absence de rubrique ou d'autonomie pour la géométrie des nombres dans la classification nous a amené à choisir des critères afin de repérer les publications pertinentes. Mais si Minkowski ou la géométrie des nombres ne sont pas cités explicitement dans le résumé du *Jahrbuch* cela ne signifie pas nécessairement qu'ils ne le sont pas dans le texte dont il est question[19] ni que, par exemple, le travail de Minkowski n'ai pas eu une influence importante sur l'auteur de l'article. Inversement certaines références à Minkowski pourraient être des citations de circonstance sans que la géométrie des nombres ait eu une réelle influence sur l'auteur.
Afin de corriger en partie ce biais éventuel nous pouvons relever les citations faites dans les articles relevés pour voir s'ils ne pointent vers des mathématiciens qui nous auraient

[18]4 sont britanniques et 5 nord-américains.

[19]C'est le cas par exemple pour MORDELL 1937a qui est un article recensé dans le *Jahrbuch* dans une rubrique que nous avons prise en compte mais dont le résumé ne mentionne pas Minkowski alors que Mordell y fait référence à plusieurs reprises.

échappé par le *Jahrbuch*. Ce travail effectué dans 93 des articles relevés conduit aux résultats donnés dans le tableau (2.1)[20].

	Nombre d'articles dans lequel il est cité
Minkowski	83
Mordell	16
Blichfeldt	15
Hurwitz	15
Remak	12
Dirichlet	11
Hermite	10
Kronecker	10
Siegel	9
Tchebycheff	9
Davenport	8
Hilbert	8
Perron	8
Furtwängler	7
Koksma	7

TAB. 2.1 – Mathématiciens cités dans les articles recensés dans le *Jahrbuch*

Nous observons que parmi les mathématiciens qui sont les plus cités nous avons (Minkowski est à part), soit des auteurs qui ont été relevés au moins une fois dans le *Jahrbuch* (ce sont ceux qui sont signalés en gras dans le tableau (2.1)), soit des mathématiciens qui sont mentionnés pour des travaux antérieurs à ceux de Minkowski (Dirichlet, Hermite, Kronecker, Tchebycheff). Hilbert apparaît pour des raisons autres que la géométrie des nombres ou bien pour une preuve non publiée communiquée à Minkowski[21]. Il reste donc seulement Carl Ludwig Siegel à n'être dans aucune des situations précédentes. Cette étude confirme donc plutôt le recensement du *Jahrbuch* mais suggère aussi que Siegel devrait être pris en compte dans les développements de la géométrie des nombres[22].

Les publications que nous avons relevées montrent aussi que plusieurs autres thèmes

[20]Le tableau donne le nombre d'articles dans lesquels sont cités chaque mathématicien. Nous nous sommes limités aux mathématiciens les plus cités.

[21]Il s'agit d'une preuve d'un théorème sur les formes linéaires sur lequel nous reviendrons.

[22]Nous verrons par exemple son travail cité par Mordell.

des mathématiques sont en intéractions avec la géométrie des nombres. Citons par exemple des problèmes liés aux formes linéaires, la théorie arithmétique des formes, la théorie des corps de nombres algébriques, l'approximation diophantienne, la convexité ou bien les réseaux de points. Ceci pose immédiatement la question du choix des critères que nous avons fait. En effet, certains de ces thèmes sont recensés dans d'autres rubriques (parfois autonomes) du *Jahrbuch* que celles qui ont ici été considérées. C'est le cas par exemple pour la théorie arithmétique des formes[23], la théorie algébrique des nombres qui apparaît dans la classification sous des titres divers comme *Algebraische Zahlen*, *Theorie der algebraischen Zahlen und ihrer Ideale* ou *Zahlkörper*. Le choix, dans les oeuvres complètes de Minkowski, de se limiter à ses articles classés en géométrie des nombres peut donc lui aussi être discuté. Certains de ses articles en théorie arithmétique des formes sont peut être aussi pertinents d'autant plus que ce sont des problèmes liés aux formes qui ont conduit Minkowski à la géométrie des nombres[24]. Son travail en géométrie, toujours lié aux notions de volume et de convexité qui sont des concepts clés de la géométrie des nombres, pourrait lui aussi avoir sa pertinence dans le recensement et nous amènerait à explorer la section de géométrie du *Jahrbuch*. D'autre part, ces nouveaux thèmes suggèrent aussi que d'autres mots clés auraient pu être ajoutés à « Minkowski » et « géométrie des nombres », par exemple « réseau » ou « convexité ». La prise en compte de mots clés supplémentaires nous aurait permis d'attraper des publications nous ayant peut être échappées. Cependant nous pensons que pour une première approche du domaine il est plus prudent de considérer peu de mots clés (ici nous avons le nom du domaine à repérer et le mathématicien vu comme à l'origine de ce domaine) afin d'essayer de limiter le plus possible le biais dû à la représentation que nous nous faisons de la géométrie des nombres, représentation qui nécessairement influence le choix de critères. De plus, si nous ajoutons des mots clés pouvant sembler pertinent à la suite d'un premier repérage, de nouveaux thèmes vont émerger qui vont par suite suggérer de nouveaux mots clés etc... Ceci pose des problèmes opératoires : quand faut-il s'arrêter ? La quantité de publications recensées permettrait difficilement de bien appréhender le domaine pour un premier contact[25].

Afin de confirmer ou infirmer les résultats obtenus à travers ce recensement nous allons maintenant les croiser avec d'autres sources.

[23]Il y a aussi des rubriques qui concernent la théorie algébrique des formes.

[24]Schwermer 1991, 2007.

[25]Pour nous faire une idée de l'influence du changement de critères sur le nombre de publications recensées, nous avons fait un recensement (pourtant certainement non exhaustif) avec des critères élargis. Pour cela nous avons ajouté par exemple "réseau" parmi les mots clés, ainsi que des travaux sur les formes cubiques ou les produits de formes linéaires (thèmes de recherche importants pour les mathématiciens que nous étudierons par la suite). Nous avons relevé des publications dans toutes les sections de théorie des nombres du *Jahrbuch*. Cela conduit à plus de 400 publications ce qui donne un poids quantitatif beaucoup plus important au domaine (environ 4 fois plus).

2.2 Les livres consacrés à la géométrie des nombres

2.2.1 Repérage des livres sur la géométrie des nombres

Pour trouver les livres dont le thème principal est la géométrie des nombres nous avons utilisé le catalogue de la *Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique de Jussieu*, le catalogue fusionné du *Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques* et le catalogue SUDOC (*Système Universitaire de Documentation*), tous disponibles sur internet. Nous avons recherché les livres contenant dans leur titre l'expression « géométrie des nombres », « geometry of numbers » ou « Geometrie der Zahlen[26] ». Nous avons ensuite éliminé les résultats sans rapports avec notre sujet comme par exemple tous les ouvrages traitant de l'utilisation des nombres complexes en géométrie dont certains ont dans leur titre l'expression « la géométrie des nombres complexes ». Les thèses, thèses d'habilitation, monographies, conférences et comptes rendus de congrès ont eux aussi été écartés.

Voici la liste des publications qui satisfont les critères précédents :

- CASSELS John William Scott, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

- GRUBER Peter Manfred et LEKKERKERKER Cornelis Gerrit, *Geometry of numbers*, Amsterdam-New York, Elsevier Science Publishers, 1987.

- HANCOCK Harris, *Development of the Minkowski geometry of numbers*, New York, Macmillan Company, 1939.

- LEKKERKERKER Cornelis Gerrit, *Geometry of numbers*, Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, Amsterdam-London, North Holland Publishing Company, 1969.

- MINKOWSKI Hermann, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1910 (première édition en 1896).

- SIEGEL Carl Ludwig, *lectures on the Geometry of Numbers*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1989.

- OLDS C.D., LAX Anneli et DAVIDOFF Giuliana, *The geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2000.

[26]Nous nous sommes limités à une recherche dans ces trois langues car ce sont celles des publications qui sont apparues par le recensement dans le *Jahrbuch*.

Nous obtenons finalement très peu de résultats. D'autant plus que le livre de Gruber et Lekkerkerker n'est qu'une seconde édition augmentée du premier de Lekkerkerker publié en 1969.
Le livre de Hancock, comme son titre l'indique, a pour objectif de reprendre le travail de Minkowski sur la géométrie des nombres. Hancock, qui déplore dans l'introduction de son livre le manque de clarté de Minkowski dans l'exposition de son travail, donne parfois de nouvelles preuves ou bien complète les démonstrations de Minkowski[27] mais la plus grande partie du livre est en fait une traduction des travaux de Minkowski. Nous ne tiendrons pas compte de ce livre dans le relevé que nous allons faire car, comme celui de Minkowski lui-même, il n'apporte pas d'information sur les développements de la géométrie des nombres après Minkowski ce qui est notre objectif ici.
Le livre de Siegel est issu d'un cours donné à l'université de New York dans les années 1945-1946, les notes sont de B. Friedman et elles ont été révisées pour la publication en 1989 par Komaravolu Chandrasekharan avec l'aide de Rudolf Suter.
Enfin, l'objectif affiché du livre de Olds, Lax et Davidoff est d'essayer de proposer une introduction à la géométrie des nombres accessible à un large public n'ayant pas nécessairement des connaissances solides en mathématiques.

2.2.2 Etude des tables des matières

Comme il s'agit ici d'une première approche afin de repérer les développements de la géométrie des nombres après Minkowski, nous avons choisi de nous concentrer uniquement sur les tables des matières de ces livres pour voir quels mathématiciens y sont cités. Pour cela nous ne tenons pas compte ni des livres de Minkowski ni de Hancock qui, comme cela a été dit, ne reflète que le travail de Minkowski. De plus, nous ne prenons en compte que la seconde édition du livre de Lekkerkerker pour ne pas donner un poids double aux auteurs qu'il cite.
Le tableau suivant (2.2) résume les résultats obtenus[28], seuls les mathématiciens cités au moins deux fois ont été gardés.

Sans surprise, Minkowski est largement devant tous les autres en ce qui concerne le nombre de citations et il est cité par tous les livres. Blichfeldt vient ensuite et il est lui aussi cité par tous, cela confirme qu'il est un mathématicien important dans la réception de la géométrie des nombres et ses développements après Minkowski. De

[27]Hancock n'effectue pas ce travail tout seul, il met à contribution ses étudiants de l'époque mais il reçoit aussi l'aide d'autres mathématiciens comme Blichfeldt et Mordell qui sont cités dans l'introduction.

[28]Le relevé est donc fait sur 4 livres différents

	Nombre de citations	Nombre de livres dans lesquels il est cité
MINKOWSKI H.	28	4
BLICHFELDT H.F.	10	4
MORDELL L.	5	2
HLAWKA E.	5	2
MAHLER K.	3	2
ROGERS C.A.	2	2

TAB. 2.2 – Mathématiciens cités dans les tables des matières

même, le rôle de Mordell qui est apparu avec le relevé dans le *Jahrbuch* est conforté par ses cinq citations mais aussi par le fait qu'il est à l'origine de l'intérêt de Cassels pour la géométrie des nombres qui est l'auteur d'un des livres que nous avons recensé. Cassels l'explique dans la préface de son livre et il remercie aussi Mahler et Rogers (qui font partis des auteurs relevés) pour avoir relu les épreuves du livre. Il apparaît donc un groupe de mathématiciens s'intéressant à la géométrie des nombres et Mordell est en contact avec chacun d'entre eux[29].
Edmund Hlawka est aussi cité à plusieurs reprises dans les tables des matières des livres ce qui s'explique par le fait qu'un résultat de la géométrie des nombres est connu sous le nom de théorème de Minkowski-Hlawka[30]. Il n'était apparu qu'une fois dans le *Jahrbuch* car au début des années 1940, au moment où nous avons arrêté le recensement, il n'est qu'au début de sa carrière de mathématicien et il se met à publier régulièrement sur des thèmes liés à la géométrie des nombres qu'à partir de 1943.

Les résultats obtenus par cette étude des livres consacrés à la géométrie des nombres confortent donc ceux qui étaient ressortis du recensement effectué dans le *Jahrbuch* : Minkowski est confirmé comme étant l'initiateur de cette théorie, Blichfeldt est le premier à reprendre de manière continu ce sujet de recherche et Mordell se met à y consacrer de nombreux articles à partir des années 1930 et il est en relation avec d'autres mathématiciens qui s'intéressent à ce thème.

[29]Voir la préface de CASSELS 1959.
[30]HLAWKA 1943-1944.

2.3 Un repérage dans l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

2.3.1 Présentation de l'*Enzyklopädie* et de son fascicule 11

Une autre source intéressante pour se faire une idée des travaux effectués en géométrie des nombres est l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. L'objectif de ce projet encyclopédique initié par Felix Klein est de faire un bilan par domaine des connaissances mathématiques[31]. La publication de l'édition allemande débute en 1898 et elle est interrompue par la Première Guerre Mondiale. Le fascicule consacré à la géométrie des nombres[32] n'est publié qu'en 1954 dans le cadre du projet de seconde édition. Son auteur Ott-Heinrich Keller est alors à l'université de Halle. Ce fascicule de 84 pages est divisé en 9 parties dans lesquelles nous retrouvons les thèmes mathématiques déjà rencontrés en liaison avec la géométrie des nombres, ces chapitres sont :

A. Die grundlegenden Sätze über konvexe Körper im Zahlengitter
B. Sternkörper
C. Lineare Formen
D. Das Minimum homogener Formen
E. Inhomogene Formen
F. Definite quadratische Formen
G. Kettenbrüche
H. Algebraische Zahlen
I. Partitionen und Gitterpunktsfiguren

Pour chacun de ces thèmes Keller revient sur des résultats de Minkowski et même parfois des résultats antérieurs mais il présente aussi les développements plus récents de ces sujets. Il est donc amené à citer les mathématiciens ayant travaillé sur la géométrie des nombres depuis Minkowski et ce sont ces citations que nous avons relevées.

2.3.2 Les mathématiciens cités dans l'*Enzyklopädie*

Nous avons relevé pour chaque mathématicien le nombre total de citations mais aussi le nombre de pages différentes dans lesquelles il est cité ce qui évite certaines redondances dans les citations comme par exemple quand un auteur est cité pour le même travail dans le corps du texte et en note de bas de page. Keller fait référence en

[31]Voir Gispert 1999. Notons qu'à l'origine le titre était *Encyklopädie...* (avec un "c").
[32]Keller 1954.

tout à 182 mathématiciens différents, dans le tableau suivant (2.3) nous avons gardé les 10 les plus cités.

	Nombre total de citations	Nombre de pages où il est cité
MINKOWSKI H.	119	51
MAHLER K.	46	26
MORDELL L.	35	19
DAVENPORT H.	32	21
ROGERS C.A.	23	11
HERMITE C.	20	14
HLAWKA E.	19	14
REMAK R.	19	13
BLICHFELDT H.F.	18	13
VORONOÏ G.	15	8

TAB. 2.3 – Mathématiciens cités dans l'*Enzyklopädie*

Le seul nom complètement nouveau à apparaitre avec ce nouveau recensement est celui de Charles Hermite[33]. Il n'est pas très étonnant de le voir cité à de nombreuses reprises, d'abord parce qu'il était considéré par Minkowski lui-même comme étant à l'origine de son travail sur la géométrie des nombres[34]. mais aussi parce qu'une grande partie de l'article de l'*Enzyklopädie* traite de la géométrie des nombres en liaison avec la théorie des formes et Hermite a réalisé des travaux importants dans ce domaine. Il est donc cité en particulier pour ses résultats sur les minima et la réduction des formes quadratiques et cubiques.

Ensuite, Davenport, Remak et Voronoï étaient bien présents dans le recensement du *Jahrbuch* mais n'étaient pas apparus alors comme des contributeurs importants pour la géométrie des nombres car peu de publications avaient été retenues. Voronoï et Remak sont cités ici à propos de leurs travaux sur les formes quadratiques mais aussi dans le cas de Remak pour ses résultats sur le produit de formes linéaires non homogènes. En ce qui concerne Davenport, bien qu'il commence à s'intéresser à la géométrie des nombres à peu près en 1936 au contact de Mordell, c'est véritablement à partir du début des années 1940 qu'il publie de façon intensive sur ce sujet, il est donc normal

[33]Nous l'avions vu uniquement pour l'instant dans les résultats du relevé dans le *Jahrbuch* pour les lettres de Minkowski qui lui étaient adressées.

[34]Le livre de Minkowski *Geometrie der Zahlen* est d'ailleurs dédié à Hermite.

que nous l'ayons peu vu dans le *Jahrbuch*.

Nous avions déjà rencontrés Hlawka, Rogers et Mahler dans les livres consacrés à la géométrie des nombres, leur rôle dans le développement de ce domaine est donc conforté par l'*Enzyklopädie*. Mahler ressort davantage ici pour les mêmes raisons que Davenport. En effet, comme la lecture de la liste de ses publications permet de le voir[35], son travail en géométrie des nombres devient très important surtout entre 1940 et 1950, il publie notamment son fameux « théorème de compacité[36] » en 1946. Il est donc normal que l'*Enzyklopädie* rende compte de ces développements récents de la géométrie des nombres.

Enfin, Blichfeldt qui apparaît dans les trois sources consultées est davantage en retrait dans l'*Enzyklopädie*. Cela peut s'expliquer d'une part par le fait que Blichfeldt cesse de publier en 1939 et d'autre part parce que Blichfeldt a peu publié par rapport à d'autres mathématiciens comme par exemple Mordell, Davenport ou Mahler. Cela lui donne donc un moindre poids dans l'*Enzyklopädie* qui vise à proposer une bibliographie aussi précise que possible sur la géométrie des nombres.

Conclusion

Ce chapitre donne des éléments sur les développements de la géométrie des nombres après Minkowski d'un point de vue collectif. Nous sommes donc à une autre échelle que dans la partie consacrée à Minkowski qui est centrée sur un individu.
Le *Jahrbuch*, les manuels et l'*Enzyklopädie* sont tous exploités à une même échelle d'observation : il s'agit de relever dans chaque cas des références à des mathématiciens. Nous obtenons cependant des informations à des niveaux différents. Dans les limites des critères choisis pour effectuer le recensement, le *Jahrbuch* fournit toute la production mathématique concernant la géométrie des nombres sans jugement sur sa qualité ou sa pertinence. Par contre avec les manuels et l'*Enzyklopädie*, une sélection est faite par les auteurs. Le contenu mathématique des publications est évalué et seuls les travaux considérés comme importants sont cités. La présence dans une table des matières de la « méthode de Mordell[37] » suggère qu'elle joue un rôle crucial dans la discipline.

Un changement d'échelle a quand même été effectué en relevant les mathématiciens cités dans les articles recensés dans le *Jahrbuch* ce qui a eu pour effet de faire apparaître

[35] Coates et van der Poorten 1994.
[36] Mahler 1946.
[37] Cassels 1959.

un nouveau protagoniste : Carl Ludwig Siegel. Même si cette nouvelle échelle n'a pas été exploitée de façon systématique dans ce travail, cet exemple illustre bien les « effets de connaissance » du choix d'une échelle particulière ainsi que le profit heuristique du principe de variation d'échelles.

Trois mathématiciens sont ressortis dans chacune des sources consultées : Minkowski, Blichfeldt et Mordell. Par conséquent, Blichfeldt et Mordell seront l'objet des chapitres suivants.

Publications en géométrie des nombres relevées dans le *Jahrbuch* (1891-1915) :

- WEBER H., « Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung », *Göttinger Nachrichten*, 1896, p.275-281.
- HURWITZ A., « Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln », *Göttinger Nachrichten*, 1897, p.139-145.
- VORONOÏ G., « Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 134, 1908, p.198-287.
- TARRY G., « Propriétés fondamentales des angles de la géométrie modulaire », *Comptes rendus de la session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*, vol. 33, 1910, p.32-47.
- USPENSKIJ J., « Einige Anwendungen der kontinuierlichen Parameter in der Zahlentheorie », St. Petersburg, 1910.
- BRUNN H., « Zur Theorie der Eigebiete », *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 17, 1911, p.289-300.
- CHÂTELET A., « Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, vol. 28, 1911, p.105-202.
- LEVI B., « Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere », *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, vol. 31, 1911, p.318-340.
- LUCAS E., « Les principes fondamentaux de la géométrie des tissus », *Comptes rendus de la session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*, vol. 40, 1912, p.72-87.
- BRICARD R., « Sur un théorème connu d'arithmétique », *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 13, 1913, p.558-562.
- KAKEYA S., « On a diophantine approximation », *Science reports of the Tohoku imperial university*, vol. 2, 1913, p.33-54.
- REMAK R., « Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 142, 1913, p.278-282.

- WEBER H. et WELLSTEIN J., « Der Minkowskische Satz über die Körperdiskriminante », *Mathematische Annalen*, vol. 73, 1913, p.275-285.

- BLICHFELDT H.F., « A new principle in the geometry of numbers, with some applications », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 15, 1914, p.227-235.

- LEVI F., « Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen », *Berichte ueber die Verhandlungen der Koeniglich-Saechsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, vol. 66, 1914, p.26-37.

- FUJIWARA M., « Eine Folgerung aus einem Satze von Minkowski in der Geometrie der Zahlen », *Science reports of the Tohoku imperial university*, vol. 4, 1915, p.57-63.

- HUMBERT G. et GOT T., « Notes sur la théorie des corps de nombres algébriques de M. D. Hilbert (note III) », *Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse*, vol. 3, 1911, p.1-62.

Publications en géométrie des nombres relevées dans le *Jahrbuch* (1916-1942) :

- HANCOCK H., « Problèmes de géométrie arithmétique », *Journal de mathématiques pures et appliquées* (7), vol. 3, 1917, p.217-245.

- ZEISEL M., « Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximationen », *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, vol. 126, 1917, p.1221-1247.

- BLICHFELDT H.F., « A second principle in the geometry of numbers », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 24, 1918, p.418.

- BLICHFELDT H.F., « Report on the theory of the geometry of numbers », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 25, 1919, p.449-453.

- GRACE J.H., « Note on a diophantine approximation », *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), vol. 17, 1918, p.316-319.

- FURTWÄNGLER P. et ZEISEL M., « Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 30, 1920, p.177-198.

- BLICHFELDT H.F., « Notes on geometry of numbers », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 27, 1921, p.152-153.

- FUJIWARA M., « Anwendung der Geometrie der Zahlen auf indefinite ternäre quadratische Formen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 30, 1921, p.103.

- PERRON O., « Über diophantische Approximationen », *Mathematische Annalen*, vol. 83, 1921, p.77-84.

- FUJIWARA M., « Anwendung der Geometrie der Zahlen auf die bilinearen Formen », *Science reports of the Tohoku imperial university*, vol. 11, 1922, p.501-507.

- SCHERRER W., « Ein Satz über Gitter und Volumen », *Mathematische Annalen*, vol. 86, 1922, p.99-107.

- KOVNER S.S., « Über einen Satz von Tschebyscheff-Minkowski », *Matematiceskij sbornik*, vol. 32, 1925, p.528-541.

- FUJIWARA M., « A new elementary proof of a theorem of Minkowski », *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, vol. 2, 1926, p.97-99.

- FUJIWARA M., « An elementary proof of Minkowski's theorem », *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* (3), vol. 8, 1926, p.119.

- FUKASAWA S., « On the extension of Klein's geometrical interpretation of continued fraction », *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, vol. 2, 1926, p.100-102.

- FUKASAWA S., « Über die Grössenordnung des absoluten Betrages von einer linearen inhomogenen Form. I, II. », *Japanese journal of mathematics*, vol. 3, 1926, p.1-26 et 91-106.

- FUKASAWA S., « On the extension of a theorem of Minkowski », *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, vol. 2, 1926, p.305-306.

- PIPPING N., « Einige Sätze über konvexe Körper in Beziehung zu Punktgittern », *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 27, 1926, p.14.

- REMAK R., « Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, 1927, p.694-699.

– MORDELL L.J., « Minkowski's theorem on the product of two linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 3, 1928, p.19-22.

– PIPPING N., « Zur Theorie der Diophantischen Approximationen », *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, vol. 32, 1929.

– MORDELL L.J., « Note on some linear Diophantine inequalities », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 26, 1930, p.489-490.

– LANDAU E., « Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 165, 1931, p.1-3.

– OPPENHEIM A., « Note on some linear Diophantine inequalities », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 27, 1931, p.24-25.

– PIPPING N., « Über konvexe Figuren mit Mittelpunkt in Beziehung zu Punktgittern », *Acta Academiae Aboensis*, vol. 6, 1932.

– USPENSKY J.V., « A problem in the geometry of numbers », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 37, 1931, p.352.

– DINES L.L. et Mc COY N.H., « On linear inequalities », *Proceedings and transactions of the Royal Society of Canada*, vol. 27, 1933, p.37-70.

– HOFREITER N., « Zur Geometrie der Zahlen », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40, 1933, p.181-192.

– HOFREITER N., « Über einen Approximationssatz von Minkowski », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40, 1933, p.351-392.

– MORDELL L.J., « Minkowski's theorem on homogeneous linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 8, 1933, p.179-182.

– HAJÓS G., « Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski », *Acta Universitatis Szegediensis : Sectio scientiarum mathematicarum*, vol. 6, 1934, p.224-225.

– JACOBSTHAL E., « Der Minkowskische Linearformensatz », *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, vol. 33, 1934, p.62-64.

– MORDELL L.J., « On some arithmetical results in the geometry of numbers », *Compositio mathematica*, vol. 1, 1934, p.248-253.

- RADO R., « A proof of Minkowski's theorem on homogeneous linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 9, 1934, p.164-165.

- SEALE R.Q., « A new proof of Minkowski's theorem on the product of two linear forms », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 41, 1935, p.419-426.

- BLICHFELDT H.F., « On geometry of numbers », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 41, 1935, p.196.

- PERRON O., « A remark on Minkowski's theorem about linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 10, 1935, p.275-276.

- RADO R., « A remark on Minkowski's theorem about linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 10, 1935, p.115.

- JULIA G., « Sur un problème de géométrie des nombres posé par la construction de certaines surfaces de Riemann », *Journal de mathématiques pures et appliquées* (9), vol. 15, 1936, p.229-233.

- PEPPER P., « Application of geometry of numbers to a generalization of continued fractions », *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 42, 1936, p.23.

- VAN DER CORPUT J.G., « Verallgemeinerung einer Mordellsehen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. II », *Acta arithmetica*, vol. 2, 1936, p.145-146.

- VAN DER CORPUT J.G. et SCHAAKE G., « Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen », *Acta arithmetica*, vol. 2, 1936, p.152-160.

- MORDELL L.J., « A theorem of Khintchine on linear diophantine approximation », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 12, 1937, p.166-167.

- MORDELL L.J., « Homogeneous linear forms in algebraic fields », *The quarterly journal of mathematics*, vol. 8, 1937, p.54-57.

- MORDELL L.J., « Note on an arithmetical problem on linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 12, 1937, p.34-36.

- SZEKERES G., « On a problem of the lattice-plane », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 12, 1937, p.88-93.

- PIPPING N., « Über konvexe Figuren K_7 », *Acta Academiae Aboensis*, vol. 11, 1939.

- GELFOND A., « Sur une généralisation de l'inégalité de Minkowski », *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS*, vol. 17, 1937, p.447-449.

- MORDELL L.J., « Minkowski's theorems and hypothesis on linear forms », *Comptes Rendus du Congrès international des Mathématiciens*, Oslo, vol. 1, 1936, p.226-238.

- KOKSMA J.F., « Über einen Dirichlet-Minkowskischen Approximationssatz », *Mathematica B*, vol. 6, 1938, p.113-131 et 171-181.

- HOFREITER N., « Über die Approximation von komplexen Linearformen », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 46, 1938, p.313-316.

- HLAWKA E., « Über die Approximation von zwei komplexen inhomogenen Linearformen », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 46, 1938, p.324-334.

- DAVENPORT H., « On the product of three homogeneous linear forms. I », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 13, 1938, p.139-145.

- DAVENPORT H., « On the product of three homogeneous linear forms. II », *Proceedings of the London mathematical Society* (2), vol. 44, 1938, p.412-431.

- MAHLER K., « A theorem on inhomogeneous Diophantine inequalities », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 41, 1938, p.634-637.

- PERRON O., « Neuer Beweis eines Satzes von Minkowski », *Mathematische Annalen*, vol. 115, 1938, p.656-657.

- KOKSMA J.F., « Anwendung des Perronschen Beweises eines Satzes von Minkowski », *Mathematische Annalen*, vol. 116, 1939, p.464-468.

- HEINHOLD J., « Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 44, 1939, p.659-688.

- DAVENPORT H., « Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body », *The quarterly journal of mathematics*, vol. 10, 1939, p.119-121.

- MAHLER K., « Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper », *Casopis pro Péstováni Matematiky a Fysiku*, vol. 68, 1939, p.93-102.

– JARNIK V., « Remarque à l'article précédent de M. Mahler », *Casopis pro Péstováni Matematiky a Fysiku*, vol. 68, 1939, p.103-111.

– JARNIK V., « Sur un théorème de M. Mahler », *Casopis pro Péstováni Matematiky a Fysiku*, vol. 68, 1939, p.59-60.

– MAHLER K., « Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen », *Casopis pro Péstováni Matematiky a Fysiku*, vol. 68, 1939, p.85-92.

– KELLER O.H., « Eine Bemerkung zu den verschiedenen Möglichkeiten, eine Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln », *Mathematische Annalen*, vol. 116, 1939, p.733-741.

– PEPPER P., « Une application de la géométrie des nombres à une généralisation d'une fraction continue », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (3), vol. 56, 1939, p.1-70.

– HANCOCK H., *Development of the Minkowski geometry of numbers*, New York, The Macmillan Company, 1939.

– ARAL H., *Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern*, Dissertation, München, 1939.

– WEYL H., « Theory of reduction for arithmetical equivalence », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 48, 1940, p.126-164.

– PERRON O., « Modulartige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. I », *Mathematische Annalen*, vol. 117, 1940, p.415-447.

– DERRY D., « Remarks on a conjecture of Minkowski », *American journal of mathematics*, vol. 62, 1940, p.61-66.

– TSCHEBOTARÖW N., « Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen », *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 85, 1940, p.27-30.

– KOKSMA J.F., « Sätze und Vermutungen aus der Geometrie der Zahlen », *Euclides : maandblad voor de didactiek van de wiskunde. Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, vol. 17, 1940, p.159-171.

– PERRON O., « Modulartige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. II », *Mathematische Annalen*, vol. 117, 1941, p.609-658.

- HOFREITER N., « Gitterförmige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 50, 1941, p.48-64.

- HAJÓS G., « Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 47, 1941, p.427-467.

- HAJÓS G., « Einfache Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgittern », *Mat. fizik. Lapok*, vol. 48, 1941, p.37-64.

- HEINHOLD J., « Zur Geometrie der Zahlen », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 47, 1941, p.199-214.

- JARNIK V., « Zwei Bemerkungen zur Geometrie der Zahlen », *Vestnik Králevske Ceské Spolecnosti Nauk.*, vol. II, 1941.

- MAHLER K., « An analogue to Minkowski's geometry of numbers in a field of series », *Annals of mathematics*, vol. 42, 1941, p.488-522.

- KOKSMA J.F. et MEULENBELD B., « Über die Approximation einer homogenen Linearform an die Null », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 44, 1941, p.62-74.

- KOKSMA J.F. et MEULENBELD B., « Diophantische Approximationen homogener Linearformen in imaginären quadratischen Zahlkörpern », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 44, 1941, p.426-434.

- KOKSMA J.F. et MEULENBELD B., « Simultane Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 44, 1941, p.310-323.

- MORDELL L.J., « The product of homogeneous linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, 1941, p.4-12.

- ZILINSKAS G., « On the product of four homogeneous linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, 1941, p.27-37.

- MORDELL L.J., « On the product of two non-homogeneous linear forms », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, 1941, p.86-88.

- MORDELL L.J., « Some results in the geometry of numbers for non-convex regions », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, 1941, p.149-151.

– MORDELL L.J., « Lattice points in the region $|Ax^4 + By^4| \leqq 1$ », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, 1941, p.152-156.

– WEYL H., « Theory of reduction for arithmetical equivalence. II », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 51, 1942, p.203-231.

– ESTERMANN T., « A new proof of a theorem of Minkowski », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 17, 1942, p.158-161.

– KOKSMA J.F. et MEULENBELD B., « Sur le théorème de Minkowski, concernant un système de formes linéaires réelles. I, II, III, IV », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 45, 1942, p.256-262,354-359,471-478 et 578-584.

– MEULENBELD B., « Des approximations diophantiques d'un système de formes linéaires complexes », *Koninklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam*, vol. 45, 1942, p.924-928.

Chapitre 3

Le travail de Blichfeldt en géométrie des nombres

Sommaire

3.1 Présentation générale de Blichfeldt et de son travail

3.1.1 Eléments biographiques sur Blichfeldt

Peu de recherches ont été faites à propos de Blichfeldt et de son travail : nous disposons d'une « Memorial Resolution » rédigée par des membres de l'université de Stanford lors de son décès, d'une nécrologie rédigée par Dickson, de quelques informations dans un article de Royden sur l'université de Stanford et de deux articles biographiques. Le premier de ces articles écrit par Miller est publié dans le *Dictionary of Scientific Biography* et le second de Bell dans les *Biographical Memoirs of the National Academy of Sciences of the United States of America.* Remarquons que la construction de la vie de Blichfeldt dans ces sources tend à la faire apparaître comme une incarnation du rêve américain[1] ; nous avons laissé de côté cette interprétation.

Selon ces sources, Hans Frederik Blichfeldt est né le 9 janvier 1873 à Illar[2], un

[1]D'autres biographies de mathématiciens contiennent des éléments contestables, c'est ce que montre Constance Reid avec la biographie de Bell, voir Reid 1993.

[2]Ou bien Iller d'après Bacon et al. N.D..

FIG. 3.1 – Hans Frederik Blichfeldt

village danois[3]. Blichfeldt est d'origine sociale modeste, son père Erhard Christoffer Laurentius Blichfeldt est fermier et le descendant d'une lignée de pasteurs[4]. Hans a deux soeurs et un demi-frère que sa mère, Nielsine Marie Schlaper[5], a eu d'un premier mariage[6]. La famille déménage à Copenhague en 1881 et alors qu'il a 15 ans Blichfeldt réussit l'examen d'entrée à l'université[7]. Ses parents n'ont cependant pas les moyens de lui financer ses études et il n'entre donc pas à l'université de Copenhague[8].
En 1888, sa famille émigre aux Etats Unis[9], il vit alors dans les états du Nebraska, du Wyoming, de l'Oregon puis de Washington[10], là où le travail se présente[11]. Entre 1888 et 1892, il est ouvrier dans des fermes ou des scieries de l'ouest et du mid-ouest[12], puis entre 1892 et 1894, il travaille dans le département d'ingénierie du comté de Whatcom dans l'état de Washington. Il y effectue un travail de géomètre qui l'amène à voyager à travers tout le pays. C'est pendant cette période que ses collègues et ses supérieurs remarquent ses capacités en mathématiques et qu'ils l'encouragent à essayer d'entrer à l'université[13]. Il se présente donc pour être admis à l'université de Stanford en 1894 avec une lettre de recommandation du directeur des écoles du comté de Whatcom[14]. Il est admis comme “special student” en septembre 1894 car la direction de l'université ne sait pas trop comment prendre en compte l'examen réussi pour l'entrée à l'université de Copenhague. Sa situation d'étudiant se normalise au cours des mois suivants

> « In January of 1895 he was granted “full entrance standing, except for English 1b, on the basis of work done before entering the University”, and a month later he was granted an additional credit of sixty hours toward graduation[15]. »

Il suit des cours d'anglais, d'allemand, de physique et de mathématiques sur les sujets suivants : le *calculus*, les quaternions, les courbes planes , les équations différentielles, l'analyse, la géométrie solide, la théorie des invariants, la géométrie projective, le tracé de courbes, l'analyse vectorielle, la théorie des fonctions et la théorie des substitutions. Il obtient son B.A. en 1896 et son M.A. en mathématiques en 1897. Blichfeldt finance

[3] Miller 1970; Dickson 1947.
[4] Miller 1970.
[5] D'après Miller 1970, le nom de sa mère est Scholer.
[6] Bell 1951 p.181.
[7] Bell 1951.
[8] Miller 1970.
[9] Miller 1970.
[10] La famille de Blichfeldt semble représentative des immigrés danois aux Etats Unis. D'après Burma 1956, il s'agit d'une population composée surtout de fermiers avec un très bon niveau d'éducation et qui s'installe principalement dans les états de l'Iowa, Minnesota, Nebraska et Winsconsin. Il est intéressant de noter que Blichfeldt est cité dans cet article de Burma qui a pour objectif d'illustrer l'impact de l'immigration sur les arts et la science aux Etats Unis.
[11] Bacon et al. N.D..
[12] Miller 1970.
[13] Miller 1970; Royden 1989 p.239.
[14] Cité dans Royden 1989 p.239.
[15] Royden 1989 p.239.

ces trois années d'étude grâce à des économies faites les années précédentes et en assurant des travaux dirigés (« teaching assistantship ») à l'université pendant les années 1896-1897 [16].
Avec le soutien financier d'un professeur de Stanford, Rufus L. Green, il se rend l'année suivante à Leipzig où il travaille sous la direction de Sophus Lie sur la théorie des groupes continus. Il obtient son doctorat en 1898 à Leipzig avec une thèse intitulée *On a certain class of groups of transformations in space of three dimensions*[17].

Il retourne ensuite à l'université de Stanford où il effectue toute sa carrière de mathématicien. À son retour en 1898 il est d'abord instructeur en mathématiques, puis professeur assistant[18] en 1901, professeur associé en 1906, professeur en 1913 et professeur émérite en 1938. Il dirige le département de mathématiques à partir de 1927 jusqu'à sa retraite en 1938 [19]. Il est aussi professeur invité à l'université de Chicago pour le semestre d'été 1911 et à l'université de Columbia pour les semestres d'été de 1924 et 1925 [20]. Pendant la Première Guerre Mondiale, il travaille sous la direction de Oswald Veblen sur des questions de ballistique à l'Aberdeen Proving Ground[21].
Dans la première partie de sa carrière, son travail porte essentiellement sur la théorie des groupes, mais à partir de 1913 il se tourne vers des problèmes de théorie des nombres : géométrie des nombres, approximation diophantienne et formes quadratiques. Blichfeldt est un mathématicien qui a assez peu publié mais il s'est beaucoup investi dans l'*American Mathematical Society* pour laquelle il a fait de nombreux exposés et dont il a été vice-président en 1912 [22]. Il est aussi membre de *The Mathematical Association of America*, élu à la *National Academy of Sciences* en 1920 et membre du *National Research Council* entre 1924 et 1927 [23]. Il est d'ailleurs le représentant officiel de la *National Academy of Sciences* au congrès international des mathématiciens à Zürich en 1932 et celui du gouvernement américain et de l'*American Mathematical Society* en 1936 à Oslo. Blichfeldt a entretenu des liens avec son pays natal toute sa vie et le roi du Danemark le fait Chevalier de l'ordre de Dannebrog en 1938 [24].
Blichfeldt décède le 16 novembre 1945 à Palo Alto en Californie d'une attaque cardiaque consécutive à une opération.

[16] À cette époque il n'y avait cependant pas de frais de scolarité à Stanford, Royden 1989 p.239.
[17] Miller 1970.
[18] Il est l'assistant de Miller, voir Royden 1989 p.241.
[19] Pendant la Seconde Guerre Mondiale, l'université le rappelle pour qu'il assure quelques cours, Royden 1989 p.279.
[20] Dickson 1947; Bacon et al. N.D.. Bell indique des dates différentes pour ces visites : 1913 pour Chicago, 1925 et 1926 pour Columbia, voir Bell 1951 p.182-183.
[21] Dickson 1919b p.296.
[22] Miller 1970.
[23] Miller 1970; Bacon et al. N.D..
[24] Dickson 1947. Bell 1951 donne à nouveau une date différente, ici 1939, voir page 184.

3.1.2 Les sources de Blichfeldt sur la géométrie des nombres

Quand son premier article sur la géométrie des nombres est publié en 1914, Blichfeldt a travaillé presque exclusivement sur la théorie des groupes. Nous ne connaissons pas de déclaration explicite de Blichfeld pour expliquer ce changement complet de sujet[25]. Cependant, quand Bell oppose les mathématiciens qui préfèrent les problèmes liés à la continuité à ceux travaillant sur le discret, il classe Blichfeldt dans la première catégorie à cause de son travail sur les groupes continus[26]. Il est donc intéressant de remarquer que lorsque Blichfeldt se tourne vers la théorie des nombres, ses recherches portent sur la géométrie des nombres, sujet qui manifestait pour Minkowski l'intervention du continu dans le discret.

Comme les seules sources concernant Blichfeldt dont nous disposons sont ses publications mathématiques, deux échelles d'analyse vont être employées pour aborder ses articles : celle des mathématiques qui y sont développées (énoncés, démonstrations) et celle des références qui y sont citées. Les contenus mathématiques seront commentés dans les paragraphes suivants. Nous allons relever ici les mathématiciens cités par Blichfeldt dans son travail en géométrie des nombres. Même si cela ne nous donnera pas vraiment d'explication pour l'intérêt nouveau de Blichfeldt pour ce sujet, nous aurons ainsi des indications sur les travaux qu'il a consultés au sujet de la géométrie des nombres.

Dans la suite pour sélectionner la géométrie des nombres dans l'ensemble des travaux de Blichfeldt, nous choisissons les articles dans lesquels la géométrie des nombres est explicitement mentionnée ou bien dont le thème est un des sujets que nous avons rencontrés en liaison avec la géométrie des nombres dans le travail de Minkowski. Chez Blichfeldt, Il s'agit des formes quadratiques définies positives et en particulier la question du minimum pour des valeurs entières des variables, le discriminant d'un corps de nombres algébriques, l'approximation diophantienne et la majoration d'une somme de valeurs absolues de formes linéaires.
Nous trouvons 7 articles qui vérifient les critères précédents qui sont publiés entre 1914 et 1939, ce qui est finalement assez peu. Notons que nous n'avons pas comptabilisé les résumés des interventions orales faites lors de rencontres de l'*American Mathematical Society* et publiés dans le *Bulletin* de cette société. Ses résumés qui ne font en général que quelques lignes ne sont pas tous rédigés par Blichfeldt et ne permettent pas toujours de se faire une idée précise des résultats développés. Ils montrent cependant que

[25]Il semble abandonner complètement la théorie des groupes à partir de 1914 mis à part pour la publication de deux livres sur ce thème en 1916 et 1917, mais ce sont plus des livres dédiés à l'enseignement que des travaux de recherches.
[26]Reid 1993 p.104.

Blichfeldt a souvent abordé le thème de la géométrie des nombres, nous en avons en effet relevé 13 sur ce sujet entre 1913 et 1935. Dans ces exposés ont été annoncés des résultats ou des travaux sur la géométrie des nombres qui n'ont jamais été publiés. Par exemple, en 1919 il fait part de son projet de publier prochainement « An exposition of the theory of the geometry of numbers[27] » dans les *Annals of Mathematics*, mais d'après Bell cette idée a ensuite été abandonnée[28].

Le relevé des mathématiciens cités dans BLICHFELDT 1914, 1919, 1921, 1929, 1935, 1936, 1939 conduit aux résultats donnés dans le tableau 3.1 [29].

Mathématiciens	nombre de citations
MINKOWSKI	25
KORKINE et ZOLOTAREFF	8
HERMITE	4
DICKSON	3
GAUSS	2
HURWITZ	2
KRONECKER	2
REMAK	2
BENDERSKY	1
BIERBERBACH et SCHUR	1
BIRKHOFF	1
HOFREITER	1
SCHOLZ	1
SEEBER	1

TAB. 3.1 – Mathématiciens cités par Blichfeldt

Ce relevé met en évidence la place de Blichfeldt comme un des premiers successeurs important de Minkowski en géométrie des nombres. Sans surprise, Minkowski est de loin le plus cité des auteurs et constitue donc la source principale de Blichfeldt concernant la géométrie des nombres. En dehors de quelques références techniques, la plupart des autres articles sont antérieurs au travail de Minkowski ou ne relèvent pas directement de géométrie des nombres. Korkine et Zolotareff sont cités dans BLICHFELDT

[27] BLICHFELDT 1919 p.449.
[28] BELL 1951 p.187. Nous avons effectivement pas retrouvé de synthèse de la géométrie des nombres dans les travaux publiés de Blichfeldt.
[29] Nous avons relevé le nombre d'occurrence pour chaque mathématicien cité.

1914 et BLICHFELDT 1935 pour leurs articles sur les formes quadratiques définies positives publiés entre 1872 et 1877 dans les *Mathematische Annalen*. Ils y développent en particulier une méthode de réduction pour ces formes qui est utilisée par Blichfeldt. Cette méthode leur permet de déterminer la meilleure borne possible pour le minimum sur les valeurs entières des variables des formes quadratiques définies positives de 3, 4 et 5 variables. Hermite[30] est aussi cité pour ce sujet ainsi que pour ses résultats sur l'approximation simultanée de réels par des rationnels de même dénominateur. Kronecker (dans BLICHFELDT 1914, 1921) et Hurwitz (dans BLICHFELDT 1914) sont eux aussi cités pour leur travail sur ce thème d'approximation. Gauss (dans BLICHFELDT 1914, 1929) et Seeber (dans BLICHFELDT 1914) sont mentionnés pour avoir été parmi les premiers à s'être intéressés au problème du minimum des formes quadratiques définies positives en particulier pour celles de 2 ou 3 variables. Bierberbach et Schur (dans BLICHFELDT 1935) et Hofreiter (dans BLICHFELDT 1935) sont cités eux aussi pour leur participation dans l'étude de ce problème : Bierberbach et Schur pour un article de 1928 sur la réduction des formes quadratiques définies positives de n variables, Hofreiter pour un travail publié 1933 dans lequel il détermine toutes les classes de formes extrêmes (au sens de Korkine et Zolotareff) de 6 variables. Notons que ces deux articles n'apparaissent pas dans le recensement que nous avons effectué dans le *Jahrbuch* pour des raisons différentes. Alors que Minkowski apparaît explicitement dans son titre, l'article de Bierberbach et Schur n'a pas été relevé car il est classé dans *Algebraische Theorie der Formen*, rubrique que nous n'avons pas explorée. L'article de Hofreiter est quant à lui bien classé dans le chapitre *Diophantische Approximationen, Geometrie der Zahlen* mais ne mentionne pas Minkowski ou la géométrie des nombres de manière explicite[31]. Scholz (dans BLICHFELDT 1939) est cité pour un article de 1938 sur les discriminants minimaux des corps de nombres algébriques et la référence à Bendersky (dans BLICHFELDT 1939) concerne un long mémoire sur la fonction gamma que Blichfeldt mentionne pour un point technique (le calcul d'une limite dans lequel Γ intervient). Blichfeldt renvoie à l'*History of the Theory of Numbers* de Dickson pour trouver des réferences à propos des sujets qu'il traite.

À côté de ces travaux qui ne sont pas directement liés à la géométrie des nombres ou qui relèvent davantage de sa préhistoire (Gauss, Seeber, Hermite, Korkine, Zolotareff, Kronecker, Hurwitz), les références à Birkhoff et Remak apparaissent comme des exceptions. Ils sont en effet mentionnés pour des contributions qui sont issues d'un contact avec le travail de Blichfeldt. La citation de George Birkhoff (dans BLICHFELDT 1914) fait référence à une communication personnelle avec Blichfeldt où Birkhoff lui a proposé une autre preuve de son théorème qui généralise le théorème de Minkowski sur les convexes. Remak est cité (dans BLICHFELDT 1929, 1935) pour son article publié en

[30] Hermite est cité dans BLICHFELDT 1914, 1919, 1935.
[31] Hofreiter est cependant un mathématicien recensé pour d'autres articles.

1927 et intitulé *Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen*, il se positionne donc directement dans la ligne du travail de Blichfeldt sur la géométrie des nombres. Avec ces références au travail de Blichfeldt nous voyons déjà s'amorcer la construction d'une généalogie de la géométrie des nombres dans laquelle Blichfeldt occupe une place importante.

Notons que les travaux liés à la géométrie des nombres et effectués après Minkowski sont cités par Blichfeldt après 1914 date de son premier article sur ce thème. Quand il commence à s'intéresser à la géométrie des nombres, sa source unique sur ce sujet est Minkowski. Cette remarque semble confirmer que Blichfeldt est parmi les premiers mathématiciens à travailler sur la géométrie des nombres après Minkowski.

L'étude précédente ne nous éclaire cependant pas sur l'origine de cet intérêt pour la géométrie des nombres. La première trace que nous en avons est une intervention que Blichfeldt fait en 1913 lors d'une réunion de la section de San Francisco de l'American Mathematical Society. Le résumé de 10 lignes[32] de cette présentation montre seulement que Blichfeldt y a proposé une amélioration de la borne de Minkowski pour le minimum des formes quadratiques définies positives, estimation qui sera d'ailleurs encore améliorée dans son article publié en 1914. Ce dernier point semble indiquer que l'intérêt de Blichfeldt a commencé avec cette question du minimum des formes quadratiques, thème auquel il consacre la plupart de ses articles par la suite.

Pour expliquer en partie le passage de recherches sur les groupes (en particulier finis) à des recherches sur la géométrie des nombres, nous pourrions faire l'hypothèse que le premier contact de Blichfeldt avec le travail de Minkowski a eu lieu sur le terrain de la théorie des groupes de substitutions. En liaison avec son travail sur l'équivalence des formes quadratiques, Minkowski s'est en effet aussi intéressé aux substitutions linéaires homogènes à coefficients entiers de n variables[33] et il a démontré[34] en particulier en particulier que l'ordre d'un groupe fini de substitutions de ce type divise $2^n(2^n-1)(2^n-2)\dots(2^n-2^{n-1})$. Nous n'avons cependant pas trouvé d'éléments qui confirment cette hypothèse et si nous faisons l'étude des citations dans le travail de Blichfeldt avec les articles concernant les groupes nous pouvons voir que Minkowski n'y est jamais cité.

[32] Blichfeldt 1913.
[33] Voir Hilbert 1911 p.VIII-IX.
[34] Voir Minkowski 1887a.

3.2 Le travail publié de Blichfeldt en géométrie des nombres

3.2.1 Un nouveau principe pour la géométrie des nombres

Le premier article que Blichfeldt consacre à la géométrie des nombres est publié en 1914 dans les *Transactions of the American Mathematical Society*[35]. Dans le début de cet article, il revient sur le travail de Minkowski en géométrie des nombres ce qui permet de voir comment il envisage l'organisation de cette théorie après Minkowski. Pour lui la géométrie des nombres vient de la découverte par Minkowski d'un « geometrical principle which he applied with success to certain important problems in the theory of numbers[36]. » Le principe géométrique auquel il fait référence est le théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans un domaine convexe dont le centre est un point du réseau. Blichfeldt rappelle ce résultat sous sa forme géométrique

> « A surface in n-dimensional space, nowhere concave, possessing a center which coincides with one of the lattice-points of this n-space, and having a volume $\geq 2^n$, will contain at least two more lattice-points, either inside the surface or upon its boundary[37]. »

Il le rappelle aussi sous sa « forme analytique » telle que nous l'avons par exemple rencontrée dans les lettres de Minkowski adressées à Hermite. Blichfeldt revient ensuite sur deux applications données par Minkowski.
D'une part, si $[f(x_1, \ldots, x_n)]^2$ est une forme quadratique définie positive et de déterminant D, alors il existe des entiers l_1, …, l_n non tous nuls tels que

$$0 < f^2 \leq \frac{4}{\pi} \left[\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} D^{\frac{1}{n}} .$$

D'autre part, si v_1, …, v_n sont des formes linéaires homogènes en x_1, …, x_n, de déterminant Δ non nul, telles que s paires de ces formes sont à coefficients complexes conjugués et si f est définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = |v_1| + \cdots + |v_n| ,$$

il existe alors des entiers l_1, …, l_n non tous nuls vérifiant

$$0 < f \leq \left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^s \Gamma\left(1 + n\right) . |\Delta|\right]^{\frac{1}{n}} .$$

[35]Blichfeldt 1914. Comme tous les articles de Blichfeldt, certains arguments ne sont pas donnés nous les reconstituons dans ce qui suit.
[36]Blichfeldt 1914 p.227.
[37]Blichfeldt 1914 p.227.

La description qui est ici faite par Blichfeldt de la géométrie des nombres confirme ce que nous avons observé à propos du travail de Minkowski. La théorie s'organise autour du résultat sur les points d'un réseau dans un corps convexe qui est ici érigé en principe par Blichfeldt. Ce principe est ensuite appliqué à différentes situations (formes quadratiques, somme de formes linéaires...) afin d'obtenir de nouveaux résultats.
Avec cette première contribution à la géométrie des nombres, il semble que Blichfeldt veut donc revenir sur le fondement de cette théorie. En effet, comme le titre de son article l'indique il veut proposer « a new principle in the geometry of numbers ».
La manière dont Blichfeldt aborde ici la géométrie des nombres semble cohérente avec la description que fait Bell de l'enseignement à Stanford au début du XX^e siècle :

> « The instruction at Stanford was a curious mixture of the French, German and American methods, but it was extremely effective. *The professors insisted on a thorough mastery of general principles* rather than skill in problem-solving. Their attitude was this : if a problem was worth the serious effort of an advanced student, it should have at least the elements of a research project in it, and not be merely a difficult puzzle whose solution would add nothing to existing mathematics[38]... »

Blichfeldt commence par définir une notion plus générale de points d'un réseau. Dans l'espace de dimension n muni d'un système de coordonnées rectangulaires $(x_1, \ldots, x_n)$, il considère les plans

$$x_1 = a_1 + b_1 t,\ x_2 = a_2 + b_2 t,\ \ldots\ ,\ x_n = a_n + b_n t \qquad (t = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots),$$

où a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n sont des réels donnés. Ces plans partagent l'espace en parallélépipèdes dits fondamentaux et on suppose que k points appartenant strictement à chacun de ces parallélépipèdes sont fixés. Ce sont ces points qui sont appelés points de réseau. Blichfeldt indique que la définition classique de réseau est retrouvée en prenant $a_i = \frac{1}{2}$ et $b_i = 1$, pour tous les entiers i entre 1 et n, et en choisissant dans chaque parallélépipède le centre comme seul point du réseau ($k = 1$).

Soit maintenant S une partie ouverte et bornée de l'espace de dimension n dont le volume est noté V. Le nouveau principe énoncé par Blichfeldt dans le théorème I consiste en l'existence d'une translation

$$x_i' = x_i + \delta_i \qquad (i = 1,\ \ldots\ , n),$$

[38]Bell cité dans Reid 1993 p.101-102. L'organisation autour de principes étaient très importante dans la tradition française du XIX^e siècle en particulier chez Hermite, voir Goldstein 2008.

qui permet de placer S de telle sorte que le nombre L de points de réseau dans l'adhérence[39] de S vérifie l'inégalité

$$L > \frac{Vk}{W},$$

où W est le volume d'un parallélépipède fondamental et k le nombre de points de réseau dans chacun de ces parallélépipèdes.
Pour démontrer ce résultat, Blichfeldt commence par considérer un parallélépipède σ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et de longueur $Ab_1, \ldots, Ab_n$, où A est un entier naturel fixé choisi assez grand pour qu'après une translation S puisse être contenue dans σ (sur la figure 3.2 A est pris égal à 2). Il note (S, σ) la figure obtenue après translation de S dans σ.

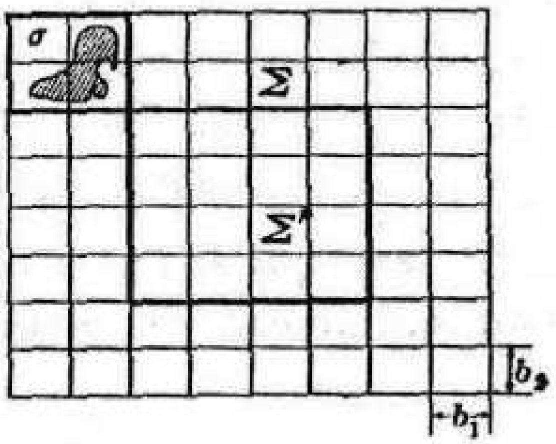


FIG. 3.2 – Illustration de la démonstration du théorème I

Soit Σ un autre parallélépipède construit comme σ mais dont les côtés mesurent $Bb_1, \ldots, Bb_n$ avec B un entier naturel supérieur à $2A$ (8 sur la figure 3.2). Le volume de Σ est

$$Bb_1 \times Bb_2 \times \cdots \times Bb_n = B^n W,$$

il est donc possible de placer Σ de telle sorte qu'il contienne exactement B^n parallélépipèdes fondamentaux. Soit enfin Σ' un troisième parallélépipède inclus dans Σ de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueur $(B-2A)b_1, \ldots, (B-2A)b_n$. Les faces de Σ' sont supposées être à distance $Ab_1, \ldots, Ab_n$ de celles de Σ.
(S, σ) est ensuite placée pour qu'un sommet O de σ coincide avec un sommet de Σ et Blichfeldt définit des translations en posant

$$x'_i = x_i + t_i \frac{b_i}{C} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

[39]Blichfeldt n'utilise pas le terme adhérence mais parle du nombre de « lattice-points L contained in the continuum or lying as near as we please to its boundary ».

où C est un entier naturel fixé et les t_i parcourent l'ensemble des entiers relatifs. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées de O dans sa position initiale, x'_1, …, x'_n doivent vérifier

$$x_i \;\le\; x'_i \;\le\; \underbrace{B.C \times \frac{b_i}{C}}_{\text{côté de } \Sigma} - \underbrace{A.C \times \frac{b_i}{C}}_{\text{côté de } \sigma} = x_i + [(B-A)C]\,\frac{b_i}{C} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

pour qu'après translation (S, σ) reste dans Σ. Ceci implique que pour tous les indices i, $0 \le t_i \le (B-A)C$ et donc qu'il y a $[(B-A)C+1]^n$ positions possibles pour (S, σ) dans Σ en faisant opérer les translations définies ci-dessus.

En faisant le même raisonnement que pour Σ, Blichfeldt montre que Σ' contient $(B-2A)^n$ parallélépipèdes fondamentaux et donc $k\,(B-2A)^n$ points de réseau. Si l'entier C est pris suffisamment grand, chacun de ces points de réseau appartient à l'adhérence de un ou plusieurs translatés de S. Il s'agit maintenant de dénombrer ces points en les comptant à chaque fois qu'ils sont dans l'adhérence d'une des parties S. Notons N le résultat de ce dénombrement. Pour P un de ces points de réseau, nous cherchons le nombre de parties S pour lesquelles P est à compter ; pour cela Blichfeldt considère que S est fixe et que c'est le point P qui est translaté. Après chacune des translations (3.1), le point P est le sommet d'un parallélépipède dont les côtés ont pour longueur $\frac{b_1}{C}$, …, $\frac{b_n}{C}$. Notons M_P le nombre de ces parallélépipèdes qui sont entièrement contenus dans S. Un sommet de chacun d'entre eux est alors une position possible pour le point P, donc si M est le minimum des M_P pour P un des points de réseau dans Σ', il vient

$$N \;\ge\; \sum_{P \in \Sigma'} M_P \;\ge\; k\,(B-2A)^n \times M\,.$$

Considérons maintenant $S^{(j)}$ les parties incluses dans Σ qui sont l'image de S par une des translations (3.1) et $\alpha^{(j)}$ le nombre de points de réseaux dans l'adhérence de $S^{(j)}$, ainsi

$$N \;=\; \sum_{j=1}^{[(B-A)C+1]^n} \alpha^{(j)}\,.$$

Si nous avions pour tous les indices j,

$$\alpha^{(j)} \;<\; k\,\frac{(B-2A)^n\,M}{[(B-A)C+1]^n},$$

alors :

$$N \;<\; \sum_{j=1}^{[(B-A)C+1]^n} k\,\frac{(B-2A)^n\,M}{[(B-A)C+1]^n} \;=\; k\,(B-2A)^n \times M\,,$$

ce qui est contradictoire. Il existe donc j_0 pour lequel

$$\alpha^{(j_0)} \;\geq\; k\,\frac{(B-2A)^n\,M}{[(B-A)C+1]^n}$$

et posons $L=\alpha^{(j_0)}$. Nous prenons ensuite la limite quand B puis C tendent vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, le membre de droite devient

$$\lim_{C\to+\infty}\frac{k\,M}{C^n}\;.$$

Or M est le nombre de parallélépipèdes inclus dans S et de côtés $\frac{b_1}{C}$, …, $\frac{b_n}{C}$, d'où

$$\lim_{C\to+\infty}\left(M.\frac{b_1}{C}\ldots\frac{b_n}{C}\right)=V\;,$$

ce qui implique

$$\lim_{C\to+\infty}\frac{M}{C^n}=\frac{V}{b_1\ldots b_n}=\frac{V}{W}\;.$$

Finalement $L\geq\frac{kV}{W}$ mais comme L est un entier, l'inégalité est en fait stricte à moins que $\frac{kV}{W}$ soit aussi un entier. Dans ce dernier cas, Blichfeldt considère S' qui contient S mais pas de point de réseau supplémentaire. Le volume V' de S' est plus grand que celui de S et S' est choisi de telle sorte que $\frac{kV'}{W}$ n'est plus entier. Le résultat démontré précédemment s'applique à S' et donc $L>\frac{kV'}{W}\geq\frac{kV}{W}$. Ceci montre bien que dans tous les cas

$$L\;>\;\frac{kV}{W}\;.$$

Blichfeldt étend ensuite ce théorème au cas où la partie S est remplacée par un nombre fini S_1, …, S_m de parties ouvertes et bornées dont $\bar{S}$ est la réunion (« network »). Il suppose aussi donnés α_1, …, α_m des réels strictement positifs. Si V_i et L_i désignent respectivement le volume de S_i et le nombre de points de réseau dans l'adhérence de S_i alors, quitte à translater $\bar{S}$, nous avons l'inégalité

$$\alpha_1L_1+\cdots+\alpha_mL_m\;>\;\frac{k\,(\alpha_1V_1+\cdots+\alpha_mV_m)}{W}\;.$$

Après avoir indiqué les modifications à apporter à la preuve du théorème I pour obtenir cette généralisation, Blichfeldt montre comment son nouveau principe, qu'il présente comme géométrique, permet de retrouver le théorème de Minkowski.

Pour cela, il considère une fonction f qui vérifie les conditions des fonctions distances de Minkowski, c'est-à-dire que :

1. $f(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ et $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ si et seulement si $x_1=\cdots=x_n=0$,

2. si $t > 0$, $f(tx_1, \dots, tx_n) = t\, f(x_1, \dots, x_n)$,
3. $f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \leq f(y_1, \dots, y_n) + f(z_1, \dots, z_n)$,
4. $f(-x_1, \dots, -x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Le théorème I est ensuite appliqué à la partie S qui est l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant l'inégalité

$$f(x_1, \dots, x_n) \; < \; J^{-\frac{1}{n}} \,,$$

où J est l'intégrale $\int dx_1 \dots dx_n$ calculée sur le domaine $f(x_1, \dots, x_n) \leq 1$. Le volume de S est donc $V = 1$ et pour le réseau (au sens usuel) des points à coordonnées entières $k = W = 1$. Le théorème de Blichfeldt montre donc qu'il existe une translation, dont les composantes sont notées $\delta_1, \dots, \delta_n$, pour laquelle le nombre de points à coordonnées entières L situés dans l'adhérence de l'image de S vérifie

$$L > \frac{kV}{W} = 1 \,, \quad \text{ou encore} \quad L \geq 2 \,.$$

Soient alors $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $-z = (-z_1, \dots, -z_n)$ deux points distincts du réseau donnés par le théorème et pout tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $l_i = y_i + z_i$. $(l_1, \dots, l_n)$ est bien aussi un point du réseau. De plus, comme $y - \delta$ et $-z - \delta$ sont des points de S, il vient

$$\begin{aligned} 0 \; < \; f(l_1, \dots, l_n) \;\; &= \;\; f(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ &= \;\; f[(y_1 - \delta_1) - (-z_1 - \delta_1), \dots, (y_n - \delta_n) - (-z_n - \delta_n)] \\ &\leq \;\; f(y_1 - \delta_1, \dots, y_n - \delta_n) + f(-z_1 - \delta_1, \dots, -z_n - \delta_n) \\ &\leq \;\; J^{-\frac{1}{n}} + J^{-\frac{1}{n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{J}} \,, \end{aligned}$$

ce qui est bien la forme analytique du théorème de Minkowski.

Blichfeldt revient ensuite sur des applications déjà étudiées par Minkowski et montre comment avec son théorème il peut obtenir de meilleures estimations.
Si F est une forme quadratique de n variables définie positive et de discriminant D, Blichfeldt l'écrit

$$F = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \,,$$

où les v_i sont des formes linéaires de déterminant Δ ; alors $D = \Delta^2$. Prenons S_λ l'ensemble défini par l'inégalité

$$F(x_1, \dots, x_n) \; < \; (\lambda\phi)^{\frac{2}{n}} \,,$$

avec λ un entier compris entre 1 et m, $\phi = \frac{n+2}{2mJ}$ et où $J = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Delta.\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$ est le volume de l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $F(x_1, \dots, x_n) < 1$. Si V_i désigne le volume de S_i, alors

$$V_i = i\phi J\,.$$

En gardant les notations précédentes, la généralisation du théorème I appliquée avec le réseau des nombres entiers donne

$$\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_m L_m \;>\; \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_m V_m = \phi J\,(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m)\,.$$

En posant, $g = 1 + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + m^{\frac{2}{n}}$, $p_i = L_i - L_{i-1}$, $\alpha_i = (i+1)^{\frac{2}{n}} - i^{\frac{2}{n}}$ pour $i < m$ et $\alpha_m = \frac{(n+2)g}{nm} - m^{\frac{2}{n}}$, l'inégalité précédente devient[40]

$$\frac{(n+2)g}{nm}\,L_m - \left(p_1 + 2^{\frac{2}{n}}p_2 + \cdots + m^{\frac{2}{n}}p_m\right) \;>\; \frac{(n+2)g}{nm}\,. \tag{3.2}$$

Si $(x'_1, \ldots, x'_n)$ un point du réseau dans l'adhérence S_λ, alors $v'_i = v_i(x'_1 - \delta_1, \ldots, x'_n - \delta_n)$ et donc

$$(v'_1)^2 + \cdots + (v'_n)^2 \;<\; (\lambda\phi)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon\,, \tag{3.3}$$

pour $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. De même, si $(x''_1, \ldots, x''_n)$ est un autre point du réseau, $v'_i - v''_i = v_i(x'_1 - x''_1, \ldots, x'_n - x''_n)$, etc. Ainsi la quantité

$$(v'_1 - v''_1)^2 + \cdots + (v'_n - v''_n)^2 \tag{3.4}$$

est une valeur de F pour des valeurs entières de ses variables. P est le nombre des points du réseau dans S_1, …, S_m, donc aussi le nombre de points du réseau dans S_m, donc $P = L_m$ et de plus $L_m = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$. Sommant les expressions (3.4) sur toutes les $\frac{1}{2}P(P-1)$ paires de points distincts du réseau dans S_m, Blichfeldt obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j<l\le P} \left[\left(v_1^{(j)} - v_1^{(l)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j)} - v_n^{(l)}\right)^2\right] \\
&\qquad = \; P\sum_{j=1}^{P}\left[(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2\right] - \left(\sum_{j=1}^{P} v_1^{(j)}\right)^2 - \cdots - \left(\sum_{j=1}^{P} v_n^{(j)}\right)^2 \\
&\qquad < \; P\sum_{j=1}^{P}\left[(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2\right]\,.
\end{aligned}$$

Or p_1 points du réseau sont dans S_1, ils vérifient donc

$$(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2 \;<\; \phi^{\frac{2}{n}} + \varepsilon\,,$$

[40] Blichfeldt 1914 p.232.

p_2 points du réseau sont dans S_2 mais pas dans S_1, ils sont tels que

$$(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2 \ < \ (2\phi)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon \ \ldots$$

p_m points du réseau sont dans S_m mais pas dans S_{m-1} donc pour ces points

$$(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2 \ < \ (m\phi)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon \,.$$

Ainsi la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{P} \left[(v_1^{(j)})^2 + \cdots + (v_n^{(j)})^2\right]$ est strictement inférieure à

$$P \ \left[p_1(\phi^{\frac{2}{n}} + \varepsilon) + p_2((2\phi)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon) + \cdots + p_m((m\phi)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon)\right]$$

et par suite

$$\sum_{1\leq j<l\leq P} \left[\left(v_1^{(j)} - v_1^{(l)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j)} - v_n^{(l)}\right)^2\right]$$
$$< P \quad \left[p_1\phi^{\frac{2}{n}} + p_2(2\phi)^{\frac{2}{n}} + \cdots + p_m(m\phi)^{\frac{2}{n}}\right] + \varepsilon P^2 \,.$$

Avec (3.2) et $L_m = P$, cette dernière inégalité implique

$$\sum_{1\leq j<l\leq P} \left[\left(v_1^{(j)} - v_1^{(l)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j)} - v_n^{(l)}\right)^2\right] \ < \ P\,\phi^{\frac{2}{n}}\,(P-1)\,\frac{(n+2)\,g}{nm} + P^2\varepsilon \,.$$

D'autre part,

$$\sum_{1\leq j<l\leq P} \left[\left(v_1^{(j)} - v_1^{(l)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j)} - v_n^{(l)}\right)^2\right]$$
$$\geq \quad \frac{1}{2}\,P\,(P-1)\ \left[\left(v_1^{(j_0)} - v_1^{(l_0)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j_0)} - v_n^{(l_0)}\right)^2\right] \,,$$

où le couple (j_0, l_0) correspond au terme le plus petit dans la somme. Après avoir divisé par $\frac{1}{2}P(P-1)$, les deux dernières inégalités impliquent

$$\left(v_1^{(j_0)} - v_1^{(l_0)}\right)^2 + \cdots + \left(v_n^{(j_0)} - v_n^{(l_0)}\right)^2 \ < \ 2\phi^{\frac{2}{n}}\ \frac{(n+2)\,g}{nm} + 2\,\frac{P}{P-1}\,\varepsilon \,.$$

Enfin, en remplaçant ϕ par sa valeur et en faisant tendre m vers $+\infty$, Blichfeldt obtient le théorème II : il existe des entiers l_1, …, l_n non tous nuls et tels que

$$F(l_1, \ldots, l_n) \ \leq \ \frac{2}{\pi}\,\left[\Gamma\left(1 + \frac{n+2}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}}\ D^{\frac{1}{n}} \,.$$

Blichfeldt remarque que la valeur asymptotique de cette borne $\frac{nD^{\frac{1}{n}}}{\pi e}$ est meilleure que celle qui avait été obtenue par Minkowski.
Ce dernier résultat permet de montrer que pour $f = |v_1| + \cdots + |v_n|$, il existe des valeurs entières non toutes nulles des variables telles que

$$0 \ < \ f \ \leq \ \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{n+2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n}} |\Delta|^{\frac{1}{n}} .$$

Quand n devient grand, cette estimation est à nouveau plus précise que celle donnée par Minkowski.
Enfin, l'article se termine avec une dernière application du théorème I qui conduit Blichfeldt à un résultat d'approximation simultanée de $n-1$ réels positifs par des rationnels de même dénominateur. Dans le théorème IV, il améliore les approximations démontrées auparavant à part dans le cas de deux réels[41].

Cette présentation permet de comprendre le titre donné par Blichfeldt à son article : « A new principle in the geometry of numbers, with some applications ». Nous avions vu comment chez Minkowski la géométrie des nombres est organisée autour de son théorème sur les domaines convexes. En appliquant ce résultat à des situations variées, Minkowski démontre de nouveaux théorèmes, par exemple sur les formes quadratiques ou les formes linéaires. Blichfeldt montre dans cet article que son théorème I peut se substituer à celui de Minkowski au centre de la théorie. D'abord parce qu'il apparaît plus général : le théorème de Blichfeldt implique le théorème de Minkowski. Ensuite parce qu'il est susceptible d'être appliqué aux mêmes situations tout en améliorant les résultats obtenus.
Nous pouvons aussi remarquer que le théorème de Blichfeldt est plus général parce qu'il porte sur une notion de réseau plus large que celle utilisée par Minkowski. Cependant quand il applique ce résultat, Blichfeldt revient à la notion traditionnelle de réseau et à notre connaissance Blichfeldt n'a jamais exploité dans son travail cet aspect de son résultat.

Cet article est aussi une étape importante pour la géométrie des nombres car il influence la manière avec laquelle la théorie est transmise par la suite. Le point de vue adopté par Blichfeldt pour démontrer le théorème de Minkowski est en effet celui qui est le plus repris. Dans beaucoup de livres où ce théorème est présenté et en particulier dans les plus récents, c'est la preuve de Blichfeldt en deux étapes qui est proposée[42].

[41] Blichfeldt 1914 p.235.
[42] Voir par exemple Siegel 1989; Cassels 1959; Samuel 2003; Lekkerkerker 1969; Martinet 1996; Tauvel 2000 ainsi que l'énoncé du théorème de Minkowski proposé au début de l'introduction.

La première étape est un lemme, parfois appelé lemme ou théorème de Blichfeldt[43], qui est en fait une version plus faible du théorème I. Voyons par exemple l'énoncé dans Lekkerkerker 1969 page 35 :

> « **Theorem 2** (theorem of blichfeldt). Let M be a measurable set in $\mathbb{R}^n$. Suppose that $V(M) > 1$ or that M is bounded and closed and $V(M) \geq 1$. Then M contains two points x, y, such that $x - y$ is a lattice point $\neq 0$. »

Le théorème de Minkowski se démontre alors soit en suivant l'argument de Blichfeldt que nous avons déjà présenté s'il est donné sous forme analytique, soit en appliquant le résultat précédent à $\frac{1}{2}M$ pour sa forme géométrique. En effet, si M est convexe, symétrique par rapport à l'origine O et de volume strictement plus grand que 2^n, alors $\frac{1}{2}M$ a un volume strictement supérieur à 1. D'après le théorème précédent, $\frac{1}{2}M$ contient donc deux points x, y tels que $x - y$ est un point du réseau différent de l'origine. Mais la symétrie et la convexité de M impliquent que ce point du réseau

$$x - y = \frac{1}{2}\ [2x + (-2y)]$$

appartient aussi à M, ce qui prouve le théorème de Minkowski dans sa forme géométrique[44].

3.2.2 Formes quadratiques et empilement de sphères

Un autre aspect des travaux de Blichfeldt en géométrie des nombres, souvent mentionné, est sa nouvelle méthode pour aborder le problème de l'empilement de sphères de même rayon[45]. Cette méthode est présentée dans un article publié en 1929 [46], cependant Blichfeldt avait annoncé un résultat sur ce sujet dès 1919 dans une communication lue à Chicago à un symposium de *The American Mathematical Society*[47].

Pour une forme quadratique de n variables definie positive de déterminant D, Blichfeldt note $\gamma_n\, D^{\frac{1}{n}}$ la meilleure borne possible pour le minimum de cette forme pour des valeurs non toutes nulles des variables[48]. Après avoir rappelé la majoration qu'il avait obtenue pour γ_n dans son article de 1914, il fait le lien entre cette question et le problème de la détermination de l'empilement régulier de sphères le plus dense. Un empilement régulier de sphères est un empilement pour lequel les centres des sphères

[43] Dans Samuel 2003 p.67, c'est ce lemme qui est même appelé théorème de Minkowski.
[44] Voir Siegel 1989 p.17.
[45] Voir Cassels 1959 p.248 ; Lekkerkerker 1969 p.261-262 ; Siegel 1989.
[46] Blichfeldt 1929.
[47] Un résumé de cette conférence est publié dans Blichfeldt 1919.
[48] Cette notation va s'imposer par la suite et la constante γ_n sera plus tard baptisée constante d'Hermite. Voir par exemple Martinet 1996.

forment un réseau. Dans ce cas, la densité maximale qu'il est possible d'obtenir est

$$\rho_0 = \frac{\left(\frac{\pi\,\gamma_n}{4}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} .$$

L'objectif de Blichfeldt est de trouver ρ_1 tel que la densité de n'importe quel empilement de sphères (régulier ou non) soit strictement plus petite que ρ_1. Si une telle constante a été trouvée, comme $\rho_0 < \rho_1$, elle permet de déterminer une estimation pour γ_n :

$$\gamma_n < \frac{\pi}{4}\left[\rho_1\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} .$$

Blichfeldt considère donc des sphères S_1, ..., S_m de rayon 1 dans l'espace de dimension n dont les coordonnées des centres sont notées $(a_1, b_1, \dots, k_1)$, ..., $(a_m, b_m, \dots, k_m)$ et une origine $T = (0, 0, \dots, 0)$ fixée. Soit aussi $r_i = (a_i^2 + b_i^2 + \cdots + k_i^2)^{1/2}$ la distance entre T et le centre de la sphère S_i. La première étape consiste à minorer la somme des r_i^2. Pour cela, Blichfeldt remarque que pour que les sphères ne se rencontrent pas, la distance entre deux centres quelconques doit être au moins 2, donc

$$(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2 + \cdots + (k_i - k_j)^2 \;\geq\; 4 \quad \text{pour tout } \; i \neq j .$$

En sommant ces inégalités sur toutes les paires de centres distincts ($1 \leq i < j \leq m$), il obtient

$$m\sum_{i=1}^{m}(a_i^2 + b_i^2 + \cdots + k_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)^2 - \cdots - \left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)^2 \;\geq\; 2m(m-1) ,$$

ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^2 \;\geq\; 2(m-1) . \tag{3.5}$$

Blichfeldt fait ensuite appel à une analogie avec la physique. L'idée fondamentale derrière sa méthode est de remplacer les sphères abstraites par des sphères matérielles

> « Leaving the centers fixed, we now replace the given geometrical spheres by physical spheres of superposable matter[49] ».

Blichfeldt garde donc les centres des sphères précédentes fixes mais considère des sphères dont le rayon est plus grand afin qu'elles puissent s'intersecter. Il suppose que ce sont des sphères matérielles avec une quantité de matière par unité de volume[50] qui est telle que la densité de matière totale en n'importe quel point de l'espace soit majorée par une constante.

[49] Blichfeldt 1929 p.606.

[50] Blichfeldt utilise le terme « density of the matter », nous utiliserons le mot densité dans la suite bien qu'en français cela désigne une grandeur sans unité.

Blichfeldt commence par choisir des sphères de rayon $\sqrt{2}$ avec comme densité de matière la fonction φ donnée par :

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2 - r^2 & \text{si } r \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{si } r > \sqrt{2} \end{cases},$$

où r désigne la distance au centre de la sphère. Si en un point m sphères se rencontrent, quitte à faite un changement de coordonnées on peut supposer qu'il s'agit du point T, alors la densité totale en T vérifie

$$\sum_{i=1}^{m}(2 - r_i^2) = 2m - \sum_{i=1}^{m} r_i^2 \leq 2m - 2(m-1) = 2\,.$$

Soit un cube de côté E qui contient k sphères de rayon 1, alors il existe un cube de côté $E + 2(\sqrt{2} - 1)$ qui contient k sphères de rayon $\sqrt{2}$. Si Q désigne la matière contenue dans ce dernier cube, l'inégalité précédente donne

$$Q \; < \; 2 \times \left[E + 2(\sqrt{2} - 1)\right]^n.$$

D'autre part, en notant S_r la surface d'une sphère de rayon r, alors

$$Q = k \int_0^{\sqrt{2}} S_r \times (2 - r^2)\, dr\,.$$

Comme $S_r = \dfrac{n\pi^{n/2}\, r^{n-1}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$, il vient donc

$$\begin{aligned} Q &= k.n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{2}} r^{n-1}\,(2 - r^2)\, dr \\ Q &= \frac{4\,k\,K\,2^{\frac{n}{2}}}{n+2}\,, \end{aligned}$$

où $K = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$. Blichfeldt obtient donc

$$2 \times \left[E + 2(\sqrt{2} - 1)\right]^n \; > \; \frac{4\,k\,K\,2^{\frac{n}{2}}}{n+2}\,.$$

Or la densité ρ_2 de l'empilement est le rapport du volume occupé par les k sphères dans le cube de côté E par le volume de ce cube, c'est-à-dire $\rho_2 = \frac{kK}{E^n}$, ainsi

$$\rho_2 \; < \; \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}} \left(1 + \frac{2\sqrt{2} - 2}{E}\right)^n = \rho_1\,.$$

En prenant E qui tend vers $+\infty$, ρ_1 se rapproche de $\frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}$ et cette limite conduit en fait à la même estimation pour γ_n que celle qu'avait déjà trouvée Blichfeldt en 1914.

Pour réussir à améliorer la majoration de γ_n, Blichfeldt applique la même méthode en modifiant la fonction φ. Il suppose maintenant que le rayon des sphères et les r_i sont inférieurs à $\sqrt{2}$. Ceci lui permet de démontrer que

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \;\geq\; \sqrt{2m\,(m-1)}\,. \tag{3.6}$$

Cette dernière inégalité va jouer le même rôle que (3.5) par la suite. Il reprend les sphères précédentes de rayon $\sqrt{2}$ avec une fonction densité de matière φ qui est nulle à l'extérieur des sphères et à l'intérieur :

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq r \leq 2-\sqrt{2} \\ (2-r)^2 & \text{si } 2-\sqrt{2} \leq r \leq 1 \\ 2-r^2 & \text{si } 1 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases} ,$$

où r est toujours la distance au centre de la sphère. Les inégalités (3.5) et (3.6) implique que la densité de matière en n'importe quel point est inférieure à 2. Si nous notons à nouveau Q la matière contenue dans un cube de côté $E + 2(\sqrt{2}-1)$ qui contient k sphères alors

$$\begin{aligned} Q &= k\left[\int_0^{2-\sqrt{2}} S_r \times 2\,dr + \int_{2-\sqrt{2}}^{1} S_r \times (2-r)^2\,dr + \int_1^{\sqrt{2}} S_r \times (2-r^2)\,dr\right] \\ Q &= \frac{4\,K\,k}{n+2}\left[2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n+1} - (2-\sqrt{2})^{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ Q &= \frac{4\,K\,k\,2^{\frac{n}{2}}}{n+2}\,(1+g)\,. \end{aligned}$$

Blichfeldt en déduit que

$$2 \times \left(E + 2(\sqrt{2}-1)\right)^n \;>\; \frac{4\,K\,k\,2^{\frac{n}{2}}}{n+2}\,(1+g)\,,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{k\,K}{E^n} \;<\; \left(1 + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{E}\right)^n \frac{n+2}{2^{\frac{n}{2}+1}\,(1+g)}\,.$$

En faisant tendre E vers $+\infty$, il trouve cette fois

$$\rho_1 = \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}\,(1+g)}\,,$$

puis que

$$\gamma_n \;<\; \frac{2}{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{n+2}{2}\right)}{1+g}\right]^{\frac{2}{n}}.$$

Comme $g > 0$, cette dernière estimation de γ_n est bien meilleure que celle précédemment obtenue par Blichfeldt.
Il revient pour terminer sur la question de la détermination de γ_n pour n un entier fixé. Après avoir rappelé les valeurs de γ_n pour $n = 2, 3, 4, 5$, Blichfeldt annonce avoir démontré que

$$\gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}\,, \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64} \quad \text{et} \quad \gamma_8 = 2\,.$$

La méthode proposée ici par Blichfeldt est en fait très proche de celle utilisée par Minkowski pour démontrer son théorème sur les convexes. L'idée de Minkowski consiste à considérer des domaines convexes (comme des sphères) qui ne se rencontrent que sur leurs frontières et qui sont tous inclus dans un parallélépipède. Minkowski compare ensuite le volume de ce parallélépipède et le volume occupé par les convexes, puis il passe à la limite. De manière analogue, Blichfeldt considère des sphères toutes incluses dans un cube. Mais ces sphères ne sont plus nécessairement disjointes et elles sont supposées matérielles. La matière contenue dans les sphères est donnée par une fonction densité de matière. Blichfeldt compare alors la matière dans les sphères et dans le cube qui les contient.

3.2.3 Minimum des formes quadratiques de 6, 7 et 8 variables

Dans son article[51] publié en 1935, Blichfeldt revient sur l'étude de la constante γ_n. Cette fois son objectif n'est pas de donner une estimation de cette constante valable pour tout n, mais de déterminer les valeurs exactes de γ_6, γ_7 et γ_8. Il rappelle d'abord en introduction d'une part la définition de γ_n et d'autre part ses valeurs pour n égal 2, 3, 4 et 5 qui sont alors connues

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}\,, \qquad \gamma_3 = \sqrt[3]{2}\,, \qquad \gamma_4 = \sqrt{2}\,, \qquad \gamma_5 = \sqrt[5]{8}\,.$$

Les valeurs qu'il obtient pour n entre 6 et 8 sont celles qu'il avait annoncées dans son article précédent, c'est-à-dire :

$$\gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}\,, \qquad \gamma_7 = \sqrt[7]{64}\,, \qquad \gamma_8 = 2\,.$$

[51] Blichfeldt 1935.

Pour démontrer ces résultats, Blichfeldt emploie la méthode de réduction des formes quadratiques de n variables développée par Korkine et Zolotareff en 1873 et qu'ils nomment « le développement des formes suivant les minima[52] ». Ils ont démontré que chaque forme quadratique définie positive de n variables est équivalente à une forme qui s'écrit

$$f = A_1(x_1+\alpha x_2+\cdots+\gamma x_n)^2+A_2(x_2+\delta x_3+\cdots+\zeta x_n)^2+\cdots+A_{n-1}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A_n x_n^2 .$$

De plus, dans cette écriture, A_1 est le minimum[53] de f, qui est donc atteint pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 0, \ldots, 0)$. A_2 est le minimum de la forme en x_2, ..., x_n lorsque le premier terme $A_1(x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \gamma x_n)^2$ est annulé, etc... Korkine et Zolotareff montrent aussi un certain nombre d'inégalités sur les coefficients de f. D'abord, les coefficients (dits intérieurs par Blichfeldt) α, β, ..., δ, ..., σ sont tous inférieurs à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue. Ensuite, les coefficients A_1, A_2, ..., A_n (coefficients extérieurs) vérifient les relations suivantes :

$$A_{i+1} \geq \frac{3}{4} A_i , \quad A_{i+2} \geq \frac{2}{3} A_i ; \tag{3.7}$$

$$A_{i+1}\, A_{i+2}\, A_{i+3}\, A_{i+4} \geq \frac{1}{8} A_i^4 . \tag{3.8}$$

Toutes ces inégalités permettent de déterminer γ_n pour $2 \leq n \leq 5$, mais elles doivent être raffinées pour obtenir γ_6, γ_7 et γ_8.
Blichfeldt introduit la notation $(i\ j \ldots k \mid a\ b \ldots c)$ qui désigne la valeur de f quand tous les termes avant $A_i(x_i + \ldots)^2$ sont annulés et que l'on substitue $x_i, x_j, \ldots, x_k$ par $a, b, \ldots c$. Comme A_i est le minimum de f quand les termes précédents sont annulés, il vient

$$(i\ j \ldots k \mid a\ b \ldots c) \geq A_i .$$

Blichfeldt étudie ensuite

$$(i, i+1, i+2 \mid x\ y\ z) = A_i(x - sy \pm tz)^2 + A_{i+1}(y - vz)^2 + A_{i+2} z^2 ,$$

ce qui lui permet de démontrer en particulier qu'en notant $A_{i+1} = (1 - \lambda^2)A_i$ et $A_{i+2} = (1 - \mu^2)A_{i+1}$, alors

$$\mu \leq \frac{1-\lambda}{1+\lambda} ,$$

[52] Korkine et Zolotareff 1873 p.370.
[53] Par minimum de f, il est entendu minimum pour des valeurs entières et non toutes nulles des variables.

ou encore, si $V = 1 - 2(1-\lambda)(1-\mu^2)$ est positif :

$$v \leq \frac{1}{2}(1-\sqrt{V}) \qquad \text{et} \qquad t \geq \frac{1}{2}(1-\lambda+(1+\lambda)\sqrt{V}) .$$

Dans la suite, f est une forme de 6, 7 ou 8 variables et il se ramène à $A_1 = 1$, $A_2 = A$, $A_3 = B$, ..., $A_8 = G$. L'objectif est donc maintenant de démontrer que

$$ABCDE \geq \frac{3}{64}, \qquad ABCDEF \geq \frac{1}{64} \quad \text{et} \quad ABCDEFG \geq \frac{1}{256}, \tag{3.9}$$

ce qui implique

$$\gamma_6 \leq \sqrt[6]{\frac{64}{3}}, \qquad \gamma_7 \leq \sqrt[7]{64}, \qquad \gamma_8 \leq 2 .$$

En effet, comme $A_1 = 1$ est le minimum de f, γ_6 est telle que $1 = \gamma_6 \Delta^{1/6}$, où Δ est le déterminant de la forme. Or $\Delta = ABCDE$, d'où $\gamma_6 = \frac{1}{(ABCDE)^{1/6}}$, ce qui conduit à l'inégalité cherchée pour γ_6. Les autres cas se traitent de manière identique. Ces dernières inégalités sont en faites suffisantes pour avoir des égalités car Korkine et Zolotareff avaient donné des formes réalisant les valeurs $\sqrt[6]{\frac{64}{3}}$, $\sqrt[7]{64}$ et 2 pour respectivement γ_6, γ_7 et γ_8.

Toute la suite de l'article consiste donc à démontrer les inégalités (3.9). Pour cela Blichfeldt raisonne par l'absurde. Les contradictions sont obtenues en combinant les inégalités précédentes et en distinguant différents cas selon les valeurs des coefficients. Il s'agit d'un article très technique et calculatoire et qui, mis à part la notion de réduction des formes quadratiques, n'utilise pas de connaissance théorique difficile.

C'est une remarque générale que nous pouvons faire sur le travail de Blichfeldt en géométrie des nombres. Dans BLICHFELDT 1914, la preuve du théorème principal est la partie la plus théorique, les applications étant ensuite surtout de nature calculatoire. Dans l'article de 1929 qui concerne les formes quadratiques et l'empilement des sphères, Blichfeldt présente une nouvelle méthode pour étudier ces empilements, mais il se contente de présenter sa méthode à travers deux exemples différents sans faire aucune heuristique un peu générale. Enfin dans l'article étudié dans ce paragraphe, le point de départ de Blichfeldt est la réduction des formes quadratiques au sens de Korkine et Zolotareff. Ensuite tout son travail consiste à chercher des inégalités plus précises sur les coefficients des formes réduites. Pour cela il effectue uniquement un travail technique sur des inégalités.

Conclusion

Dans ce chapitre, le principe de variation de l'échelle d'observation a permis d'obtenir des informations de natures différentes sur Blichfeldt à partir d'un unique type de sources : ses articles de mathématiques. L'étude des citations dans ses publications a par exemple confirmé qu'il est parmi les premiers mathématiciens à reprendre la géométrie des nombres après Minkowski. L'examen des mathématiques pratiquées dans certains articles a lui mis en évidence quelques caractéristiques du travail de Blichfeldt en géométrie des nombres : il n'élabore pas de nouvelles constructions théoriques, il n'introduit pas de nouveaux objets ou de nouveaux problèmes. Par contre, il propose une nouvelle approche pour étudier l'empilement de sphères de même rayon ; il obtient de nouveaux résultats ou il en améliore d'autres en approfondissant des méthodes déjà connues.

Plus particulièrement, il semble que la géométrie occupe une place moins importante dans la géométrie des nombres de Blichfeldt que chez Minkowski. Blichfeldt reconnaît que l'utilisation de la géométrie est caractéristique du travail de Minkowski en géométrie des nombres[54]

> « We now introduce the powerful geometrical process of Minkowski (1864-1909). This process, dating from about 1890, he named "Geometry of numbers". He introduces a certain key figure (standard curve or surface). »

Mais le seul endroit où la géométrie est mise en avant dans son propre travail est l'article de 1914 dans lequel il annonce que

> « A new geometrical principle will now be stated and proved[55]. »

Cependant cette idée de nouveau principe géométrique n'est pas développée par la suite.
En fait, la conception de Blichfeldt sur la géométrie est un point délicat car nous avons très peu d'éléments qui pourraient nous éclairer sur son point de vue à ce sujet. Il commente un peu l'aspect géométrique dans le travail de Minkowski dans une communication faite lors d'un symposium sur la géométrie des nombres organisé le 28 mars 1919 pendant une réunion de l'*American Mathematical Society* à Chicago. Dans cet exposé, Blichfeldt revient sur le théorème de Minkowski sur les convexes

> « It remained for Minkowski to discover a theorem bearing on the least values of a very general class of functions, by means of an elegant geometrical interpretation of this minimum[56]. »

[54] Blichfeldt 1932 p.7.
[55] Blichfeldt 1914 p.228.
[56] Blichfeldt 1919 p.450.

Ce que Blichfeldt semble souligner ici à propos de la géométrie est son seul caractère esthétique, ce qui est beaucoup plus pauvre que l'utilisation qui en était faite par Minkowski. Rappelons en effet par exemple que Minkowski lui donnait un rôle crucial dans l'heuristique et qu'il avait l'ambition de faire de la géométrisation le principe permettant d'unifier les différents domaines des mathématiques.
La deuxième communication du symposium est faite par Dickson et elle concerne les applications de la géométrie des nombres à l'étude des nombres algébriques. Le commentaire de Dickson sur la géométrie est peut être plus fidèle aux idées de Minkowski sur le sujet

> « The geometry of numbers not only furnishes a concrete geometric image of certain fundamental theorems on algebraic numbers, but also provides a new and attractive method of proving important theorems on algebraic fields[57]. »

L'intervention de Blichfeldt à cette occasion est aussi intéressante car il fait un bref historique de la géométrie des nombres. Il trace les grandes lignes d'une histoire qui seront celles reprises par la suite. Blichfeldt apparaît donc comme celui qui le premier a commencé à façonner une histoire de la géométrie des nombres qui sera transmise dans le milieu des mathématiciens travaillant sur ce sujet.
Pour lui la géométrie des nombres est issue « d'une classe de problèmes » dont le meilleur exemple est la détermination du minimum (ou d'estimations du minimum), pour des valeurs entières et non nulles des variables, de la forme quadratique définie positive $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Gauss et Seeber ont donné les premiers résultats dans les cas particuliers de formes de deux ou trois variables[58]. Le premier résultat général sur ce problème est celui d'Hermite qui montre que pour une forme de n variables de déterminant D le minimum est plus petit que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} D^{\frac{1}{n}}$. La citation précédente de Blichfeldt montre que pour lui Minkowski intervient en élargissant la question à une classe plus grande de fonctions dont les formes quadratiques sont un cas particulier. C'est le sens qui est donné au théorème sur les convexes sous sa forme analytique.
Cette histoire présentée par Blichfeldt est un élément supplémentaire suggérant qu'il est venu à la géométrie des nombres à partir des formes quadratiques.

L'étude du travail de Blichfeldt sur la géométrie des nombres montre aussi une image différente de cette discipline par rapport à celle que nous avions avec Minkowski. La différence n'apparaît pas dans les sujets qui sont abordés par les deux mathématiciens mais dans ce qui caractérise pour chacun la géométrie des nombres.
Avec Blichfeldt, la géométrie des nombres se définit davantage par les problèmes qui y sont traités. La discipline s'organise donc plus autour de questions clés et la nature des

[57] Dickson 1919a p.453.
[58] Blichfeldt 1914 p.233.

méthodes employées pour les résoudre importe peu. Nous venons de commenter par exemple l'importance moins grande accordée aux méthodes géométriques. Parmi ces questions clés, nous avons en particulier : le minimum des formes quadratiques définies positives, l'approximation simultanée de nombres réels par des rationnels, le minimum de la somme de valeurs absolues de formes linéaires, l'empilement de sphères etc... Ces problèmes ne sont pas reliés par l'appel à l'intuition géométrique qui donnait son unité à la discipline chez Minkowski. Ceci peut conduire à s'interroger sur la pertinence à inclure tous les articles de Blichfeldt cités au paragraphe 3.1.2 dans la géométrie des nombres. Pour l'article de 1914 dont le titre renvoie explicitement à la géométrie des nombres la question ne se pose pas mais c'est peut être moins clair pour les autres. Malgré le point de vue différent parfois adopté par Blichfeldt dans ces autres travaux nous pensons qu'ils doivent être pris en compte et cela pour plusieurs raisons. D'abord, comme nous l'avons dit, ils ont tous pour thème des questions étudiées par Minkowski dans le cadre de la géométrie des nombres et Blichfeldt semble les intégrer à la discipline (par exemple à travers les citations qui y sont faites) sans que l'utilisation de la géométrie soit une condition pour cette intégration. Ensuite, ces articles de Blichfeldt sont eux aussi cités dans des travaux consacrés à la géométrie des nombres. Prenons par exemple le fascicule sur la géométrie des nombres de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[59]. Blichfeldt y est cité précisément pour les trois articles que nous avons un peu détaillés[60]. Nous pouvons aussi regarder dans les bibliographies des livres sur la géométrie des nombres pour voir quels sont les articles de Blichfedt qui y sont cités. Ainsi dans les bibliographies de Cassels 1959; Lekkerkerker 1969; Siegel 1989; Olds et al. 2000 tous les articles que nous avons recensés au paragraphe 3.1.2 sont cités à l'exception du rapport sur la géométrie des nombres de 1919.

Certaines des remarques précédentes sont cependant à préciser. Chez Minkowski, la géométrie des nombres s'organise autour de son théorème sur les parties convexes et elle est caractérisée par l'utilisation d'une géométrie associée à l'intuition. Dans son article publié en 1914, quand Blichfeldt commence à travailler sur ce sujet, il donne l'impression de reprendre en partie cette conception du domaine. Les aspects liés à l'intuition sont laissés de côté, mais nous avons noté son objectif de mettre un nouveau principe géométrique au centre de la théorie. Ce nouveau résultat fondamental est ensuite appliqué à divers problèmes et il occupe alors la place du théorème de Minkowski. Mais cette organisation de la géométrie des nombres s'estompe dans les travaux suivants de Blichfeldt. Dans les articles que nous avons commentés il n'utilise

[59] Keller 1954.

[60] Blichfeldt 1919 est aussi cité mais c'est un rapport sur le sujet et ne constitue donc pas un travail original.

pas son théorème de 1914 et la géométrie est absente du calcul des constantes γ_6, γ_7 et γ_8. Il applique ce théorème dans des articles plus tardifs[61] mais cette manière de travailler en géométrie des nombres consistant à utiliser un résultat central dans différentes situations n'est pas aussi systématique avec Blichfeldt qu'elle l'était chez Minkowski.

Il se dessine donc avec Blichfeldt un changement progressif de l'organisation interne de la géométrie des nombres telle qu'elle a été observée chez Minkowski. Ce changement va se confirmer dans les travaux de Mordell et Davenport.

[61] Blichfeldt 1936, 1939.

Chapitre 4

Les travaux de Mordell en géométrie des nombres (1923-1945) : une nouvelle conception disciplinaire

Sommaire

Le recensement de la géométrie des nombres effectué dans le *Jahrbuch* suggère que Louis Mordell a joué un rôle important dans son développement. C'est d'abord le mathématicien pour lequel le plus grand nombre de publications a été relevé (12). Ensuite, le graphe représentant le nombre de publications consacrées à la géométrie des nombres connaît justement un pic les années pour lesquelles Mordell a lui aussi publié de manière importante sur ce sujet. Les autres sources qui ont été utilisées pour repérer la discipline, les livres sur la géométrie des nombres ainsi que l'*Enzyklopädie*, ont elles aussi fait ressortir les contributions de Mordell.
Dans ce chapitre, son travail est examiné à la même échelle que celui de Minkowski et Blichfeldt. Mais l'étude de ses articles montre que pour comprendre la dynamique de ses recherches il est nécessaire de prendre en compte les travaux de Harold Davenport sur la géométrie des nombres. À partir de la deuxième moitié des années 1930, les deux

mathématiciens commencent à travailler en étroite collaboration sur ce sujet : ils se citent, leurs articles circulent entre eux avant publication, leurs travaux se répondent... Nous nous intéresserons d'abord aux premiers travaux de Mordell sur la géométrie des nombres, puis aux débuts de Davenport sur ce sujet. Enfin, nous étudierons principalement leur collaboration à travers deux thèmes de leurs recherches : le produit de trois formes linéaires homogènes et les formes cubiques binaires.

4.1 Mordell et Davenport : leurs débuts en géométrie des nombres

4.1.1 Louis Joel Mordell (1888-1972)

4.1.1.1 Eléments biographiques

Louis Joel Mordell est né le 28 janvier 1888 à Philadelphie[1]. Il est le troisième d'une famille de huit enfants. Ses parents sont des immigrés lithuaniens arrivés aux Etats Unis en 1881. Son père, Phinéas Mordell (1861-1934), a été un spécialiste reconnu en hébreu[2]. Mordell raconte que, un peu avant l'âge de 14 ans, il lit de vieux livres d'algèbre grâce auxquels il découvre la théorie des nombres[3]. Il explique que l'idée d'aller étudier les mathématiques à Cambridge est venue de la lecture de ces ouvrages. Il remarque en effet que beaucoup des problèmes qui y sont proposés sont issus de « scholarship examinations » de Cambridge ou bien du « Mathematical Tripos[4] ». Il part donc pour Cambridge à la fin de l'année 1906[5] et il obtient finalement un scholarship à Saint John's College (voir la coupure de presse figure 4.1[6]).

En octobre 1907, il commence donc sa préparation pour le Mathematical Tripos[7]. Son directeur des études est alors le géomètre H.F. Baker avec qui il ne s'entend pas très bien[8]. Mordell pense que Baker aurait voulu qu'il se spécialise aussi en géométrie ; il lui fait en tout cas suivre des cours sur les courbes planes et la géométrie différentielle, cours que Mordell abandonne[9]. Il réussit la première partie du Tripos en 1909, il est « third Wrangler ». C'est après avoir réussi la seconde partie du Tripos que Mordell

[1] Mordell 1971b, p.953.
[2] Cassels 1973, p.493.
[3] Mordell 1971b, p.953.
[4] Mordell 1971b, p.954.
[5] Davenport 1964, p.3.
[6] Mordell (St John's), box 4, folder 41. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[7] En plus du scholarship de Saint John's, il est soutenu financièrement par une bourse d'un lycée de Philadelphie (« Philadelphia High ») Cassels 1973, p.494.
[8] Pour des informations sur Henry F. Baker voir Barrow-Green et Gray 2006.
[9] Mordell 1971b p.956.

FIG. 4.1 – Article paru dans *The Philadelphia Press* le jeudi 10 janvier 1907

commence réellement à s'intéresser à la théorie des nombres. Mordell se rappelle qu'il s'agissait d'un sujet peu étudié à cette époque en Grande Bretagne et se considère donc comme un autodidacte[10]. Son premier travail dans ce domaine concerne la résolution en nombres entiers de l'équation[11]

$$y^2 = x^3 + k\,,$$

où k est un entier fixé. Il arrive deuxième pour le prix Smith[12] pour ce travail[13].
Entre 1913 et 1920, Mordell occupe un lectureship au Birkbeck College de Londres. Pendant la guerre, entre 1916 et 1919, il passe deux ans comme statisticien au ministère des munitions[14]. Il est ensuite chargé de cours au Manchester College of Technology entre 1920 et 1922. Puis il obtient un poste à l'université de Manchester, d'abord un readership en 1922 et à partir de 1923 jusqu'en 1945 il occupe la Fielden Chair of Pure Mathematics. En 1924, alors qu'il est encore citoyen américain, il est élu Fellow of the Royal Society. Il obtient la nationalité britannique en 1929 [15]. Pendant ces années à Manchester, il est président de la *London Mathematical Society* entre 1943 et 1945 et obtient la *De Morgan Medal* en 1941. D'après Cassels, il bâtit autour de lui à Manchester une école performante en mathématiques, il accueille par exemple pour des durées plus ou moins longues R. Baer, G. Billing, C. Chabauty, H. Davenport, P. Erdös, H. Heilbronn, Chao Ko, D.H. Lehmer, K. Mahler, B. Segre, J.A. Todd, P. Du Val, L.C. Young ou G. Žilinskas[16]. Il aide aussi un certain nombre de réfugiés fuyant le nazisme, en particulier Kurt Mahler qui lui aussi a travaillé sur la géométrie des nombres.
En 1945, Mordell revient à Cambridge, il succède à Hardy à la Sadleirian Chair et obtient un Fellowship à Saint John's College. Il donne à Cambridge des cours de théorie des nombres dont le sujet est souvent la géométrie des nombres, les nombres algébriques ou les équations diophantiennes. Il y organise également un séminaire hebdomadaire[17].
Davenport remarque sur ces années à Cambridge

« In the years that followed, he built up an active school of research in

[10]Comme mathématicien faisant exception et s'intéressant à la théorie des nombres Mordell cite G.B. Mathews et J.H. Grace, voir Mordell 1971b, p.957, Cassels 1973 p.495. Dans le livre de Mathews, *Theory of Numbers* (Mathews 1892), un chapitre est consacré à l'interprétation géométrique de la théorie des formes mais il s'arrête avant Minkowski.

[11]Mordell 1914.

[12]Il n'y avait pas à cette époque en Angleterre de diplôme comme le PhD pour les étudiants se destinant à la recherche. À Cambridge, le *Smith Prize*, qui était décerné au meilleur article soumis, était pour ces étudiants un moyen de montrer leur capacité à poursuivre dans une carrière de chercheur. Au sujet de ce prix voir Barrow-Green 1999.

[13]Cassels 1973, p.496.

[14]Davenport 1964, p.3.

[15]Cassels 1973, p.500-501.

[16]Cassels 1973, p.503, Davenport 1964 p.4.

[17]Cassels 1973, p.506.

> Cambridge, which specialized mainly, but not entirely, in the geometry of numbers[18]. »

Mordell est professeur émérite à partir de 1953. On lui décerne le Senior Berwick Prize en 1946 et la Sylvester Medal of the Royal Society en 1949. Il est membre étranger des académies d'Oslo, d'Uppsala et de Bologne et au cours de sa carrière éditeur de *Acta Arithmetica* et du *Journal of Number Theory*[19]. Après sa retraite en 1953 il visite de nombreuses universités comme par exemple celles de Toronto, du Ghana, du Nigeria, du Colorado…
Mordell décède le 12 mars 1972 à Cambridge[20].

4.1.1.2 Aperçu général des travaux de Mordell

En 1964 le volume IX des *Acta Arithmetica* est dédié à Mordell. À cette occasion, Davenport écrit un court article biographique sur Mordell dans lequel il revient sur ses travaux.
À la différence avec ce que nous avions observé avec Blichfeldt, Mordell est un mathématicien très prolifique. La liste de ses publications[21] comporte 270 articles (ce qui inclut les comptes rendus d'ouvrages) et 1 livre. Ce qui suit n'est qu'un résumé très rapide des recherches effectuées par Mordell.
Davenport identifie quatre grands thèmes de recherche dans la carrière scientifique de Mordell : les équations diophantiennes, les fonctions theta et les fonctions modulaires, la géométrie des nombres et enfin les congruences et sommes exponentielles[22].
Les premiers travaux de Mordell concernent les équations diophantiennes avec l'étude en particulier de l'équation $y^2 = x^3 + k$. Ces premières recherches se caractérisent par l'application de la théorie des invariants à la théorie des équations diophantiennes[23].
Le résultat pour lequel Mordell est sans doute le plus célèbre est le théorème dit maintenant de Mordell-Weil. En utilisant le procédé de descente infinie, Mordell démontre[24] en 1922 que le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique est de type fini, cette formulation actuelle du théorème n'est pas celle de Mordell qui n'utilise pas dans son article le vocabulaire de la théorie des groupes[25].
L'intérêt pour les fonctions modulaires date aussi du début de la carrière de Mordell. À ce sujet il travaille sur des formules sur le nombre de classes ou encore sur le nombre de

[18] Davenport 1964, p.4.
[19] Cassels 1973, p.509-510.
[20] Cassels 1973, p.509.
[21] Cette liste est publiée dans les volumes IX et XXIII de *Acta Arithmetica*.
[22] Davenport 1964, p.6-12.
[23] Voir Cassels 1973, p.496-497 et Goldstein 1993 p.40-42.
[24] Mordell 1922.
[25] Voir Cassels 1986; Schappacher 1990; Goldstein 1993.

FIG. 4.2 – Louis Joel Mordell (1888-1972)

décompositions d'un entier en un nombre donné de carrés. Ces recherches portent aussi sur des fonctions plus spécifiques. En 1917, il démontre[26] par exemple la multiplicativité de la fonction de Ramanujan notée τ et définie par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n)\, x^n = x \left\{ \prod_{m=1}^{+\infty} (1 - x^m) \right\}^{24} .$$

D'autres travaux sur ce sujet concernent le calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at^2} + bt}{e^{ct} + d}\, dt \,,$$

problème lié à des sommes de Gauss et aux fonctions theta[27].
Nous reviendrons par la suite en détails sur le thème de la géométrie des nombres.
La question des sommes exponentielles concerne l'estimation de sommes du type

$$\sum_x e^{\frac{2\pi i f(x)}{p}} \,,$$

où f est un polynôme défini modulo p et où la somme est faite sur un système complet de résidus modulo p. Mordell travaille aussi sur l'estimation du nombre de solutions d'équations

$$f(x,y) \equiv 0 \pmod{p} \,,$$

avec f un polynôme.
Davenport présente à part certains travaux qui ne sont pas liés aux thèmes précédents. Parmi eux, nous avons par exemple des articles sur la représentation comme somme de carrés de formes linéaires des formes quadratiques binaires ou sur la résolution simultanée de deux équations quadratiques

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \,, \quad Q_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \,.$$

Mordell a aussi laissé un certains nombres de conjectures, parmi lesquelles la plus célèbre est certainement celle qui affirme la finitude du nombre de points rationnels sur une courbe de genre strictement plus grand que 1[28].

[26] Mordell 1917.
[27] Voir Davenport 1964 p.8-9, Cassels 1973 p.499-500.
[28] Conjecture démontrée par Gerd Faltings en 1983.

4.1.2 Les premiers travaux de Mordell en géométrie des nombres 1927-1937

La première mention publiée par Mordell du travail de Hermann Minkowski se trouve dans un article publié en 1923. Cet article[29] est en fait un compte rendu introductif à la théorie des nombres algébriques et Mordell n'y développe donc pas de recherches personnelles.

Mordell débute par une introduction historique, pour lui l'origine de cette théorie se situe dans l'utilisation par Leonhard Euler de nombres de la forme $a + b\sqrt{-2}$. Euler cherchait alors à démontrer que les seules solutions entières de l'équation $y^2 + 2 = x^3$ sont $x = 3$ et $y = \pm 5$, énoncé qu'il attribuait à Pierre Fermat. La théorie continue ensuite à se développer avec des travaux concernant la loi de réciprocité quadratique et ses généralisations aux lois de réciprocité cubique et biquadratique. L'étude de ces questions amena Carl Friedrich Gauss à considérer les nombres complexes de la forme $a + ib$ où a et b sont des entiers.

Toujours d'après Mordell, c'est ensuite le dernier théorème de Fermat et l'équation $x^p + y^p = z^p$ qui conduisirent les mathématiciens à considérer les nombres $a + \zeta b$ où ζ est une racine p-ième de l'unité. La factorisation de tels nombres n'est pas toujours unique comme c'est le cas pour les entiers de Gauss $a + ib$, ce problème était alors la principale difficulté de la théorie à surmonter. Mordell signale le travail de Ernst Eduard Kummer à ce sujet mais insiste surtout sur la théorie des idéaux de Richard Dedekind qui illustre pour lui une idée « caractéristique » des mathématiques qui est de travailler avec des objets plus généraux (les idéaux) que ceux qui sont étudiés au départ (des nombres algébriques) pour résoudre un problème[30].

Après cette introduction historique Mordell revient sur les notions de nombres algébriques, d'entiers algébriques, de corps de nombres algébriques, de bases entières, de conjugués et de discriminant d'un corps. C'est à ce propos que Minkowski est cité pour la première fois car il a démontré la formule asymptotique suivante pour le discriminant d d'un corps de nombres algébriques $K(\theta)$ de degré n :

$$d \sim \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2r_2} e^{2n - \frac{1}{6n}} .$$

[29] Mordell 1923.

[30] Comme c'est souvent le cas avec Mordell, il développe son point de vue en donnant un exemple. Il choisit ici celui de $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ qui se généralise avec la fonction Γ définie pour $s > 0$ par $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-s} s^{n-1}\, dx$. Pour un entier $n \geq 1$, on a alors $\Gamma(n) = (n-1)!$. Cette manière d'envisager la théorie des idéaux de Dedekind est différente de certaines autres interprétations pour lesquelles une caractéristique importante de la solution de Dedekind est de rester dans le cadre de l'arithmétique. Mordell ne semble pas attacher beaucoup d'importance à ce point comme le montre le parallèle fait avec la fonction Γ qui fait intervenir l'analyse.

Après avoir souligné l'importance des unités des corps de nombres algébriques, Mordell énonce un autre théorème dû à Minkowski concernant les formes linéaires. Nous reviendrons plus loin sur ce théorème car il semble occuper une place particulière dans la théorie pour Mordell.
Mordell s'intéresse ensuite à des critères permettant de déterminer si un nombre θ est algébrique de degré n. Il rappelle alors un résultat d'approximation : « θ ne peut être un nombre algébrique de degré n s'il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$\left|\frac{p}{q} - \theta\right| < \frac{c}{q^\lambda}$$

où c est un nombre donné[31] ». Joseph Liouville avait montré le résultat pour $\lambda > n$, puis Axel Thue en 1908 avait obtenu $\lambda \geq n$ et enfin Carl L. Siegel en 1921, $\lambda > 2\sqrt{n}$.
Mordell présente un autre critère issu du travail de Minkowski qui consiste à étudier les minima des formes $x_0 + x_1\theta + \cdots + x_{n-1}\theta^{n-1}$ où les x_i sont des entiers plus petit qu'un entier t fixé. Rappelons que Minkowski avait énoncé son critère en introduisant la notion de chaîne de substitutions[32]. Mordell le donne ici en suivant la présentation faite par Philipp Furtwängler[33] en 1917 qui considérait les rapports $\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{m_3}{m_2}$, ... où m_i est le minimum pour l'entier $t = i$. Ces rapports sont en nombre fini pour un nombre algébrique θ de degré n.
Mordell revient aussi sur les idéaux, en particulier sur le fait qu'il est possible d'« étendre beaucoup de concepts arithmétiques aux idéaux » et sur le lien entre la factorisation des idéaux et la factorisation des nombres algébriques.
Ensuite, la notion de congruence par rapport à un idéal permet à Mordell d'introduire la norme $N(A)$ d'un idéal A, puis la question du nombre de classe d'idéaux. À nouveau un résultat de Minkowski joue un rôle important dans ce problème car il permet de montrer que tout idéal A contient un élément a tel que

$$|N(a)| \geq N(A)\sqrt{d}\,,$$

ce qui a pour conséquence qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'idéaux. Mordell explique comment ce nombre de classes H est important dans la résolution de certaines équations diophantiennes. Il rappelle le lien entre le calcul de H et la fonction $f(s) = \sum \frac{1}{N(A)^s}$ pour laquelle la sommation porte sur tous les idéaux du corps de nombres algébriques $K(\theta)$ étudié et où la partie réelle de s est strictement supérieure à 1.
Continuant avec des méthodes analytiques, Mordell note que la méthode de Hardy et

[31] Mordell 1923, p.451.
[32] Minkowski 1899.
[33] Furtwängler 1917.

Littlewood pour le calcul de formules approchées pour le nombre de décomposition d'un entier naturel n en somme de carrés se généralise pour des entiers algébriques en utilisant des fonctions theta introduites par Erich Hecke. L'article se termine par quelques remarques sur les lois de réciprocités générales.
Bien que la géométrie des nombres ne soit pas au centre de cet article, ce travail montre la bonne connaissance et l'intérêt de Mordell pour les résultats obtenus par Minkowski. Nous avons déjà cité certains d'entre eux, mais le résultat de Minkowski sur lequel Mordell insiste le plus est celui concernant le produit de formes linéaires qu'il juge « fondamental dans la théorie et a contribué largement à sa simplicité et à son élégance[34] ». Ce théorème de Minkowski est énoncé de la façon suivante : pour des nombres réels a, b, c, d, p et q où p, q sont strictement positifs et vérifient

$$p\,q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

il existe des entiers x, y qui ne sont pas nuls tous les deux et tels que

$$|ax + by| \leq p \qquad \text{et} \qquad |cx + dy| < q\,.$$

Mordell semble déjà assez bien connaître ce problème et les différentes approches utilisées pour l'aborder : l'approche géométrique de Minkowski avec le théorème sur les parties convexes et symétriques par rapport à l'origine ; les approches jugées arithmétiques de David Hilbert et d'Adolf Hurwitz ; la preuve analytique de Carl Siegel, la plus récente, utilisant des séries trigonométriques[35]. Nous verrons des travaux de Mordell qui s'inscrivent dans chacune de ces trois approches, en particulier les méthodes analytiques sont l'objet de recherches importantes de Mordell dans les années 1928-1930 où il publie plusieurs articles sur la formule sommatoire de Poisson.

Le premier article original de Mordell en géométrie des nombres est rédigé en 1927 et traite du produit de deux formes linéaires non homogènes[36]. En fait pendant la période allant de 1927 à 1937, l'intérêt de Mordell en géométrie des nombres se porte presque exclusivement sur ce problème des formes linéaires. De manière un peu générale ce problème peut se formuler en disant qu'il s'agit d'étudier les plus petites valeurs prises par un systèmes de n formes linéaires (parfois par leur produit ou la somme de leur valeur absolue) quand les variables prennent des valeurs entières.
Le discours qu'il prononce le 15 novembre 1927 devant *the Manchester Literary and*

[34] Mordell 1923, p.450.
[35] Siegel 1922.
[36] Mordell 1928a.

Philosophical Society et qui est publié dans *Nature* en 1928 témoigne de l'importance qu'il accorde à ce problème[37]. À cette occasion, Mordell discute des six problèmes de théorie des nombres qui ont pour lui le plus d'influence sur les recherches de l'époque et parmi ces questions se trouve la conjecture de Minkowski sur le produit de n formes linéaires non homogènes. Il aborde d'abord le problème des trois bicarrés d'Euler qui consiste en l'étude de l'équation $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. Il rappelle ensuite l'importance du dernier théorème de Fermat dans les premiers développements de la théorie algébrique des nombres. Le problème suivant est celui de la détermination des nombres rationnels x et y qui satisfont l'équation du troisième degré à coefficients rationnels suivante :

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + i = 0$$

Il précise bien sûr qu'il a lui même démontré à l'aide du procédé de descente infinie que toutes les solutions peuvent être obtenues à partir d'un nombre fini d'entre elles par la méthode des tangentes et des sécantes. Mordell passe ensuite au problème du nombre de classes de Gauss. Gauss avait conjecturé que pour un nombre de classes $H(D)$ de formes quadratiques de déterminant $-D$ donné, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de D possibles. Mordell aborde ensuite le problème des diviseurs de Dirichlet. Il consiste en l'étude de la somme $d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$ où $d(i)$ désigne le nombre de diviseurs de l'entier i. Mordell indique que Dirichlet avait montré en 1843 que

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = n \log n + (2\gamma - 1)n + R(n)$$

où $\gamma = 0,577\ldots$ est la constante d'Euler et le reste $R(n)$ vérifie $R(n) = O(\sqrt{n})$. De meilleures approximations furent données par Voronoï en 1903 ($R(n) = O(\sqrt[3]{n}\log n)$) et Van der Corput ($R(n) = O(\sqrt[3]{n})$). Bien que Mordell remarque la diversité des approches utilisées (géométriques, arithmétiques), pour lui ce sont les méthodes de théorie analytique des nombres qui ont joué le plus grand rôle dans les développements récents. Mordell termine avec la conjecture de Minkowski sur le produit de n formes linéaires non homogènes qui nous intéresse plus particulièrement ici[38]. Il rappelle un énoncé de cette conjecture : étant données des formes linéaires non homogènes

$$L_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - c_i \qquad (1 \leq i \leq n)\,,$$

où les a_{ij} et les c_i sont des nombres réels tels que le déterminant $|a_{ij}|$ est égal à 1,

[37] Mordell 1928b.

[38] Bien que cette conjecture soit attribuée à Minkowski, nous n'avons pas trouvé cet énoncé dans le travail de Minkowski que nous avons consulté. Freeman Dyson, qui démontre le cas du produit de 4 formes linéaires dans Dyson 1948, confirme qu'il n'en a trouvé aucune trace dans les travaux publiés de Minkowski.

existe-t-il des nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ tels que

$$|L_1\, L_2 \ldots L_n| \;\leq\; 2^{-n} \;\; ?$$

Publié en 1928, le premier article de Mordell en liaison avec la géométrie des nombres concerne justement cette conjecture de Minkowski sur le produit de formes linéaires non homogènes[39]. Dans cet article Mordell commence par des rappels historiques à propos de ce problème que nous reprenons ici.
Pour Mordell les premiers résultats pour le produit de deux formes L_1 et L_2 sont ceux de Pafnuty Tchebychef qui démontra que pour des valeurs entières des variables

$$|L_1 L_2| \;\leq\; \frac{1}{2}$$

et Hermite[40] qui améliora la borne précédente avec

$$|L_1 L_2| \;\leq\; \sqrt{\frac{2}{27}}\,.$$

En fait, comme celui de Tchebychef, le théorème d'Hermite donne l'existence d'une infinité d'entiers x et y tels que

$$|x - ay - b| \;<\; \sqrt{\frac{2}{27}}\,\frac{1}{y}\;\; ,$$

où a et b sont deux nombres réels. La preuve d'Hermite utilisait la réduction des formes quadratiques ternaires. Ces résultats étaient alors déjà envisagés en liaison avec des problèmes d'approximations dans le cadre des fractions continues. C'est toujours dans ce cadre mais en abordant la question avec des méthodes géométriques que Minkowski[41] démontra que

$$|L_1 L_2| \;\leq\; \frac{1}{4}\,.$$

Enfin, en 1913, Robert Remak propose une démonstration plus simple pour le produit de deux formes utilisant cette fois les formes quadratiques binaires[42] et en 1923, il réussit à prouver le résultat pour trois formes linéaires non homogènes[43].

Mordell juge que la preuve de Remak pour $n = 3$ est « excessivement compliquée », il lui semble donc qu'il serait très difficile d'« étendre ses méthodes à plus de trois

[39] Mordell 1928a.
[40] Hermite 1880.
[41] Minkowski 1901b, 1907.
[42] Remak 1913.
[43] Remak 1923a,b.

variables[44] ». De plus, d'un point de vue méthodologique il pense que pour résoudre le cas où n est quelconque, il est fructueux de multiplier les démonstrations dans les cas plus simples :

> « An obvious method of attempting to deal with the general theorem is to find new proofs for the case $n = 2$ [45]. »

Nous pouvons voir les effets de cette opinion de Mordell sur son travail. Nous constaterons à travers quelques exemples qu'il publie souvent plusieurs articles sur exactement le même problème : il propose plusieurs approches, simplifie des preuves… L'exemple le plus frappant est peut-être celui du produit de formes linéaires mais ce n'est pas le seul, nous le verrons aussi pour la question du minimum des formes cubiques binaires.

Dans cet article de 1928, Mordell propose donc une nouvelle preuve du cas où $n = 2$ qu'il espère plus facile à généraliser que celle de Remak (bien qu'il indique ne pas encore y être parvenu). Etant données deux formes linéaires non homogènes,

$$L_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - c_1 \qquad \text{et} \qquad L_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - c_2 \ ,$$

dont les coefficients sont réels et le déterminant égal à 1, le problème est de montrer l'existence de deux entiers x_1 et x_2 qui vérifient

$$|L_1\, L_2| \ \leq \ \frac{1}{4} \ .$$

La preuve de Mordell est fondée sur deux lemmes. Dans le premier de ces lemmes, le déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est supposé égal à 1, il existe alors des entiers x_1 et x_2, qui sont non tous deux nuls et pour lesquels

$$|a_{11}x_1 + a_{12}x_2|\ |a_{21}x_1 + a_{22}x_2| \ \leq \ 1 \, .$$

À propos de ce résultat qui est énoncé sans démonstration, Mordell indique à juste titre qu'il s'agit d'un cas particulier d'un théorème sur les formes linéaires dû à Minkowski[46]. Minkowski avait démontré son théorème pour un nombre quelconque n de formes linéaires, cette première étape de la preuve ne pose donc pas de difficulté pour la généralisation de sa méthode que Mordell envisage afin de démontrer la conjecture dans le cas du produit de n formes. C'est le deuxième lemme utilisé par Mordell dont la généralisation pose problème :

[44] MORDELL 1928a, p.20.
[45] MORDELL 1928a p.20.
[46] Voir par exemple MINKOWSKI 1896a chapitre 4.

« Si $0 < A \leq 1$ et $0 \leq |B| \leq \frac{1}{2}$, alors il existe un nombre N tel que

$$|AX^2 + BX| \ \leq \ \frac{1}{4}$$

pour $N \leq X \leq N + 1$ ».

Pour démontrer ce lemme Mordell se ramène par un changement de variables à l'étude de la fonction $f(x) = ax^2 - b$ où a et b dépendent de A et B. Ensuite en séparant les cas où $b \leq \frac{1}{4}$ et où $b > \frac{1}{4}$, puis en utilisant les conditions vérifiées par A et B, Mordell obtient par des inégalités successives que $|f(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour un intervalle de valeurs de x de longueur 1.
Le premier lemme permet à Mordell de justifier qu'il est possible de se ramener au cas où

$$|a_{11}\, a_{21}| \ \leq \ 1\,.$$

Il traite ensuite des cas particuliers où certains coefficients des formes sont nuls et dans le cas général il suppose $a_{11} \neq 0$ et $a_{21} \neq 0$. Le calcul du produit des deux formes donne

$$L_1 L_2 = a_{11} a_{21} \left[x_1 - \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,(x_2 - \xi_2) \right] \left[x_1 - \xi_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}\,(x_2 - \xi_2) \right] \,,$$

où le couple $(\xi_1 = a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \ , \, \xi_2 = a_{11}c_2 - a_{21}c_1)$ est la solution du système

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases} \,.$$

Mordell choisit pour x_2 un entier tel que $|x_2 - \xi_2| \leq \frac{1}{2}$ et pose $X = x_1 - \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,(x_2 - \xi_2)$, il obtient alors

$$L_1 L_2 = a_{11} a_{21} X^2 + (x_2 - \xi_2) X \,.$$

L'application du lemme 2 implique l'existence d'un intervalle I de longueur 1 tel que

$$\forall X \in I, \ \ |L_1\, L_2| \ \leq \ \frac{1}{4}\,.$$

Or dans X seul x_1 n'est pas fixé et comme la longueur de I est 1, x_1 peut être choisi entier.
Le point de vue adopté ici par Mordell n'a plus rien à voir avec celui de Minkowski. Rappelons que Minkowski faisait une construction géométrique afin de trouver une solution pour l'inégalité précédente[47]. Dans ses tentatives suivantes pour aborder ce problème Mordell va s'éloigner de cette première idée et il va se tourner vers des méthodes issues de la théorie analytique des nombres.

[47]Voir Minkowski 1901b.

4.1.2.1 L'utilisation de la formule sommatoire de Poisson 1928-1929

À la fin des années 1920, Mordell consacre plusieurs articles à des applications de la formule sommatoire de Poisson à des questions de théorie des nombres. Dans le premier article de cette série il écrit

> « It is a familiar fact that an important part is played in the Analytic Theory of Numbers by Fourier series. There are, for example, applications to Gauss' sums, to the zeta functions, to lattice point problems, and to formulae for the class number of quadratic fields[48]. »

Dans les travaux de Mordell qui vont nous intéresser ici les séries de Fourier interviennent à travers la formule sommatoire de Poisson. L'idée d'appliquer cette formule à des questions de théorie des nombres n'est pas nouvelle et remonte en fait à Dirichlet qui l'emploie afin d'étudier les sommes de Gauss[49]. Cette approche analytique des années 1928-1929 sont aussi à rapprocher de la démonstration déjà évoquée de Siegel de 1922 du théorème sur les formes linéaires qui utilisait des séries de Fourier.

Le premier article de Mordell qui concerne la formule sommatoire de Poisson commence par une démonstration de cette formule qu'il écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(f(n-0)+f(n+0)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2n\pi i x} f(x)\, dx\,.$$

Mordell en donne une preuve sous les conditions suivantes :

(1) Pour $N > 0$, $f(x)$ est absolument intégrable sur $[-N, N]$; pour $0 < \varepsilon < N$, $f(x)$ est à variations bornées sur $[\varepsilon, N]$ [50], pour $N > 0$ et $x \geq N$, $f(x)$ admet une dérivée seconde $f''(x)$.

(2) $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{|x|\to+\infty} f'(x) = 0$ et les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|\, dx$ sont convergentes.

[48] Mordell 1928c p.585.

[49] Pour des renseignements sur les sommes de Gauss ainsi que la première utilisation de la formule sommatoire de Poisson dans ce contexte par Dirichlet, voir Patterson 2007.

[50] Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{S}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour une subdivision $\sigma = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b) \in \mathcal{S}([a, b])$, on considère

$$V(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|\,.$$

La variation totale de f est alors

$$V(f) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} V(f, \sigma)\,.$$

f est dite à variations bornées si $V(f)$ est finie.

(3) La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f(n-0)+f(n+0))$ converge.

Avec cette formule, Mordell redémontre dans un premier temps des résultats connus. D'abord il revient sur l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta de Riemann qui est définie pour les nombres complexes s de partie réelle strictement plus grande que 1 par

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots .$$

L'équation fonctionnelle démontrée par Mordell s'écrit alors

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)\, 2^s\, \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s) ,$$

où la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt .$$

Mordell explique ensuite comment la même méthode permet d'obtenir aussi l'équation fonctionnelle pour la fonction zeta plus générale définie pour les nombres complexes de partie réelle strictement positive par

$$\zeta(s,\chi) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \cdots ,$$

où χ désigne un caractère primitif modulo un entier k.
L'intérêt que Mordell porte alors à ce type de méthode semble venir de la possibilité d'unifier avec un seul principe des résultats épars de la théorie des nombres :

> « These formulae give instantaneous and simple proofs of so many important and apparently disconnected results that it is rather surprising they have been overlooked in the treatises in the Analytical Theory of Numbers[51]. »

Nous voyons à nouveau apparaître le thème de l'unité déjà développé par Minkowski. Cependant l'unité ici ne passe pas par la géométrie mais par l'analyse, elle est obtenue à travers une formule. Avec ces premiers travaux sur la formule sommatoire de Poisson, nous sommes donc davantage dans une tradition hermitienne. Cependant, cette thématique de l'unité semble disparaître des préoccupations de Mordell par la suite.

Dans le deuxième article sur la formule sommatoire de Poisson[52], publié en 1929, Mordell démontre la formule sous des conditions qu'il pense mieux adaptées et plus simples à vérifier pour son utilisation dans les applications

[51] Mordell 1928c p.587.
[52] Mordell 1929a.

> « These conditions make no pretence to any great generality, but they are so simple and so easily applied that, as I am showing in a series of papers, Poisson's formula furnishes obvious demonstrations of many theorems, which can have only been overlooked owing to the lack of such a simple enunciation[53]. »

Ce n'est pas la formule dans sa plus grande généralité qui doit donc être recherchée pour réussir à unifier ou encore organiser la théorie. Ce qui doit être visé c'est la simplicité de manière à ce que les applications soient des conséquences presque immédiates. La simplicité de la formule est ce qui assure sa fécondité[54]. Nous retrouvons en partie ces idées dans la lecture de Davenport de l'utilisation de la formule de Poisson par Dirichlet

> « The method used by Dirichlet in 1835 to evaluate G is probably the most satisfactory of all that are known. It is based on Poisson's summation formula, and it has the advantage that once the proof has been embarked upon, no special ingenuity is called for[55]. »

Dans son article de 1929, Mordell démontre cette fois la formule de Poisson sous la forme[56]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2n\pi ix} f(x)\, dx$$

où la fonction f vérifie les conditions suivantes[57] :

(α) pour toutes valeurs réelles de x, $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues et tendent vers zéro quand $|x| \to \infty$;

(β) $f(x)$ et $f''(x)$ sont telles que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\, dx$ convergent, et f' est une intégrale de f''.

Puis il considère le cas où la sommation s'effectue entre deux bornes qui ne sont plus nécessairement infinies, la formule devenant alors

$$\sum_{n=a}^{b}{}'' f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{a}^{b} e^{2n\pi ix} f(x)\, dx\ ,$$

le symbole $\sum''$ indique que si a ou b est un entier le premier (respectivement le dernier terme) dans la somme est $\frac{1}{2}f(a)$ (respectivement $\frac{1}{2}f(b)$).

Comme nouvelle application, Mordell montre cette fois l'équation fonctionnelle vérifiée

[53] Mordell 1929a p.286.

[54] Là encore il s'agit de thématiques qui sont à l'oeuvre dans le travail d'Hermite. Voir à ce propos Goldstein 2008 où l'articulation entre simplicité/clarté/fécondité chez Hermite est discutée.

[55] Davenport 1967 p.14, cité aussi dans Patterson 2007 p.513.

[56] Mordell 1929a.

[57] Mordell 1929a p.285-286.

par la fonction

$$\phi(s) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \frac{1}{(a+2)^s} + \cdots ,$$

qui s'écrit

$$\phi(s) = 2\,\Gamma(1-s)\ (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi a + \frac{1}{2}\pi s)}{n^{1-s}} .$$

Le lien des deux articles précédents avec la géométrie des nombres n'est pas évident. Pourtant en 1964, quand Davenport évoque les travaux de Mordell[58], il les classe parmi les articles qui concernent la géométrie des nombres. Ce rapprochement entre géométrie des nombres et formule sommatoire de Poisson fait par Davenport peut s'expliquer par les applications possibles de cette formule aux questions concernant les points d'un réseau ; ce dernier problème est évidemment relié à la géométrie des nombres. D'ailleurs, Mordell souligne lui même les applications importantes des séries de Fourier aux points d'un réseau[59]. En quoi consiste ce problème ?
Il s'agit d'obtenir des relations dans lesquelles intervient le nombre de points d'un réseau dans un domaine fixé comme par exemple un disque ou un parallélogramme. Ce sujet de recherche semble avoir pris de l'importance en théorie analytique des nombres à partir du début des années 1920 comme en témoigne par exemple le fait que « Gitterpunktprobleme » apparaît dans l'intitulé d'un chapitre dans la classification du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* en 1921[60]. Cette section du *Jahrbuch* est par ailleurs indépendante de celle qui concerne la géométrie des nombres. Parmi les mathématiciens s'intéressant à cette question nous trouvons par exemple Edmund Landau ou bien Carl Siegel avec qui Mordell avait des contacts[61].
L'intérêt de Mordell dans cette période pour ce problème apparait aussi dans sa correspondance avec Davenport. Dans une lettre datée du 8 juillet 1929, Mordell donne des conseils de lectures à Davenport alors mathématicien débutant[62]

> « As you will soon be returning to Cambridge, there is my suggested readings for you.
> Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie
> Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale
> Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, vol.2-183 till end, Gitterpunkte[63]. »

[58]Davenport 1964.
[59]Mordell 1928c, p.585.
[60]Dans « Arithmetik und Algebra », il s'agit du chapitre 8 « Algebraische Zahlen, Asymptotische Abschätzung von Zahlentheoretischen Funktionen, Gitterpunkt-probleme ».
[61]Dans sa correspondance avec Davenport, Mordell mentionne des rencontres avec Landau (lettres à Davenport du 26 janvier 1932 et du 18 février 1932) et avec Siegel (lettre à Davenport du 3 mars 1932). Davenport (WL).
[62]Le premier article de Davenport fut publié en 1931.
[63]Lettre de Mordell à Davenport du 8 juillet 1929, Davenport (WL), G 208.

Cette courte bibliographie concerne donc exclusivement Landau (bien que Hecke soit aussi cité plus loin) et la question des points d'un réseau est mentionnée explicitement. Dans d'autres lettres, Mordell et Davenport ont des échanges autour de la formule de Poisson. Le 24 juillet 1929, Mordell fait allusion à une preuve plus courte de cette formule que lui a communiqué Davenport et il lui conseille de rédiger une note à ce sujet. Il indique aussi qu'un travail important pour lui serait de trouver les conditions générales les plus simples sous lesquelles la formule reste vraie. Notons à nouveau l'insistance de Mordell à propos de la simplicité.
Le 18 février 1930, il demande à Davenport la permission d'utiliser sa preuve simplifiée de la formule de Poisson de deux variables dans un de ses articles, permission qui a dû lui être accordée car le 26 mars Mordell envoie une copie de cet article à Davenport en précisant où cette démonstration est mentionnée[64].

Toujours dans cette lettre du 26 mars 1930, Mordell écrit

> « It seems worth while writing up the explicit formula for the number of lattice points in any domain D ».

Cette citation fait écho à deux articles de Mordell écrits en 1929 dans lesquelles il applique la formule sommatoire de Poisson de deux variables au problème des points d'un réseau dans certains domaines[65].
Dans le premier de ces deux articles Mordell commence par énoncer et démontrer la formule sommatoire de Poisson de deux variables qu'il écrit[66]

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m,n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2m\pi ix+2n\pi iy}\, f(x,y)\, dxdy\ , \tag{4.1}$$

où la fonction f vérifie les conditions suivantes :

(1) $\dfrac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}$, pour $a, b = 0, 1, 2$ (sauf $a = b = 2$), sont des fonctions continues de x, y pour toutes valeurs réelles de x et y ; et elles tendent toutes vers zéro quand une des variables tend vers $\pm\infty$.

(2) f et ses dérivées sont telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|f| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right|\right) dx\, dy$ converge.

Pour démontrer cette formule Mordell commence par justifier la convergence de la série

$$S = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{m,n}\ ,$$

[64] Il semble que Davenport n'ait pas publié ces preuves de la formule de Poisson. L'article de Mordell dont il est question dans ces lettres est MORDELL 1930c.
[65] MORDELL 1929b, 1930a.
[66] MORDELL 1929b, p.412.

où $I_{m,n}$ est défini par

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2m\pi ix+2n\pi iy} \, f(x,y) \, dxdy \, .$$

Pour cela, il montre, avec deux intégrations par parties successives par rapport à l'une ou l'autre des variables ou bien les deux variables et avec les conditions (1), (2), que

$$\begin{aligned}
I_{m,0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2m\pi ix}}{(2mi\pi)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \, dxdy \, , \qquad m \neq 0 \, , \\
I_{0,n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi iy}}{(2ni\pi)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \, dxdy \, , \qquad n \neq 0 \, , \\
I_{m,n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2m\pi ix+2n\pi iy}}{(2mi\pi)^2 \, (2ni\pi)^2} \, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \, dxdy \, , \qquad m \neq 0, \; n \neq 0 \, .
\end{aligned}$$

Ces relations permettent de justifier la convergence absolue de S, ainsi que l'inversion des sommes et des intégrales dans S. Pour démontrer ensuite que

$$S = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m,n) \; ,$$

Mordell remarque que la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \, \frac{e^{2n\pi ix}}{(2ni\pi)^2}$$

est le développement de la fonction P définie, pour $0 \leq x < 1$, par

$$P(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

et pour tout x réel,

$$P(x+1) = P(x) \, .$$

Cela lui permet d'exprimer S sous la forme d'une somme de quatre intégrales

$$\begin{aligned}
S = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, dxdy \; &+ \; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \, dxdy \\
&+ \; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y) \, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \, dxdy \; + \; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)P(y) \, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \, dxdy \, ,
\end{aligned}$$

qui, une fois calculée, donne la formule sommatoire de Poisson de deux variables (4.1).

Cette formule est ensuite utilisée pour étudier les points d'un réseau dans un cercle de rayon $\omega^{\frac{1}{2}}$ et centré en l'origine. Mordell applique la formule (4.1) à la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\omega - x^2 - y^2)^\lambda && \text{si } x^2+y^2 \le \omega\,, \\ f(x,y) &= 0 && \text{si } x^2+y^2 > \omega\,, \end{aligned}$$

où $\omega > 0$ et $\lambda > 3$ pour que f vérifie les hypothèses sous lesquelles la formule (4.1) a été démontrée. Mordell obtient alors une nouvelle relation qui, comme il le justifie grâce à une dérivation, est encore vraie pour $\lambda \geq 1$. En prenant alors $\lambda = 1$, il trouve finalement que[67] :

$$\sum(\omega - x^2 - y^2) = \frac{\pi}{2}\,\omega^2 + \frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{R(n)}{n}\,J_2(2\pi\omega^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}})$$

où la sommation du membre de gauche porte sur les entiers x et y tels que $x^2+y^2 \leq \omega$. $R(n)$ est le nombre de couples d'entiers solutions de $x^2+y^2=n$ et J_2 la fonction de Bessel qui est définie pour un nombre complexe x par

$$J_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+3)}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

La deuxième application qui est donnée de la formule de Poisson nous intéresse davantage car elle est directement liée à la géométrie des nombres et au problème des formes linéaires. Soient $a, b, c, a', b', c', \omega, \omega'$ des nombres réels avec ω et ω' supposés positifs. Mordell note $\Delta = ab' - a'b$ qui est supposé strictement positif, $\Delta\mu = b'm - a'n$ et $\Delta\mu' = -bm + an$, il obtient alors la relation[68]

$$\begin{aligned} &\sum(\omega - |am+bn+c|)(\omega' - |a'm+b'n+c'|) \\ &\qquad = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\mu ic - 2\pi\mu' ic'}\,\frac{\sin^2(\pi\mu\omega)\sin^2(\pi\mu'\omega')}{\pi^2\mu^2.\pi^2\mu'^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

où la sommation du membre de gauche porte sur les entiers m et n tels que

$$|am+bn+c| \leq \omega \qquad \text{et} \qquad |a'm+b'n+c'| \leq \omega'\,,$$

avec la convention que si aucun couple d'entiers ne vérifie ces inégalités la somme est nulle. Ce dernier résultat est à nouveau une conséquence de la formule sommatoire de

[67] Mordell 1929b, p.415.
[68] Mordell 1929b, p.417.

Poisson mais appliquée cette fois à la fonction donnée par

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (\omega - |ax+by+c|)^p\,(\omega' - |a'x+b'y+c'|)^q \\
&\qquad\qquad\qquad \text{si } |ax+by+c| \le \omega \ \text{ et } \ |a'x+b'y+c'| \le \omega'\,, \\
f(x,y) &= 0 \quad \text{sinon}\,.
\end{aligned}
$$

Les entiers p et q sont dans un premier temps supposés strictement supérieurs à 3 afin de pouvoir appliquer (4.1), puis comme pour l'appliquation précédente au disque, Mordell justifie la validité de la relation obtenue pour p et q plus grands que 1 en dérivant. En prenant alors $p = q = 1$, il en déduit le résultat cherché.

Voyons maintenant quel est le lien avec la géométrie des nombres et le travail de Minkowski. Comme les inégalités $|ax+by+c| \le \omega$ et $|a'x+b'y+c'| \le \omega'$ définissent un parallélogramme, compter les points à coordonnées entières dans un parallélogramme revient à s'intéresser au problème de la majoration des formes linéaires et à la conjecture de Minkowski. D'ailleurs comme le rappelle Mordell, c'est l'idée qu'avait déjà utilisée Siegel pour traiter le cas homogène. En effet dans son article de 1922, Siegel avait démontré le développement précédent dans le cas où c et c' sont nuls, c'est-à-dire[69]

$$\sum(\omega - |am+bn|)(\omega' - |a'm+b'n|) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi\mu\omega)\sin^2(\pi\mu'\omega')}{\pi^2\mu^2.\pi^2\mu'^2}\,. \qquad (4.3)$$

La preuve de Siegel de ce développement utilise les séries de Fourier ainsi que de l'intégration complexe. Avec ce résultat il retrouve un théorème de Minkowski sur les formes linéaires homogènes. Ce théorème[70] donne l'existence d'entiers m et n, non tous deux nuls, tels que

$$|am+bn| \le \omega \quad \text{et} \quad |a'm+b'n| \le \omega'$$

pour ω et ω' qui vérifient $\omega\omega' > \Delta$.

Comme le rappelle Mordell, la démonstration du théorème sur les formes linéaires à partir du développement en séries de Siegel s'effectue en raisonnant par l'absurde. Si en effet aucun couple d'entiers (m,n) autre que $(0,0)$ ne vérifie les inégalités précédentes,

[69] Voir Siegel 1922. Nous donnons ici le développement pour deux formes linéaires mais Siegel traite en fait le cas général pour n formes.

[70] Bien qu'il s'agisse d'une conséquence immédiate du théorème de Minkowski sur les corps convexes et que parfois la méthode employée l'amène à ce résultat au cours d'une preuve (par exemple voir Minkowski 1896b), nous ne connaissons pas d'énoncé explicite de ce théorème dans le travail publié de Minkowski. L'énoncé donné par Minkowski qui s'en approche le plus est le cas particulier où $\omega = \omega' = \sqrt[n]{\Delta}$, voir Minkowski 1896a chapitre 4.

la relation (4.3) devient

$$\Delta\omega\omega' = \omega^2\omega'^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi\mu\omega)}{\pi^2\mu^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\mu'\omega')}{\pi^2\mu'^2} \ ,$$

ce qui implique $\Delta\omega\omega' \geq \omega^2\omega'^2$, ou encore $\Delta \geq \omega\omega'$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur ω et ω'. Mordell annonce aussi un résultat dont la démontration est publiée en 1930 et qu'il semble voir comme la généralisation au cas des formes non homogènes de la méthode de Siegel.

Dans ce nouvel article[71], Mordell commence par redonner les énoncés des théorèmes de Minkowki sur les formes linéaires homogènes et non homogènes dans le cas de deux variables. Nous venons de rappeler le cas homogène ; dans le cas non homogène il s'agit de montrer l'existence de deux entiers x et y tels que

$$|ax + by + c|\,|a'x + b'y + c'| \leq \frac{1}{4}|\Delta| \ .$$

Mordell revient sur les développements en séries qu'il a obtenu avec la formule sommatoire de Poisson, en particulier il compare sa méthode pour démontrer (4.2) avec celle de Siegel pour (4.3) qui pour lui « does not reveal the real origin of (4.2)[72] ». Ce commentaire confirme le rôle central que Mordell entend faire jouer à la formule sommatoire de Poisson qu'il présente ici comme plus fondamentale que les outils employés par Siegel. Le résultat central de ce nouvel article de Mordell est la formule[73]

$$L = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\mu i c - 2\pi\mu' i c'} \ \frac{\sin(2\pi\mu\omega)}{\pi\mu} \, \frac{\sin(2\pi\mu'\omega')}{\pi\mu'} \ . \tag{4.4}$$

L est le nombre de points à coordonnées entières dans le parallélogramme défini par les inégalités

$$|am + bn + c| \leq \omega \ , \qquad |a'm + b'n + c'| \leq \omega' \ ;$$

et où les points sur les côtés du parallélogramme comptent pour $\frac{1}{2}$ et les sommets pour $\frac{1}{2}$ ou 0. Comme le développement dans le cas où $c = c' = 0$ implique le théorème sur les formes linéaires dans le cas homogène, Mordell pense que la nouvelle relation qu'il a trouvée doit pouvoir lui permettre de montrer le théorème dans le cas non homogène. Nous avons vu que Mordell a déjà proposé une autre démonstration de ce théorème de Minkowski pour le produit de deux formes. Ainsi bien qu'il ne s'exprime pas explicitement là-dessus, nous pouvons penser que l'intérêt de Mordell pour cette

[71] Mordell 1930a.
[72] Mordell 1930a, p.39.
[73] Mordell 1930a, p.39.

nouvelle approche du problème vient du fait qu'il imagine que cette méthode doit être généralisable afin de démontrer la conjecture pour le produit de n formes non homogènes. Ce point de vue est certainement motivé par la formule de Poisson qui est à la base de la méthode et qui est valable quelque soit le nombre de variables. Cette approche n'a cependant pas été aussi fructueuse que prévue et Mordell n'a même pas réussi à retrouver le résultat pour le produit de deux formes

> « It is possible that the formulae (2), (3) may be useful in proving Minkowski's second theorem and its generalisation, but this I cannot do[74]. »

Mordell n'est pas revenu dans la suite de ces travaux sur cette méthode utilisant la formule sommatoire de Poisson pour démontrer la conjecture sur le produit de n formes linéaires linéaires.

4.1.2.2 Retour à des méthodes arithmétiques 1930-1937

Après l'échec de ces tentatives pour démontrer la conjecture de Minkowski par des voies analytiques, Mordell se tourne vers des méthodes arithmétiques.
D'abord dans un court article de trois pages publié en 1930, il revient sur le cas de deux formes linéaires non homogènes. Il obtient un résultat qu'il juge intéressant car il permet de contrôler la taille de chaque terme du produit[75]. Soient A, B, C, D, P, Q des nombres réels, il suppose que $\Delta = AD - BC$ est non nul et que ΔBC est positif, alors il existe des entiers x et y tels que

$$|Ax + By + P| \leq \frac{1}{2}|A| \qquad \text{et} \qquad |Cx + Dy + Q| \leq \frac{1}{2}|D|\,. \tag{4.5}$$

L'argument principal de la preuve consiste à considérer la fonction

$$\phi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy + 2gx\ ,$$

où les coefficients sont des réels avec a strictement positif et $ab > h^2$. Mordell justifie ensuite l'existence d'un minimum pour ϕ pour des valeurs entières des variables x, y et note (ξ, η) le couple pour lequel ce minimum est atteint. Cela implique en particulier

$$\phi(\xi \pm 1, \eta) \geq \phi(\xi, \eta)$$

ou encore après simplification

$$\pm 2(a\xi + h\eta) \pm 2g + a \geq 0\,.$$

[74] Mordell 1930a, p.39. Les relations (2) et (3) dont Mordell parle ici sont (4.2) et (4.4).
[75] Mordell 1930b.

Finalement, après avoir fait la même chose avec $\phi(\xi, \eta \pm 1)$, il vient

$$|a\xi + h\eta + g| \le \frac{1}{2}a \qquad \text{et} \qquad |h\xi + b\eta + f| \le \frac{1}{2}b\,.$$

Les inégalités (4.5) s'en déduisent en choisissant les coefficients a, b, h, f, g convenablement en fonction de A, B, C, D, P, Q.
Cet article de Mordell est isolé par rapport à ses autres travaux, d'une part par le résultat qui y est énoncé et d'autre part par la méthode employée qui ne paraît pas liée aux autres tentatives de Mordell pour aborder ce sujet des formes linéaires non homogènes. Cependant, il témoigne des recherches importantes sur ce thème faites par Mordell qui essaie de diversifier les points de vue.

En 1933, Mordell revient sur le cas de n formes linéaires homogènes[76]. Il commence par rappeler le théorème : soient n formes linéaires à coefficients réels

$$L_r(x) = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s \qquad\qquad (r = 1, \ldots, n),$$

dont la valeur absolue du déterminant D est strictement positive et n réels positifs λ_r qui vérifient

$$\prod_{r=1}^{n} \lambda_r \ge D\,.$$

Il existe alors des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls tels que

$$|L_r(x)| \le \lambda_r \qquad\qquad (r = 1, \ldots, n).$$

Mordell souligne l'existence de preuves analytiques et arithmétiques de ce résultats. Les preuves arithmétiques dues à David Hilbert et Adolf Hurwitz consistent à démontrer d'abord le résultat pour des formes à coefficients entiers, puis rationnels et enfin par un procédé d'approximation pour les formes réels[77]. L'objectif de Mordell est ici de proposer une nouvelle démonstration dans le cas où les coefficients des formes sont des entiers. Sa méthode, qu'il juge plus simple, repose sur une idée arithmétique qu'il attribue à Henry John Stephen Smith et qu'il énonce dans un lemme : si les a_{rs} sont des entiers alors le n-uplet $(L_1(x), ..., L_n(x))$ prend exactement D^{n-1} valeurs distinctes

[76] Mordell 1933.
[77] Voir Hurwitz 1897. D'après Hurwitz, Hilbert est le premier à avoir donné sa preuve qu'il a communiquée à Minkowski. Ce dernier avait prévu de la publier dans le deuxième fascicule de *Geometrie der Zahlen* qui n'a finalement jamais été achevé. Le principe d'approximation des formes à coefficients réels par des formes à coefficients rationnels serait donc dû à Hilbert, c'est ce qui est indiqué par Georges Humbert dans la note III de la traduction française du *Zahlbericht* de Hilbert, voir Hilbert 1991.

modulo D quand les x_s sont des entiers[78].
Mordell commence donc par démontrer ce lemme. Pour cela il justifie que par une substitution linéaire de déterminant 1 sur les variables des L_r, il est possible de se ramener à des formes[79]

$$b_{11}x_1 \ , \ \ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \ , \ \ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \ , \ \ldots$$

avec $D = b_{11}b_{22}\ldots b_{nn}$. La forme $b_{11}x_1$ prend des valeurs distinctes modulo D quand x_1 parcourt les entiers compris entre 0 et $\frac{D}{b_{11}} - 1$. Ensuite x_1 étant fixé dans l'ensemble précédent, les valeurs de la forme $b_{21}x_1 + b_{22}x_2$ sont obtenues en faisant parcourir à x_2 les entiers $0, 1, \ldots, \frac{D}{b_{22}} - 1$. En faisant la même chose avec chaque forme, Mordell montre qu'il y a

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{D}{b_{rr}} = D^{n-1}$$

valeurs possibles modulo D pour le $n-$uplet $(L_r)_{1\leq r\leq n}$. Il justifie que ces valeurs sont en fait bien toutes distinctes.
A priori, chaque forme L_r peut prendre D valeurs modulo D, ainsi le système de formes $(L_r)_{1\leq r\leq n}$ D^n valeurs modulo D. Comme nous venons de voir qu'il en prend en fait D^{n-1}, Mordell en déduit qu'il y a $D^n - D^{n-1} = D^{n-1}(D-1)$ $n-$uplets $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que le système de congruences

$$L_r(x_1, \ldots, x_n) = i_r \pmod D \qquad\qquad (r = 1, \ldots, n)$$

n'a pas de solution. Si $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(p'_1, \ldots, p'_n)$ sont tels que les systèmes

$$L_r(x_1, \ldots, x_n) = p_r \pmod D \quad \text{et} \quad L_r(x_1, \ldots, x_n) = p'_r \pmod D \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

ont des solutions, Mordell remarque que

$$L_r(x_1, \ldots, x_n) = p_r - p'_r \pmod D \qquad\qquad (r = 1, \ldots, n)$$

a des solutions, alors que le système

$$L_r(x_1, \ldots, x_n) = i_r + p_r \pmod D \qquad\qquad (r = 1, \ldots, n)$$

n'en a pas. Ces préliminaires terminés, Mordell passe à la preuve du théorème.
Quitte à considérer les formes $2L_r$ de déterminant $\pm 2^n D$ et $2\lambda_r$ à la place de λ_r, Mordell

[78] Voir Smith 1861, p.325. Smith considère la question du point de vue de la résolution de systèmes linéaires de congruences.
[79] Mordell 1933, p.180-181.

suppose que les λ_r sont pairs. Il suppose aussi que les inégalités

$$-\frac{1}{2}\,\lambda_r \;\leq\; L_r(x_1,\ldots,x_n) \;\leq\; \frac{1}{2}\,\lambda_r \qquad\qquad (r=1,\ldots,n)$$

n'ont pas de solution autre que $(0,\ldots,0)$ sinon le résultat est démontré. Ainsi les $n-$uplets d'entiers $(i_1,\ldots,i_n)\neq(0,\ldots,0)$ avec $-\frac{1}{2}\,\lambda_r \leq i_r \leq \frac{1}{2}\,\lambda_r$ pour tout r sont tels que le système

$$L_r(x_1,\ldots,x_n) = i_r \pmod D \qquad\qquad (r=1,\ldots,n)$$

n'a pas de solution ; de plus il y a $\left[\prod_{r=1}^{n}(1+\lambda_r)-1\right]$ $n-$uplets $(i_1,\ldots,i_n)$ avec cette propriété. Soit maintenant $(p_1,\ldots,p_n)$ une des D^{n-1} valeurs prises par $(L_r)_{1\leq r\leq n}$ modulo D, d'après une remarque précédente le système

$$L_r(x_1,\ldots,x_n) = i_r+p_r \pmod D \qquad\qquad (r=1,\ldots,n)$$

n'a pas de solution. Or il est possible de construire $D^{n-1}\left[\prod_{r=1}^{n}(1+\lambda_r)-1\right]$ $n-$uplets $(i_1+p_1,\ldots,i_n+p_n)$ tel que le système précédent n'ait pas de solution, mais

$$\begin{aligned} D^{n-1}\left[\prod_{r=1}^{n}(1+\lambda_r)-1\right] \;&>\; D^{n-1}\left[\left(\prod_{r=1}^{n}\lambda_r\right)-1\right] \\ &>\; D^{n-1}(D-1)\,, \end{aligned}$$

car $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \geq D$. Comme il n'y a que $D^{n-1}(D-1)$ $n-$uplets tels que le système de congruences précédent n'ait pas de solution, il existe $(i_1+p_1,\ldots,i_n+p_n)$ et $(i'_1+p'_1,\ldots,i'_n+p'_n)$ qui vérifient

$$\begin{aligned} \forall r\in\{1,2,\ldots,n\}\,,\;\; i_r+p_r \;&=\; i'_r+p'_r \pmod D \\ \text{d'où}\;\; \forall r\in\{1,2,\ldots,n\}\,,\;\; i_r-i'_r \;&=\; p'_r-p_r \pmod D\,. \end{aligned}$$

Comme le système de congruences

$$L_r(x_1,\ldots,x_n) = p'_r-p_r \pmod D \qquad\qquad (r=1,\ldots,n)$$

admet des solutions, il existe $(x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0)$ des entiers tels que

$$\forall r\in\{1,2,\ldots,n\}\,,\;\; L_r(x_1,\ldots,x_n) = i_r-i'_r \pmod D\,,$$

avec $-\lambda_r \leq i_r-i'_r \leq \lambda_r$ pour tout r, ce qui montre le théorème.

Mordell qualifie sa preuve d'arithmétique et il travaille ici avec des formes à coefficients entiers, utilise des congruences et fait jouer un rôle central à ce qu'il appelle le lemme de Smith. Ce lemme est l'élément unifiant certains de ses travaux sur la géométrie des nombres qui seront décrits comme arithmétiques par Mordell.

Nous ne suivons pas ici tout à fait la chronologie des travaux de Mordell et regroupons les articles qui concernent exclusivement les formes linéaires. Seul un article ne traite pas uniquement de ce sujet avant 1937, nous le détaillerons dans un paragraphe à part.
Dans son article suivant sur les formes linéaires[80], publié en 1936, Mordell énonce un résultat un peu plus général que le précédent. À nouveau, il note

$$L_r(x) = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s$$

des formes linéaires homogènes à coefficients réels et de déterminant $\Delta > 0$. Il considère en plus $\mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n$ des réels positifs tels que

$$\mu_1 ... \mu_n + \nu_1 ... \nu_n \geq \Delta$$

et $c_1, \ldots, c_n$ des réels quelconques. Mordell démontre qu'il existe des entiers $x_1, ..., x_n$ qui vérifient au moins un des systèmes d'inégalités suivants :

$$|L_r(x)| \leq \mu_r\ , \qquad |L_r(x)| \leq \nu_r\ , \qquad |L_r(x) + c_r| \leq \frac{1}{2}(\mu_r + \nu_r)\ .$$

La solution où tous les x_i sont nuls est exclue pour les deux premières inégalités.
La démarche suivie par Mordell est la même que précédemment : le lemme de Smith occupe une place centrale, il démontre d'abord le cas où les coefficients des formes, les μ_r, les ν_r et les c_r sont entiers, il se contente enfin de rapides explications pour passer au cas rationnel puis réel. L'importance du lemme de Smith conduit Mordell à qualifier à nouveau sa méthode d'« arithmétique ». De plus, le peu d'insistance sur le passage aux coefficients rationnels et réels suggère que Mordell voit le cas entier comme plus fondamental et que c'est celui qui contient véritablement la difficulté.

Dans une courte note publiée dans le *Journal of the London Mathematical Society*[81] rédigée en 1936, Mordell propose un problème qu'il présente comme une sorte de réciproque au théorème de Minkowski sur les formes linéaires homogènes. En notant L_r n formes linéaires homogènes, à coefficients réels et de déterminant 1, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, k_n$

[80] Mordell 1937a.
[81] Mordell 1937c.

des réels positifs tels que

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = k_n ,$$

il rappelle que, si $k_n = 1$, ce résultat de Minkowski montre l'existence d'entiers $x_1, \ldots, x_n$, non tous nuls, qui vérifient

$$|L_r(x_1, \ldots, x_n)| \leq \lambda_r \qquad (r = 1, \ldots, n) .$$

De plus, le choix de $k_n = 1$ est optimal dans le sens où si $k_n < 1$, le théorème devient faux. La question qui intéresse Mordell est alors de savoir si, étant donnée les formes L_r, il existe k_n, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = k_n$ et tels que l'origine O soit le seul point du réseau (c'est-à-dire ici à coordonnées entières) qui satisfait

$$|L_r(x_1, \ldots, x_n)| \leq \lambda_r \qquad (r = 1, \ldots, n) .$$

Le théorème de Minkowski implique que si k_n existe alors $k_n < 1$. Là encore, l'intérêt de Mordell pour cette question est motivé par la conjecture sur le produit des formes linéaires non homogènes. En effet, comme il le montre, une réponse positive au problème qui précède permettrait d'avancer dans la démonstration de cette conjecture. Rappelons que si $c_1, \ldots, c_n$ sont des réels donnés, il s'agit de montrer l'existence d'une constante K_n, indépendante des coefficients des formes, telle que des entiers $x_1, \ldots, x_n$ vérifient

$$\prod_{r=1}^{n} |L_r(x_1, \ldots, x_n) + c_r| \leq K_n .$$

La conjecture propose aussi $K_n = 2^{-n}$, ce qui a été démontré par Minkowski pour $n = 2$ et Remak quand $n = 3$. Mordell indique que pour $n \geq 4$, l'existence d'une telle constante n'a pas été établie.
Supposons que $k_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soient tels que $\lambda_1 \ldots \lambda_n = k_n$ et que O est le seul point du réseau qui vérifie

$$|L_r(x_1, \ldots, x_n)| \leq \lambda_r \qquad (r = 1, \ldots, n) ,$$

soit aussi l_n la partie entière de $\dfrac{1}{k_n}$. Pour justifier l'existence de la constante K_n, Mordell applique le théorème de Minkowski sur les formes homogènes et obtient des entiers $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, non tous nuls, tels que

$$\forall r \in \{1, \ldots, n\} , \left| L_r(x_1, \ldots, x_n) + \frac{c_r}{l_n!}\, x_{n+1} \right| \leq \lambda_r \quad \text{et} \quad |x_{n+1}| \leq \frac{1}{k_n} .$$

L'entier x_{n+1} est nécessairement non nul, sinon, par le choix de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et k_n, tous les x_r sont nuls ce qui est exclu. Mordell pose donc $y_r = \dfrac{x_r\, l_n!}{x_{n+1}}$, chaque y_r est un entier à cause du choix de l_n et de l'inégalité $|x_{n+1}| \leq l_n$. De plus, d'après les inégalités précédentes, les entiers $y_1, \ldots, y_n$ vérifient

$$\prod_{r=1}^{n} |L_r(y_1, \ldots, y_n) + c_r| \ \leq\ k_n \left(\frac{l_n!}{x_{n+1}}\right)^n ,$$

ce qui montre $K_n \leq k_n(l_n!)^n$.
Mordell propose ensuite une preuve pour le problème énoncé en début d'article dans le cas où $n = 2$. Pour cela, la question est interprétée géométriquement car

« The proof for $n = 2$ is simplest when put in a geometrical form[82]. »

Nous retrouvons ainsi l'importance de la recherche de la simplicité pour Mordell. P désigne le parallélogramme défini par les inégalités

$$|L_1| \ \leq\ \lambda_1 \quad \text{et} \quad |L_2| \ \leq\ \lambda_2 \ .$$

λ_1 et λ_2 sont d'abord choisis de telle sorte que P ne contient aucun point du réseau autre que O. Ils sont ensuite augmentés jusqu'à ce que P possède un point du réseau sur deux côtés adjacents et aucun autre à l'intérieur excepté O. Notons A et B ces deux points, leurs symétriques par rapport à O, A' et B', sont aussi des points du réseau sur des côtés de P. Comme O, A et B ont des coordonnées entières, l'aire du triangle OAB est supérieure à $\frac{1}{2}$. En considérant de même les autres triangles $OA'B$, $OA'B'$ et $OB'A$ qui sont tous inclus dans P, Mordell montre que l'aire de P est supérieure à quatre fois celle de OAB. L'aire de P est $4\lambda_1\lambda_2$ donc

$$\lambda_1\lambda_2 \ \geq\ \frac{1}{2} \ .$$

Cela permet à Mordell de conclure que $k_2 = \frac{1}{2}$ convient.
Au cours de son article Mordell mentionne d'autres résultats récents sur ce thème ce qui témoigne de l'intérêt d'autres mathématiciens pour ces questions. Il cite par exemple, Szekeres qui a montré que la meilleure valeur possible de k_2 est $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et que $k_3 = \frac{1}{6}$ convient. Erdös et Grünwald ont amélioré ce dernier résultat avec $k_3 = \frac{1}{4}$, ce qui a été redémontré de façon arithmétique par Ko[83].

Pendant cette période allant jusqu'en 1937, Mordell publie un dernier article en liaison avec les formes linéaires[84]. Nous ne le détaillons pas car il concerne des formes linéaires dont les coefficients appartiennent à un corps de nombres algébriques quel-

[82] Mordell 1937c p.35.
[83] Mordell 1937c, p.34-35.
[84] Mordell 1937b.

conque, sujet sur lequel Mordell revient peu par la suite. Notons simplement que Mordell est dans la continuité du travail de Minkowski dont il applique certains théorèmes sur ce thème. Il mentionne aussi les recherches récentes de Hofreiter sur le cas des corps imaginaires, Hofreiter étant un des mathématiciens repéré par l'étude faite dans le *Jahrbuch*.

4.1.2.3 Le congrès d'Oslo : un premier bilan du travail sur les formes linéaires

Pour faire un bilan du travail de Mordell sur les formes linéaires pendant les années 1927-1936, nous pouvons suivre la présentation qu'il fait en 1936 lors du Congrès international des mathématiciens à Oslo[85]. Le choix dans cette intervention, intitulée « Minkowski's Theorems and Hypotheses on Linear Forms », de présenter l'état des recherches sur cette question n'est pas anodin et montre l'importance que ce problème avait pris dans ses propres travaux.
Mordell commence par poser le problème de façon générale puis il énonce le théorème démontré par Minkowski pour n formes linéaires homogènes. Il rappelle que différentes preuves ont ensuite été données. Des preuves arithmétiques par Adolf Hurwitz[86] et David Hilbert ; une preuve de Hans Frederik Blichfeldt[87] en 1914 qui a introduit une « rather different geometric idea [...] which was presented arithmetically in a more simple way by Remak[88] in 1927[89] ». Mordell souligne ensuite plus particulièrement la preuve donnée en 1922 par Carl Ludwig Siegel qui démontra que le théorème de Minkowski peut être retrouvé à partir d'un développement en série obtenu par intégration complexe. Mordell revient alors sur ses propres travaux sur la formule sommatoire de Poisson avec laquelle il a redémontré le développement qu'avait obtenu Siegel. Il propose une nouvelle démonstration de la formule de Siegel qui s'appuie sur le lemme de Smith vu dans les articles précédents. Comme à chaque fois que ce lemme intervient, Mordell considère sa preuve comme étant de nature arithmétique. L'utilisation du résultat de Smith lui permet de rappeler les théorèmes qu'il a déjà démontrés grâce à cette méthode. Après avoir commenté un certain nombre de questions liées aux formes linéaires, Mordell termine l'exposé avec le cas non homogène. Il reprend alors essentiellement les développements déjà expliqués dans Mordell 1937c.

Il est intéressant de voir le type de méthodes que Mordell choisit de mettre en avant

[85] Mordell 1936.
[86] Hurwitz 1897.
[87] Blichfeldt 1914.
[88] Remak 1927.
[89] Mordell 1936 p.226-227.

dans cette intervention alors qu'il dresse un panorama général du sujet. Pour classer ces différentes méthodes, Mordell sépare celles qu'il juge géométriques, de celles qui sont analytiques ou encore arithmétiques. Il voit ses travaux sur la formule sommatoire de Poisson et ceux dans la tradition de Siegel comme analytiques. Les méthodes jugées arithmétiques sont celles utilisant le lemme de Smith ou traitant d'abord le cas des formes à coefficients entiers pour en déduire les cas rationnels puis réels. Il inclut dans les méthodes géométriques le travail de Minkowski et nous avons dans MORDELL 1937c un exemple où la démonstration est géométrique lorsqu'il reformule le problème sur deux formes linéaires en termes de la recherche de points d'un réseau dans un parallélogramme[90]. Cette manière de qualifier les différentes approches utilisées pour aborder la question des formes linéaires permet de saisir avec davantage de précision les méthodes privilégiées par Mordell pendant cette période.
Le premier constat est que, bien que ce type d'approches soit mentionné chez d'autres mathématiciens dont bien sûr Minkowski, la géométrie est absente de ces premiers travaux de Mordell sur la géométrie des nombres. Ce moindre intérêt pour la géométrie au profit de l'analyse et de l'arithmétique ressort par exemple des choix des thèmes exposés à ce congrès d'Oslo, choix précisés dès le début par Mordell :

> « More emphasis, however, will be laid on arithmetic ideas and methods than on geometric ones[91]. »

Comme nous l'avons déjà remarqué une place importante est attribuée aux méthodes analytiques qui ont été le point de vue privilégié par Mordell à la fin des années 1920. Mais la façon dont il rend compte de cet aspect de ses travaux intègre le fait que son intérêt s'est déplacé vers des méthodes arithmétiques. Virage dont nous pouvons peut être voir la justification *a posteriori* dans la recherche de ce qu'il nomme l'idée arithmétique derrière la méthode analytique, recherche qu'il juge d'un grand intérêt :

> « The ideas involved in Siegel's proof and my variation are analytic. It is often of considerable interest to investigate the arithmetic ideas underlying analytic proofs of results in number theory and so to deduce arithmetical demonstrations[92]. »

Cette recherche de l'arithmétique derrière l'analyse ne semblait pas l'intéresser alors qu'il étudiait les applications possibles de la formule sommatoire de Poisson à la théorie des nombres. Mais l'échec de cette approche pour réussir à obtenir des résultats sur les formes linéaires non homogènes l'a amené à changer de stratégie et à revenir à des méthodes arithmétiques. C'est en suivant cette voie que Mordell a trouvé sa nouvelle

[90]Nous reprenons ici la description qui est faite par Mordell pour repérer géométrie, arithmétique, algèbre. Voir HERREMAN 2000 où une approche sémiotique est utilisée pour distinguer les éléments arithmétique, géométrique et analytique dans des textes mathématiques.
[91]MORDELL 1936 p.226.
[92]MORDELL 1936 p.228.

preuve arithmétique du développement en séries de Siegel dans laquelle le résultat de Smith que nous avons déjà énoncé occupe une place importante. L'importance de cette recherche de l'idée arithmétique revient lorsqu'il commente sa preuve du théorème de Minkowski sur les formes homogènes qui est basée sur le lemme de Smith[93] :

> « It also had the great advantage of easy generalization, [...] and practically laid bare the arithmetic ideas really underlying some of Minkowski's work of the Geometry of Numbers[94]. »

Toujours selon Mordell, cette idée arithmétique lui permit de donner une autre preuve du théorème sur les formes linéaires homogènes qu'il explique rapidement. Cette démonstration est en fait la réécriture dans le cas particulier d'un parallélépipède de dimension n de la démonstration de Mordell du théorème de Minkowski sur les parties convexes symétriques par rapport à un point[95].

Certains commentaires sur des démonstrations de résultats en liaison avec les formes linéaires semblent indiquer que l'objectif de Mordell est d'en faire disparaître la géométrie. Par exemple, au sujet d'une preuve de Jansen[96] de 1909 il écrit

> « The demonstration is arithmetic but is not altogether free from geometric presentation[97]. »

Il semble regretter que l'arithmétique ne soit pas complètement débarrassée de toute considération géométrique comme si l'objectif était d'arriver aux méthodes arithmétiques les plus pures possibles. Cette impression revient au sujet du travail de Beppo Levi[98] sur les formes linéaires

> « Levi also gave for $n = 2, 3, 4$ arithmetic proofs not free from geometric presentation[99]. »

Une première explication pour cette volonté de limiter l'intervention de la géométrie est que Mordell semble considérer que la géométrie n'est pas toujours bien adaptée pour travailler dans n'importe quelle dimension. À propos d'une méthode employée par Minkowski, il note par exemple

> « This is simple enough in two dimensions but geometric arguments in n dimensions are sometimes not easily apprehended[100]. »

Non seulement cette dernière citation montre le désir de Mordell d'utiliser le moins possible la géométrie, mais la raison invoquée, c'est-à-dire la difficulté à appréhender

[93] Voir MORDELL 1933.
[94] MORDELL 1936 p.230.
[95] Nous reviendrons en détails sur cette démonstration dans le paragraphe suivant.
[96] Il s'agit de la thèse de Hans Jansen sur la géométrie des nombres qui a été repérée dans le *Jahrbuch*.
[97] MORDELL 1936 p.231.
[98] LEVI 1911.
[99] MORDELL 1936 p.231.
[100] MORDELL 1936 p.231-232.

les raisonnements géométriques en grandes dimensions, nous informe sur la façon dont il voit cette intervention de la géométrie. Cela suggère en effet qu'il n'envisage pas une utilisation de la géométrie qui serait un simple jeu formel sur des concepts géométriques, mais que comme pour Minkowski, la géométrie possède une dimension intuitive qui doit être mise à profit. De plus, cette intuition est favorisée dans les petites dimensions.
La suite va montrer que le point de vue de Mordell sur cette question de l'efficacité de la géométrie pour traiter les problèmes en dimension quelconque a évolué. Mais pour la période qui nous occupe ici ce sont bien les méthodes arithmétiques qui sont privilégiées. D'ailleurs, Mordell propose aussi une démonstration arithmétique du théorème de Minkowski sur les parties convexes symétriques par rapport à un point.

4.1.2.4 Une nouvelle preuve du théorème de Minkowski sur les parties convexes

L'article dont il va être maintenant question a très certainement été rédigé avant certains travaux que nous avons commentés précédemment. Cependant nous avons choisi de rompre la présentation chronologique du travail de Mordell et de commenter à part cet article[101] pour plusieurs raisons. D'abord, son thème principal n'est pas le problème des formes linéaires mais il est lié au théorème de Minkowski sur les parties convexes symétriques par rapport à l'origine, théorème que Mordell retrouve comme une conséquence du résultat qu'il démontre. La question des formes linéaires est traitée comme une application possible du théorème de Mordell qui apparaît donc comme étant plus général. Ce travail est aussi à part car malgré une méthode de démonstration jugée arithmétique, Mordell se livre à une discussion d'ordre géométrique à propos de l'hypothèse de convexité dans le théorème de Minkowski alors que nous avons noté que les considérations géométriques ne sont pourtant pas dans ses priorités de l'époque. Cette dernière remarque peut sembler contradictoire avec ce qui a été dit au paragraphe précédent sur les rapports de Mordell à la géométrie à cette époque. Cependant cela peut être expliqué en regardant la chronologie du travail de Mordell du début des années 1930.
L'article qui va nous intéresser maintenant est publié en 1935 mais il a en fait été rédigé dès 1933 par Mordell. Nous pouvons dater ce travail d'une part parce que le journal dans lequel il est publié indique que l'article a été reçu le 2 novembre 1933, mais aussi parce qu'il en est question dans une lettre de Mordell adressée à Davenport qui est datée du 25 septembre 1933

« I have recently found a new and even simpler proof for Minkowski theorem

[101] Mordell 1935.

about lattice points in convex ovals of area 4 with centre at the origin[102]. »

Ainsi le raisonnement géométrique à propos du théorème de Minkowski est élaboré avant septembre 1933, à ce moment Mordell n'a publié qu'un seul article où les méthodes arithmétiques sont mises en avant. De plus, dans ce premier article dans lequel il utilise le lemme de Smith, il n'y a pas encore de comparaisons entre géométrie, arithmétique ou analyse. Nous pouvons donc penser que son engagement dans le choix de méthodes exclusivement arithmétiques ne se fait qu'après 1933 et qu'il se traduit par le point de vue adopté lors de la conférence d'Oslo ainsi que la publication de plusieurs articles dans lesquels l'arithmétique occupe la place centrale.

La présentation de Mordell rappelle celle que Minkowski faisait pour son théorème sur les convexes quand il l'énonçait sous sa forme analytique[103]. Il démontre un résultat sur les valeurs prises par une certaine classe de fonctions de n variables quand ces variables sont des entiers, puis il propose des applications de ce résultat principal. Les fonctions considérées par Mordell, notées $f(x_1, ..., x_n)$, sont en fait un peu plus générales que les fonctions distances que Minkowski avait étudiées. Elles vérifient les conditions suivantes[104] :

« (A). Pour tout réel $t > 0$,

$$(1) \qquad f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{\delta} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $\delta \geq 0$ est une constante indépendante des x et de t »

« (B).

$$(2) \qquad f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \leq k\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\},$$

où $k > 0$ est une constante indépendante des x et des y.

(C). Le nombre, N, de points réseau, c'est-à-dire, des ensembles d'entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ tels que

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G,$$

où $G > 0$ est suffisament grand, satisfait à l'inégalité

$$(4) \qquad N > JG^{\frac{n}{\delta}},$$

où $J > 0$ est indépendante de G. »

Mordell démontre que pour de telles fonctions, il existe des entiers $x_1, x_2, ..., x_n$, non

[102]Lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933, DAVENPORT (WL), G 211. Cette lettre est reproduite en annexe.

[103]Voir par exemple MINKOWSKI 1893.

[104]MORDELL 1935, p.248.

tous nuls, qui vérifient

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 2kJ^{-\frac{\delta}{n}} \ .$$

Avant de commencer sa preuve, Mordell remarque

> « My proof is completely arithmetical and even simpler than Minkowski's geometric proof. It has its origin in my recent arithmetical demonstration of Minkowski's theorem for linear homogeneous forms[105]. »

Certaines idées de cet article sont en effet assez proches des méthodes utilisées à propos des formes linéaires. Bien qu'il n'emploie pas le lemme de Smith, nous retrouvons la même idée de dénombrer le nombre de n-uplets modulo un entier ainsi que le nombre de points à coordonnées entières dans un domaine.
Mordell commence sa démonstration en remarquant que pour un entier naturel non nul M, il y a M valeurs distinctes modulo M et donc M^n $n-$uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ modulo M. Il considère ensuite l'ensemble défini par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq gM^\delta \ ,$$

où les constantes g et M sont choisies assez grandes. En prenant g plus grande que $J^{-\frac{\delta}{n}}$, la condition (C) implique que cet ensemble contient au moins $M^n + 1$ points à coordonnées entières. Deux d'entre eux, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, ont donc les mêmes coordonnées modulo M, ce qui s'exprime par l'existence d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que

$$y_r - z_r = Mx_r \qquad\qquad (r = 1,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n)\ .$$

D'après la condition (B),

$$\begin{aligned} f(y_1 - z_1, \ldots, y_n - z_n) &\leq k\,[f(y_1, \ldots, y_n) + \cdots + f(z_1, \ldots, z_n)] \\ &\leq k\left[gM^\delta + gM^\delta\right] = 2kgM^\delta \ , \end{aligned}$$

d'autre part, d'après (A), nous avons aussi

$$f(y_1 - z_1, \ldots, y_n - z_n) = f(Mx_1, \ldots, Mx_n) = M^\delta f(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

En faisant tendre g vers $J^{-\frac{\delta}{n}}$, Mordell obtient bien finalement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \leq \ 2kJ^{-\frac{\delta}{n}} \ .$$

Ce théorème de Mordell permet de retrouver celui de Minkowski. En effet, si le domaine défini par l'inégalité

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$$

[105] Mordell 1935 p.249. Mordell fait référence ici à sa démonstration dans Mordell 1933.

admet un volume noté V strictement positif, le volume de l'ensemble donné par

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq G$$

est alors $VG^{\frac{n}{\delta}}$ et donc

$$\frac{N}{VG^{\frac{n}{\delta}}} \xrightarrow[G \to +\infty]{} 1\,.$$

Ainsi pour $V > J$, la condition $N > JG^{\frac{n}{\delta}}$ est vérifiée et le théorème de Mordell donne l'existence d'entiers $x_1, \ldots, x_n$, non tous nuls, tels que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; 2kJ^{-\frac{\delta}{n}}\,.$$

Mordell justifie enfin le passage à la limite $J \to V$ et obtient

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; 2kV^{-\frac{\delta}{n}}\,, \tag{4.6}$$

ce qui est bien le théorème de Minkowski pour $k = \delta = 1$.

Par la suite, Mordell compare les hypothèses sous lesquelles Minkowski avait démontré son théorème avec celles utilisées dans cet article. C'est cette discussion de Mordell qui est d'ordre géométrique. Il remarque d'abord qu'avec Minkowski les domaines étudiés devaient être convexes. Il analyse comment cette hypothèse intervient dans le théorème de Minkowski

> « The convexity condition really means that if P, Q, are two points within S, then $P + Q$ lies within $2S$ [106] ».

Cette remarque est reprise dans la lettre à Davenport déjà évoquée :

> « A convex oval is one such that if P, Q are two points within or on it, $P + Q \in 2S$ (figure explains all)[107]. »

Dans cette lettre Mordell illustre son argument avec un dessin (voir la figure 4.3) qui, selon lui, doit pouvoir se substituer à des explications. Il semble ainsi donner une place forte à l'interprétation géométrique qui contient l'idée fondamentale, le principe à la base du résultat étudié.

Ces considérations sur la convexité amènent Mordell à considérer les ensembles S, qu'il appelle semi-convexes, qui sont tels que si P et Q sont des points de S alors le point $P + Q$ appartient à kS, où k est une constante fixée supérieure à 2. Pour de tels ensembles Mordell énonce le résultat suivant :

[106] Mordell 1935 p.250.

[107] Lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933, Davenport (WL), G 211.

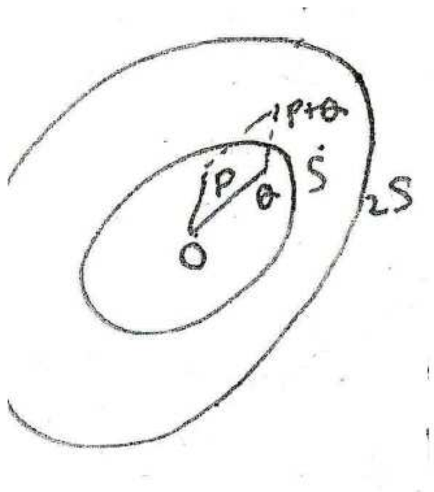


FIG. 4.3 – Dessin de Mordell dans la lettre à Davenport du 25 septembre 1933.

> « If S has a centre at O and a volume $V \geq k^n$, it contains within it at least one lattice point in addition to the origin[108]. »

Mordell juge la méthode qu'il emploie pour obtenir ce théorème par comparaison à ce que faisait Minkowski :

> « The proof is nearly trivial and entirely different from Minkowski's idea applied to n dimension[109]. »

Il apparaît donc qu'un des enjeux est d'avoir des méthodes qui peuvent être généralisées à n'importe quelle dimension. Cela fait écho à la réserve sur la géométrie exprimée plus tard par Mordell lors de la conférence d'Oslo dans laquelle il pointe la difficulté à saisir les arguments géométriques en dimension quelconque, réserve qu'il ne semble pas avoir encore en 1933.

Pour démontrer ce nouveau théorème, Mordell procède de manière assez proche que pour le premier résultat de cet article. Soit un entier naturel non nul M, le domaine $\frac{M}{k}\,S$ a pour volume $\frac{M^n}{k^n}\,V$ et si N est le nombre de points du réseau qu'il contient alors

$$\frac{N}{V\left(\frac{M}{k}\right)^n} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 1 \ ,$$

ou encore,

$$N \sim \frac{M^n\,V}{k^n} \ .$$

Lorsque v est strictement plus grand que k^n, Mordell en déduit que, pour M suffisamment grand, $N > M^n$. Le même raisonnement que ci-dessus sur les valeurs prises par

[108] MORDELL 1935, p.251.

[109] Lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933, DAVENPORT (WL), G 211.

des n-uplets d'entiers modulo M donne l'existence de deux points distincts du réseau P, Q qui sont dans $\frac{M}{k}S$ et dont les coordonnées sont congruentes modulo M. Ainsi le point $\frac{P-Q}{M}$ est aussi un point du réseau. Si maintenant Q' est le symétrique de Q par rapport à O, Q' appartient à $\frac{M}{k}S$ et $P-Q=P+Q'$, ce qui implique, à cause de la semi-convexité de S, que $\frac{P-Q}{M}$ appartient aussi à S. Le résultat est donc démontré quand $V > k^n$, le cas $V = k^n$ s'obtient par un passage à la limite comme dans les preuves précédentes.

Mordell termine son article par des applications dans lesquelles il utilise son résultat en prenant des fonctions f particulières. Ces applications sont essentiellement les mêmes que celles déjà étudiées par Minkowski, mais l'exigence de simplicité de Mordell justifie qu'il s'y intéresse à nouveau

« My form also simplifies some of the applications[110]. »

Il revient d'abord sur le résultat « bien connu » sur la majoration de n formes linéaires homogènes. Il considère donc les formes

$$\xi_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s\ , \qquad\qquad (r=1,\ldots,n),$$

et les fonctions

$$f_r(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left|\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s\right|\ , \qquad\qquad (r=1,\ldots,n).$$

Puis il justifie que le volume V du domaine défini par les inégalités $|f_r| \leq 1$, donné par

$$V = \int\int\ldots\int_{|f_r|\leq 1} dx_1\,dx_2\ldots dx_n\ ,$$

est égal à $\dfrac{2^n}{|\Delta|}$, où Δ est le déterminant des formes $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$. L'inégalité (4.6) implique alors l'existence d'entiers $x_1,x_2,\ldots,x_n$, non tous nuls, et tels que[111]

$$\left|\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\,x_s\right| \ \leq\ |\Delta|^{\frac{1}{n}} \qquad\qquad (r=1,2,\ldots,n)\,.$$

[110] Mordell 1935 p.251.

[111] Mordell a justifié rapidement que son résultat est encore vrai lorsque le domaine S est défini par plusieurs inégalités du type $f_r(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq \varepsilon_r$, où $\varepsilon_r = 0, \pm 1$ et chaque f_r vérifient les hypothèses du théorème, l'inégalité dans la condition (C) étant remplacée par $f_r(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq G\varepsilon_r$.

Pour la seconde application, Mordell note p un nombre plus grand que 1 et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des entiers naturels dont la somme est n. Soient ensuite les fonctions

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{r=1}^{\alpha} \left| \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_s \right|^p = \xi_1^p + \xi_2^p + \cdots + \xi_\alpha^p \ , \\ f_2 &= \sum_{r=\alpha+1}^{\alpha+\beta} \left| \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_s \right|^p = \eta_1^p + \eta_2^p + \cdots + \eta_\beta^p \ , \text{ etc}\ldots \end{aligned}$$

où les coefficients a_{ij} sont des réels. La condition (A) est vérifiée pour ces fonctions en prenant $\delta = p$ et l'inégalité

$$|X+Y|^p \ \le\ (|X|+|Y|)^p \ \le\ 2^{p-1}\ (|X|^p + |Y|^p) \tag{4.7}$$

permet de montrer (B) pour $k = 2^{p-1}$.
Le volume du domaine défini par $f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \le\ 1$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ est alors

$$V = \frac{2^n}{|\Delta|}\ \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{\beta}{p}\right)\ldots} \ ,$$

la borne de l'inégalité (4.6) s'écrit donc

$$2kV^{-\frac{\delta}{n}} = |\Delta|^{\frac{p}{n}}\ \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)\,\Gamma\left(1+\frac{\beta}{p}\right)\ldots\right]^{\frac{p}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p} \ .$$

Mordell note λ cette borne, le théorème implique l'existence d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls et qui vérifient

$$\begin{aligned} &|f_1|^p + \cdots + |f_\alpha|^p \ \le\ \lambda \ , \\ &|f_{\alpha+1}|^p + \cdots + |f_{\alpha+\beta}|^p \ \le\ \lambda \ , \\ &|f_{\alpha+\beta+1}|^p + \cdots + |f_{\alpha+\beta+\gamma}|^p \ \le\ \lambda \ , \text{ etc}\ldots \end{aligned}$$

Pour terminer, Mordell remarque que dans le cas où $\alpha = n$ et $\beta = \gamma = \cdots = 0$, il retrouve le théorème de Minkowski qui conduit à une inégalité du type

$$|f_1|^p + \cdots + |f_n|^p \ \le\ |\Delta|^{\frac{p}{n}}\ \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\frac{p}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^p} \ ,$$

où les f_r sont des formes linéaires homogènes. Revenant sur la question de la simplicité, Mordell note que cette dernière inégalité due à Minkowski nécessite la démonstration de

$$[(\xi_1+\eta_1)^p+\cdots+(\xi_n+\eta_n)^p]^{\frac{1}{p}} \;\leq\; [\xi_1^p+\cdots+\xi_n^p]^{\frac{1}{p}}+[\eta_1^p+\cdots+\eta_n^p]^{\frac{1}{p}} \;,$$

pour $\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n$ positifs, qui est plus difficile à obtenir que l'inégalité (4.7) qu'il utilise ici.

La présentation des résultats dans cet article de Mordell est finalement assez proche de celle qu'adoptait Minkowski. Mordell énonce un théorème sur les valeurs prises par des fonctions quand les variables sont des entiers, ces fonctions sont caractérisées par des conditions rappelant pour certaines celles des fonctions distances de Minkowski. Nous observons aussi un va-et-vient entre la formulation que Minkowski jugeait analytique (en termes de fonctions) et sa traduction géométrique (sur des domaines). Mais alors que Minkowski donnait des démonstrations qu'il jugeait analytiques ou géométriques, Mordell propose des preuves qui sont de nature arithmétique. Cependant la discussion sur la convexité et son illustration par le dessin laisse penser que la géométrie, *via* des représentations visuelles, peut parfois aussi jouer un rôle heuristique pour Mordell comme elle l'était pour Minkowski.
Revenons pour finir avec cet article sur la question de la convexité que Mordell aborde quand il introduit les ensembles semi-convexes. Rappelons que ces ensembles S sont tels que si P et Q appartiennent à S alors le point $P+Q$ est dans kS, où $k \geq 2$ est une constante. Que cela soit dans son article ou dans la lettre à Davenport, Mordell insiste sur son interprétation géométrique de la constante k, par exemple :

> « My k above is a sort of measure of the concavity or lack of convexity of an area[112]. »

Cette remarque le conduit à soumettre un problème qu'il juge intéressant à Davenport :

> « It suggests an interesting question what is the largest convex area contained in a concave area, which you may care to pose on to the geometers[113] ».

Mordell reviendra à cette idée de considérer un domaine convexe particulier dans un ensemble concave. C'est une des idées importantes qu'il utilisera au début des années 1940 pour démontrer son théorème sur les formes cubiques binaires.

[112]Lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933. Voir aussi Mordell 1935 p.251.
[113]Lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933, Davenport (WL), G 211.

4.1.2.5 Conclusion sur ces premiers travaux de Mordell en géométrie des nombres

Après l'avoir mentionnée pour la première fois dans un article publié en 1923, Mordell commence véritablement son travail sur la géométrie des nombres dans la deuxième moitié des années 1920. Entre 1927 et 1937, l'intérêt de Mordell pour la géométrie des nombres se porte presque exclusivement sur les formes linéaires. Plus particulièrement, le problème qui est au centre de ses préoccupations est la conjecture dite de Minkowski sur le produit de n formes linéaires non homogènes : existe-t-il des entiers x_1, x_2, ..., x_n tels que

$$\prod_{r=1}^{n}(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + c_r) \leq \frac{1}{2^n},$$

où les coefficients des formes sont des nombres réels et le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est égal à 1 ? L'importance que Mordell accorde à cette conjecture est attestée par le fait qu'il la place en 1928 parmi les problèmes qui influencent le plus les recherches en théorie des nombres de cette époque[114].

Cependant tous les articles sur la géométrie des nombres publiés par Mordell pendant cette période ne sont pas directement consacrés à la démonstration de cette conjecture. Dans certains d'entre eux, Mordell revient sur des résultats sur les formes linéaires homogènes[115] ; dans d'autres, il redémontre un cas particulier de la conjecture : le cas du produit de deux formes, déjà démontré par Minkowski ou Remak, pour lequel il propose plusieurs preuves[116]. Cette façon de travailler s'inscrit en fait dans une méthodologie de recherche plus générale et tous ces travaux participent en fait de ses tentatives pour résoudre le cas du produit de n formes non homogènes qui est son véritable objectif. Pour lui, il est nécessaire de multiplier les preuves dans des cas particuliers du problème étudié et de diversifier les approches

> « It is important to have different proofs, one sometimes goes much further than another and may also be useful elsewhere[117]. »

[114] Mordell 1928a.
[115] Voir par exemple Mordell 1929b, 1933.
[116] Mordell 1928a, 1937c.
[117] Lettre de Mordell à Davenport du 6 décembre 1931, Davenport (WL), G 211.

En plus des conséquences sur d'autres problèmes que peut avoir le développement de nouvelles méthodes, l'objectif est aussi pour Mordell d'arriver à atteindre le plus de simplicité possible. Cette notion de simplicité est à prendre avec précaution car elle est souvent mise en avant dans les textes mathématiques. Il s'agit d'une notion déjà rencontrée à plusieurs reprises et que nous verrons apparaître encore de nombreuses fois dans le travail de Mordell. Ce sont toutes ces occurences qui permettent de donner à son emploi une certaine cohérence. D'abord, pour Mordell, la simplicité ne va pas de soi, elle se cultive, il est nécessaire de travailler pour l'obtenir

> « It is generally after many years that the simple and apparently natural method is discovered. It is only then that the proofs can be appreciated by greater numbers, just perhaps as the rough diamond only reveals its beauty after it has been polished and cut[118]. »

Cette dernière citation nous amène à ce qui caractérise pour Mordell la méthode simple, c'est celle qui doit dévoiler ce qui est à la base d'un résultat, l'idée essentielle qui le fonde. Ainsi la découverte de la méthode la plus simple doit permettre d'ouvrir des pistes de recherches pour réussir à démontrer la conjecture de Minkowski dans le cas général.

Pendant la période 1927-1937, deux principales approches se succèdent dans le travail de Mordell pour étudier cette question du produit des formes linéaires.
Jusqu'en 1930 ce sont des techniques analytiques qui sont privilégiées, Mordell faisant jouer en particulier un rôle central à la formule sommatoire de Poisson

> « During the later 1920s [...] perhaps the most important theme was the Poisson Summation Formula and its applications[119] »

Ces recherches se situent dans la tradition de Siegel qui avait abordé le cas des formes homogènes par l'analyse, l'objectif de Mordell étant d'adapter la preuve de Siegel au cas non homogène. Ce courant, que Mordell qualifie d'analytique, se caractérise par l'intervention d'intégrales réelles ou complexes, des séries, des séries de Fourier. La place fondamentale qu'occupe la formule de Poisson est encore une fois justifiée en partie par un argument de simplicité. C'est la simplicité des hypothèses sous lesquelles cette formule est démontrée devant la diversité des applications possibles qui lui donne tout son intérêt. Mordell pense pouvoir, grâce à cette formule, réunir autour d'un principe commun des résultats *a priori* non connectés de théorie des nombres.

Mordell se détourne finalement assez rapidement de ces travaux sur la formule de Poisson avec lesquels il n'est pas parvenu à obtenir les résultats attendus, puisque dès

[118]Mordell 1928b p.138.
[119]Cassels 1973 p.502.

le début des années 1930 il développe des techniques qu'il juge cette fois arithmétiques. L'arithmétique est alors caractérisée par l'utilisation d'outils techniques. Parmi ces outils nous trouvons les congruences, le dénombrement de points à coordonnées entières dans un domaine, ce qui aboutit à une application du principe de Dirichlet : il y a M points dont les coordonnées diffèrent modulo M et $M+1$ dans le domaine, donc deux points ont les mêmes coordonnées modulo M. C'est l'application de cette démarche qui donne une cohérence aux travaux de Mordell de cette période. Pour les articles sur les formes linéaires, cette méthode repose aussi sur ce qui est appelé le lemme de Smith par Mordell.
Lors de la conférence d'Oslo en 1936, Mordell fait le lien entre les méthodes analytiques et les méthodes arithmétiques. Il faut chercher l'idée arithmétique derrière l'analyse et nous pouvons aussi ajouter derrière la géométrie à cause de sa preuve arithmétique du théorème de Minkowski sur les parties convexes. L'arithmétique apparaît donc comme plus fondamentale que les autres domaines. C'est comme si, pour Mordell, analyse et géométrie ne sont que des moyens techniques pour démontrer des résultats mais qu'ils cachent la véritable origine de ces théorèmes qui est de nature arithmétique. Expliciter ce noyau arithmétique doit justement permettre de percevoir le résultat dans toute sa simplicité.
Nous notons ici la différence avec Minkowski qui adossait la géométrie à l'analyse et à l'arithmétique pour favoriser l'intuition ce qui devait avoir pour effet de simplifier. Avec Mordell la simplicité n'est pas nécessairement du côté de la géométrie, au contraire il considère sa preuve arithmétique du théorème de Minkowski plus simple que la démonstration géométrique de Minkowski.

La géométrie est peu présente dans ces premiers travaux de Mordell alors qu'elle était une des caractéristiques de la géométrie des nombres de Minkowski. Un article fait un peu exception, il s'agit de MORDELL 1935 qui n'est pas consacré à la question du produit de formes linéaires non homogènes et dans lequel une discussion géométrique intervient. Cette discussion reste cependant assez limitée, la démonstration restant d'ailleurs arithmétique, et n'est pas suffisamment explicite pour mesurer le point de vue de Mordell sur la géométrie. Même s'il utilise un dessin pour communiquer avec Davenport sur son résultat, il ne développe pas de discours sur l'emploi de représentations géométriques, ni sur le thème géométrie et intuition très présent chez Minkowski ou encore sur la géométrie comme outil de communication.

Nous commençons à percevoir aussi chez Mordell une distinction qui peut sembler vague en premier lieu mais qui là encore prend de la consistance au fur et à mesure de son utilisation. Il s'agit de la distinction entre ce que Mordell nomme l'idée (d'une démonstration, d'un théorème) et la partie purement technique de son travail. C'est

par exemple l'"idée arithmétique" qu'il faut rechercher derrière l'analyse, c'est l'"idée" qui doit être simplifier au maximum. La preuve peut donc être jugée géométrique (c'est le cas dans MORDELL 1937c) alors que l'idée est arithmétique.
Nous verrons cette distinction apparaître à nouveau dans les commentaires de Mordell et nous constaterons aussi que son point de vue sur les rapports entre analyse, arithmétique et géométrie évolue.

Avec les débuts de Davenport en géométrie des nombres le travail de Mordell sur ce thème s'est intensifié. Leur collaboration concerne d'abord le problème de la majoration du produit de trois formes linéaires homogènes, puis le minimum des formes cubiques binaires. Ces sujets occupent une place importante dans le travail de ces deux mathématiciens pendant les années 1937-1943.

4.1.3 Harold Davenport (1907-1969)

4.1.3.1 Eléments biographiques sur Davenport

Harold Davenport est né le 30 octobre 1907 près d'Accrington[120] en Angleterre[121]. En 1923, Davenport entre à l'université de Manchester comme étudiant, il obtient son "degree with First Class Honours" in 1927[122]. C'est à cette période que Davenport rencontre Mordell pour la première fois

« I came across Davenport as a first year student at Manchester[123]. »

Davenport suit alors les cours d'analyse complexe de Mordell. En 1927, il se rend à Cambridge car il a obtenu un Scholarship à Trinity College. Il s'intéresse alors plus particulièrement aux cours de A.S. Besicovitch sur les fonctions quasi-périodiques et les ensembles de points et de J.E. Littlewood sur les nombres premiers. Il reste par la suite à Cambridge pour travailler sous la direction de Littlewood qui lui propose des sujets d'analyse et de théorie des nombres, Davenport se tourne vers la théorie des nombres et plus particulièrement la distribution des résidus quadratiques. Dans l'article biographique qu'il consacre à Davenport, Rogers rapporte que Littlewood voyait la direction de Davenport comme formelle et que ce dernier travaillait de façon autonome[124]. Notons cependant que Davenport travaille toute sa carrière sur des thèmes mêlant arithmétique et analyse auxquels Littlewood s'est aussi intéressé. Le mathématicien ayant peut être davantage influencé Davenport est Mordell. Les deux mathématiciens restent en contact

[120] Accrington se situe au nord de Manchester.
[121] MORDELL 1971a, p.1.
[122] ROGERS ET AL. 1971, p.159.
[123] MORDELL 1971a p.2.
[124] ROGERS ET AL. 1971, p.160.

même après le départ de Davenport de Manchester, nous avons en effet une lettre de Mordell adressée à Davenport datée de 1927. Dans ses lettres à la fin des années 1920, Mordell donne parfois des conseils de lecture[125], explique des points mathématiques peu clairs pour Davenport[126], etc... Mordell considère d'ailleurs Davenport comme un de ses élèves

> « This was perhaps the beginning of the new number theory school here [Cambridge], now one of the best in the world under the leadership of (the late) Professor Davenport and Professor Cassels, both of whom I am proud to say were my former students[127]. »

En 1930, Mordell fait suivre une proposition de Helmut Hasse à Davenport :

> « Dear Davenport,
> I have received a letter from Prof. Hasse. [...] who says "In order to have further occasion for applying and enriching my knowledge (English he means) I would much like to get a young English fellow at home. It would be very kind of you, if you could send me one of your student during the next summer term (April-July). We would invite that student to dwell and eat with us. He would be obliged to speak English with us at any time we are together (at breakfast dinner tea lunch etc.) ; otherwise he would be allowed naturally to speak German with every one else, in order to take some advantage from his German sojourn for himself. From my point of view it would be best, if he were student of pure maths out of an advanced course of you. I would much like to hear from you, whether you know a clever and handsome fellow for this purpose".
> [...] It seems to me a splendid opportunity for you and I shouldn't imagine any difficulty would arise at Trinity with your scholarship[128]. »

Au début des années 1930, Davenport fait un séjour à Marbourg au cours duquel il travaille avec Hasse[129]. Par la suite, il garde des contacts avec Hasse pendant de nombreuses années malgré les positions politiques prises par ce dernier. Pendant la période nazie en Allemagne, Davenport comme Mordell continuent à avoir des relations avec les mathématiciens allemands, même ceux qu'ils considèrent comme proches des nazis. Mais en même temps, ils jouent un rôle actif dans l'accueil de mathématiciens réfugiés parmi lesquels R. Rado, K.A. Hirsch, R. Courant, A. Walfisz, O. Taussky, H. Kober ou K. Mahler[130].

[125] Lettre du 8 juillet 1929, Davenport (WL), G 208.
[126] Lettre du 24 juillet 1929, Davenport (WL), G 208.
[127] Mordell 1971b p.958.
[128] Lettre de Mordell à Davenport du 27 novembre 1930, Davenport (WL), G 209.
[129] En fait, Davenport rend visite à Hasse à plusieurs reprises pendant cette période. Entre 1931 et 1934, les lettres qu'il adressent à Mordell sont envoyées alternativement d'Angleterre et d'Allemagne. Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[130] Rogers et al. 1971 p.161.

En 1937, son Trinity Fellowship, qui avait débuté en 1932, se termine et il est recruté à Manchester comme assistant par Mordell. D'après lui, « he could not have come to a better place or at a better time, for this was the beginning of the Manchester school of number theory[131]. » Il côtoie alors Mahler, Erdös, Heilbronn, Segre, Chao Ko, Žilinskas ; ainsi que de nombreux visiteurs comme Chabauty, Lehmer ou Rankin.
Par la suite, Davenport est nommé, en octobre 1941, professeur de mathématiques à l'University College of North Wales, puis Astor Professor of Mathematics à l'University College de Londres en 1945, il devient directeur du département de mathématiques en 1950. Il termine sa carrière à Cambridge où il obtient le Rouse Ball Professorship en 1958.
Davenport a influencé de nombreux étudiants et il est décrit comme très disponible pour ces étudiants. Parmi les jeunes mathématiciens qui ont été directement encadrés par Davenport ou qui ont assisté à son séminaire nous pouvons par exemple citer J.H.H. Chalk, F.J. Dyson, C.A. Rogers, K.F. Roth[132], D.A. Burgess, J.H. Conway, A. Baker et H.L. Montgomery[133]. Davenport a aussi des contacts avec beaucoup de mathématiciens, ce qui est illustré par le très grand nombre d'articles qu'il a publié en collaboration : c'est le cas pour 76 articles, écrits avec 24 auteurs différents.

Parmi les responsabilités administratives et les distinctions qu'il a obtenues, nous pouvons citer le Adams Prize de l'université de Cambridge en 1941, the Berwick Prize of the London Mathematical Society en 1951, il devient Fellow of the Royal Society en 1940 et obtient la Sylvester Medal en 1967 ; il est aussi président de la London Mathematical Society entre 1957 et 1959. En 1953, il est à l'initiative de la création d'un nouveau journal *Mathematika* édité par l'University College de Londres[134].
Davenport, qui était un gros fumeur, doit se faire enlever un poumon en janvier 1969 et il décède quelques mois plus tard le 9 juin 1969.

4.1.3.2 Les travaux mathématiques de Davenport

Comme Mordell, Davenport est un mathématicien qui a publié de très nombreux articles[135], il n'est donc pas ici question d'en donner un compte rendu précis mais seulement d'en présenter les grandes lignes ainsi que quelques résultats. Un aperçu des travaux de Davenport est proposé par Mordell et par Rogers dans le volume d'*Acta*

[131] Mordell 1971a p.2.
[132] Il travaillait avant avec T. Estermann qui a publié des articles en liaison avec la géométrie des nombres.
[133] Rogers et al. 1971, p.162-166.
[134] Rogers et al. 1971, p.163-168.
[135] La liste donnée dans ses oeuvres complètes en compte 198, voir Davenport 1977, p.430-439.

Harold Davenport

FIG. 4.4 – Harold Davenport (1907-1969)

Arithmetica de 1971[136], mais nous avons surtout utilisé l'article des *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*[137]. Dans cet article, le travail de Davenport est séparé en trois thèmes principaux : la géométrie des nombres et l'approximation diophantienne (sujet sur lequel nous reviendrons plus tard), la théorie analytique des nombres et les équations diophantiennes, la théorie multiplicative des nombres.
En théorie analytique des nombres, une partie de son travail se place dans la tradition d'Hardy et Littlewood, soit parce qu'il améliore certains de leurs résultats, soit parce qu'il reprend certaines de leurs méthodes. Par exemple, en collaboration avec Heilbronn, il démontre que tout entier naturel est la somme de 17 puissances quatrièmes, ce qui est le meilleure résultat possible. En 1937, toujours avec Heilbronn, il montre que pour k fixé, presque tout entier est la somme d'un nombre premier et d'une puissance k-ième. Il consacre aussi plusieurs articles au problème de Waring. Il démontre (avec Heilbronn) en 1949, que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sont des réels qui ne sont pas tous de même signe, alors il existe des entiers $x_1, \ldots, x_5$, non tous nuls et tels que

$$\left|\sum_{i=1}^{5} \lambda_i x_i^2\right| < 1 \, .$$

Il prouve ce théorème pour plus de 5 variables et s'intéresse ensuite à sa généralisation à n'importe quelle forme quadratique indéfinie[138].
Les premiers travaux de Davenport publiés portent sur le nombre des résidus quadratiques modulo un nombre premier p, ce qui le conduit à estimer des sommes du types

$$\sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_r)}{p} \right) ,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers distincts modulo p et $\left(\frac{x}{p}\right)$ désigne le symbole de Legendre. Les théorèmes obtenus sont ensuite interprétés dans le cadre de l'étude du nombre de solutions de la congruence

$$y^2 \equiv (n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_r) \mod p$$

sous l'influence de Hasse à Marbourg. Il semble que Davenport suscite l'intérêt de Mordell pour ce sujet comme le montre leur correspondence du début des années 1930.
Davenport a aussi étudié les équations diophantiennes du type $f(x) = g(y)$, où f et g sont des polynômes à coefficients entiers. Sur ce thème, il a par exemple montré avec

[136] Voir MORDELL 1971d; ROGERS 1871.
[137] ROGERS ET AL. 1971, p.168-185.
[138] ROGERS ET AL. 1971, p.171-176.

D.J. Lewis que si

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x \ , \quad g(y) = y^m + y^{m-1} + \cdots + y \ ,$$

avec $n > m > 1$, alors l'équation $f(x) = g(y)$ a au plus un nombre fini de solutions[139]. Davenport a consacré des articles à l'étude de certaines séries en liaison avec des questions de théorie des nombres. Par exemple, à nouveau avec Heilbronn, il démontre en 1936, que la fonction

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \qquad (0 < a < 1, \ a \neq \frac{1}{2})$$

a une infinité de zéros dans le domaine $Re\,(s) \geq 1$ quand a est rationnel ou transcendant.

4.1.3.3 Les premiers résultats de Davenport en géométrie des nombres

C.A. Rogers, dans ses articles biographiques sur Davenport, indique que ce dernier commence à s'intéresser à la géométrie des nombres quand il arrive à Manchester en 1937 :

> « When Davenport returned to Manchester to join Mordell's staff, he began to contribute to the Geometry of Numbers, a subject in which Mordell had been greatly interested[140]. »

Cette citation souligne aussi le rôle de l'influence de Mordell dans ce choix de sujet de recherche, influence que nous illustrerons pour chacun des premiers thèmes abordés par Davenport.

Bien que Mordell et Davenport sont en contact depuis la fin des années 1920, leur collaboration sur le thème de la géométrie des nombres ne débute réellement qu'en 1937. Leurs travaux entre 1937 et 1943 concernent essentiellement la question du produit de trois formes linéaires homogènes et l'approche de ce problème par l'étude des formes cubiques binaires. Ces deux thèmes de recherche seront traités à part car ils forment une partie importante du travail des deux mathématiciens en géométrie des nombres. De plus, il semble qu'ils considèrent que les théorèmes obtenus sur chacun de ces problèmes occupent une place particulière parmi leurs contributions à la géométrie des nombres. Ce sont en effet souvent ceux sur lesquels ils insistent le plus lorsqu'ils rendent compte de leur travail dans ce domaine.

Cependant, nous allons commencer par présenter deux articles de Davenport. Le pre-

[139] Rogers et al. 1971, p.182.
[140] Rogers 1871 p.14.

mier concerne le produit de n formes linéaires non homogènes et dans le second Davenport propose une nouvelle preuve du théorème des minima successifs de Minkowski. Ces deux articles sont présentés ici pour des raisons différentes. Celui sur la conjecture de Minkowski pour les formes linéaires non homogènes montre comment Mordell amène Davenport à s'intéresser à la géométrie des nombres. Il confirme aussi la place cruciale de cette question dans leur travail à ce sujet. La preuve du théorème sur les minima successifs est un peu isolée de leurs autres recherches de cette époque car la question abordée n'est pas directement liée aux formes linéaires.

a) Le produit de n formes linéaires non homogènes d'après Siegel

Le premier article de Davenport sur la géométrie des nombres est publié en 1937 [141]. Comme l'indique lui-même Davenport, dans une lettre adressée à Mordell du 10 octobre 1937 [142], Siegel démontre que si L_1, L_2, ..., L_n sont des formes linéaires à coefficients réels, de déterminant 1 et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des nombres réels, alors il existe des valeurs entières de x_1, x_2, ..., x_n telles que

$$\prod_{i=1}^{n} |L_i + c_i| \ \leq \ \gamma_n \ ,$$

où γ_n ne dépend que de n [143]. Mordell fait lire cette lettre à Davenport

> « with the impertinence of youth I could not resist simplifying Siegel's proof and with great generosity Siegel insisted that I should publish my simplified version instead of his publishing anything[144] ».

Davenport suit donc la suggestion de Siegel en précisant dans son article que sa démonstration reprend les mêmes idées que celle de Siegel mais qu'elles sont présentées de manière différente. La méthode utilisée par Davenport conduit en plus à l'estimation suivante pour γ_n :

$$\gamma_n \ \leq \ \left[n\, 2^{n-1}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\, n\right) \ \frac{(n!)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})^n} \right]^n \ .$$

La démonstration est basée sur la notion de minima successifs d'une forme quadratique binaire définie positive, notion que Davenport commence par rappeler.
Etant donnée $Q(x) = Q(x_1, ..., x_n)$ une telle forme dont le déterminant est noté D, les minima successifs de Q sont définis de la manière suivante : S_1^2 est le minimum de Q (atteint pour χ_1) pour les valeurs entières de x non nulles, S_2^2 est le minimum de Q

[141] Davenport 1937.
[142] C'est la date donnée par Davenport, mais dans les archives de Mordell nous avons seulement retrouvé une lettre de Siegel du 8 octobre 1937 qui correspond au contenu décrit ici par Davenport.
[143] Rappelons que Minkowski avait conjecturé que $\gamma_n = 2^{-n}$.
[144] Davenport cité dans Rogers et al. 1971 p.168.

(atteint pour χ_2) pour les valeurs entières de x non nulles et non multiples de χ_1, S_3^2 est le minimum de Q (atteint pour χ_3) pour les valeurs entières de x non combinaison linéaire à coefficients entiers de χ_1 et χ_2, etc...
Le théorème de Minkowski sur les minima successifs s'applique à la fonction $\sqrt{Q}$ qui est un cas particulier des fonctions distances étudiées par Minkowski. Ce théorème implique

$$\sqrt{D} \ \leq \ S_1 S_2 \ldots S_n \ \leq \ 2^n \, \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}{\Gamma(\frac{1}{2})^n} \, \sqrt{D} \, .$$

Davenport considère les minima successifs associés à la forme quadratique

$$Q = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 \, ,$$

puis il applique le théorème de Minkowski à la forme

$$R = \frac{L_1^2}{S_1^2} + \frac{L_2^2}{S_2^2} + \cdots + \frac{L_n^2}{S_n^2} \, .$$

L'application du théorème de Minkowski étant au centre de la méthode, Davenport termine en remarquant que n'importe quelles formes convexes à la place de Q et R peuvent être utilisées. Il donne l'exemple de la fonction

$$\max(|L_1|, |L_2|, \ldots, |L_n|)$$

qui peut être choisie à la place de la forme quadratique Q [145].

Cette démonstration est insuffisante pour obtenir la conjecture de Minkowski qui donne aussi $\gamma_n = \dfrac{1}{2^n}$. Cependant, Mordell remarquait dans son article sur ce sujet publié en 1937 [146] que les seuls résultats démontrés sur ce problème concernaient des valeurs de n particulières. Cet article de Davenport est donc la première démonstration publiée de l'existence d'une constante qui ne dépend que de n et qui majore le minimum sur les entiers du produit de n formes linéaires non homogènes.

b) Une nouvelle preuve du théorème sur les minima successifs

Avec le titre de son article *Minkowski's Inequality for the Minima Associated with a Convex Body*, Davenport place sa démonstration du théorème sur les minima successifs dans un cadre géométrique[147]. Il considère K un ouvert convexe centré en l'origine O dans un espace de dimension n. Il rappelle d'abord le premier théorème de Minkowski

[145] Davenport 1937 p.265.
[146] Mordell 1937c.
[147] Davenport 1939a.

et donne le principe qui est pour lui à la base de toutes les démonstrations de ce théorème : un domaine, pas nécessairement convexe, de volume strictement plus grand que 2^n contient deux points distincts $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tels que

$$x_1 \equiv y_1 \pmod 2 \,, \quad x_2 \equiv y_2 \pmod 2 \,, \quad \ldots \quad , \quad x_n \equiv y_n \pmod 2 \,.$$

Si K est convexe, le point $\frac{1}{2}(x-y)$ est alors un point du réseau différent de O et dans K. Cette méthode de démonstration n'est cependant pas celle que donnait Minkowski, nous avons vu qu'il s'agit en fait d'une idée héritée du travail de Blichfeldt et la formulation en terme de congruences vient de Mordell.
Davenport utilise ici ce résultat afin de démontrer le théorème de Minkowski sur les minima successifs d'une manière qu'il juge plus simple. Ces minima sont définis de la façon suivante : λ_1 est la borne inférieure des $\lambda > 0$ tels que λK possède un point du réseau P_1 sur sa frontière, λ_2 la borne inférieure des $\lambda > 0$ tels que $\lambda_2 K$ a un point du réseau P_2 sur sa frontière qui n'appartient pas à la droite OP_1, λ_3 la borne inférieure des $\lambda > 0$ tels que $\lambda_3 K$ a un point du réseau P_3 sur sa frontière qui n'est pas dans OP_1P_2, etc... D'après le théorème de Minkowski, λ_1, λ_2, ..., λ_n vérifient

$$\lambda_1 \, \lambda_2 \, \ldots \, \lambda_n \, V(K) \;\leq\; 2^n \,,$$

où $V(K)$ désigne le volume de K. Davenport considère ensuite les points du réseau $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ qui sont tels que $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i$ engendrent tous les points du réseau de $OP_1 \ldots P_i$, puis il se ramène au cas où $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ sont les points $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 1)$. Par définition de λ_n, tous les points du réseau dans $\lambda_n K$ sont tels que $x_n = 0$, de même les points du réseau dans $\lambda_{n-1} K$ vérifient $x_n = x_{n-1} = 0$. Plus généralement, si x et y appartiennent à $\lambda_r K$ avec $x_i \equiv y_i \pmod 2$ pour tout i, alors $\frac{1}{2}(x-y)$ est un point du réseau qui est aussi dans $\lambda_r K$ et donc

$$x_r = y_r \,, \; x_{r+1} = y_{r+1} \,, \quad \ldots \quad , \; x_n = y_n \,.$$

Davenport raisonne maintenant par l'absurde : si $\lambda_1 \ldots \lambda_n V(K) > 2^n$, il justifie que pour arriver à une contradiction il suffit de construire des domaines K_1, K_2, ..., K_n (non nécessairement convexes) qui vérifient les conditions suivantes

(a) $K_r \subset \lambda_r K$, pour tout r,

(b) si x, y sont dans K_r et tels que $x_i = y_i$ pour tout $i = r, r+1, \ldots, n$, alors il existe x', y' appartenant à K_{r-1} tels que $x - y = x' - y'$,

(c) $V(K_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n V(K)$.

Supposons K_1, K_2, ..., K_n donnés, la condition (c) implique $V(K_n) > 2^n$, ainsi d'après le lemme énoncé au début de son article, il existe deux points x, y distincts de K_n dont les coordonnées vérifient

$$x_1 \equiv y_1 \pmod 2, \quad x_2 \equiv y_2 \pmod 2, \quad \ldots \quad , \quad x_n \equiv y_n \pmod 2.$$

D'après (a), $\frac{1}{2}(x-y)$ est un point du réseau dans $\lambda_n K$, donc $x_n = y_n$. (b) donne l'existence de deux points x', y' distincts dans K_{n-1} tels que $x - y = x' - y'$, leurs coordonnées sont donc égales modulo 2 et Davenport réitère le même procédé jusqu'à obtenir deux points X, Y distincts qui appartiennent à K_1 et dont les coordonnées sont les mêmes modulo 2. Ainsi le point $\frac{1}{2}(X-Y)$ est un point du réseau différent de O et dans $\lambda_1 K$, ce qui contredit la définition de λ_1.
La fin de l'article est donc consacrée à la construction par récurrence de K_1, K_2, ..., K_n qui est assez peu détaillée. D'après Rogers, cette preuve a été critiquée à cause de ce manque de détails[148].

4.2 Le produit de trois formes linéaires et les minima des formes cubiques binaires 1937-1943

La collaboration entre Mordell et Davenport sur la géométrie des nombres commence véritablement à partir de 1937. Si nous regardons le nombre d'articles qu'ils publient sur ce sujet, nous pouvons voir que ce thème prend une place de plus en plus importante dans leur travail de la fin des années 1930 au début des années 1940. Davenport publie son premier article sur les formes linéaires non homogènes en 1937 et la part de ses publications en géométrie des nombres par rapport à toutes ses publications augmente jusqu'en 1947 où elle atteint environ 57% [149]. Pour Mordell, le thème de la géométrie des nombres représente environ 53% de ses articles entre 1937 et 1943 contre à peu près 26% pour la période 1927-1937 étudiée précédemment. Pour les deux mathématiciens, la géométrie des nombres est le sujet d'environ la moitié des articles qu'ils ont publiés entre 1937 et 1950. D'ailleurs, *a posteriori*, la période qui va nous intéresser ici est identifiée comme un moment de grande activité en géométrie des nombres

> « In the late 1930s and early 1940s the work of Mordell, Mahler and Davenport in this subject [la géométrie des nombres] saw the greatest development since its initiation by Minkowski[150]. »

[148] Rogers indique que les critiques portaient en particulier sur l'utilisation par Davenport d'une famille de fonctions vérifiant certaines conditions sans qu'il en démontre l'existence. Rogers juge ces critiques non justifiées et il propose des fonctions qui conviennent. Voir Rogers et al. 1971, p.169-170.
[149] Il s'agit de la part des articles sur la géométrie des nombres entre 1937-1947.
[150] Cassels 1973, p.504.

Leur collaboration sur la géométrie des nombres pendant ces années 1937-1943 concerne principalement le problème du produit de trois formes linéaires homogènes et le minimum des formes cubiques binaires. Les cubiques binaires ont en fait été introduites par Mordell en liaison avec le produit de trois formes linéaires et constituent donc une nouvelle approche de la question.
D'après Davenport, c'est Mordell qui est à l'origine de son intérêt pour le problème et lui « a suggéré l'étude du problème analogue pour trois formes linéaires à trois variables[151]. »
De plus, les échanges entre les deux mathématiciens sont facilités entre 1937 et 1941 car ils sont tous les deux à l'université de Manchester. Mordell s'y trouve depuis 1922[152] et il y engage Davenport en tant qu'assistant en 1937, poste que ce dernier occupe jusqu'en octobre 1941[153]. D'après Rogers, c'est pendant cette période à Manchester que

> « Under Mordell's influence Davenport acquired a lasting interest in the Geometry of Numbers and in Diophantine Approximation[154]. »

Enfin, ces années marquent aussi un changement dans l'attitude de Mordell par rapport à la géométrie. Elle prend en effet une place importante dans ses travaux et l'arithmétique n'est plus seule mise en avant dans ses commentaires. En réalité il semble qu'un rôle spécifique pour chacun de ces deux points de vue (arithmétique et géométrique) se dessine peu à peu. La géométrie permettrait de traiter de problèmes généraux alors que l'arithmétique serait plus adaptée aux cas particuliers. Mais leur conception de cette séparation des rôles entre géométrie et arithmétique est certainement encore plus subtile. La distinction précédente semble s'appliquer seulement à ce qu'ils désignent « l'idée » de la preuve (que nous avons déjà évoquée), notion bien subjective à saisir qui pourrait être du côté de l'heuristique, et pas nécessairement à sa partie technique et aux vérifications formelles. Nous essaierons d'illustrer ce point par la suite à travers les exemples que nous allons rencontrer.

4.2.1 Le produit de trois formes linéaires homogènes (1937-1939)

4.2.1.1 Problème et conjecture

Dans un premier temps, nous allons voir d'où vient ce problème du produit de trois formes linéaires homogènes de trois variables et de quelle façon il est abordé par

[151] Davenport 1946b.
[152] Cassels 1973 p.501.
[153] Rogers et al. 1971 p.161.
[154] Rogers et al. 1971 p.161.

Davenport qui est le premier à le traiter. Ce sont des considérations sur les nombres algébriques qui amènent Davenport à la conjecture de son premier résultat qu'il juge important en géométrie des nombres.
La présentation qui suit s'inspire de deux textes non publiés de Davenport. Le premier est une conférence en français faite à Bruxelles en 1946 [155] et le second est un cours donné à Stanford en 1950 [156]. À ces deux occasions il revient sur ses théorèmes sur le produit de trois formes linéaires mais aussi sur la genèse de ces résultats.

a) Retour sur un théorème de Minkowski

Le point de départ du problème est un résultat de Minkowski sur n formes linéaires homogènes. Supposons que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soient des formes linéaires réelles homogènes de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de déterminant Δ. Minkowski appliquait son théorème sur les parties convexes symétriques par rapport à l'origine au domaine défini par l'inégalité

$$|\xi_1| + \cdots + |\xi_n| \leq \lambda \; .$$

Le volume de ce domaine est $\frac{2^n \lambda^n}{n!}$, ainsi en choisissant λ tel que $\lambda^n = n!|\Delta|$, Minkowski a démontré qu'il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls et qui vérifient

$$|\xi_1| + \cdots + |\xi_n| \leq (n!|\Delta|)^{\frac{1}{n}} \; .$$

L'inégalité arithmético-géométrique[157] lui permettait alors d'en déduire une inégalité pour la valeur absolue du produit des formes : il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls qui vérifient

$$|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n| \leq \frac{n!}{n^n} \, |\Delta| \; .$$

Dans la conférence de Bruxelles, Davenport indique que

> « Un des problèmes suggéré par ce dernier résultat forma le point de départ de mes recherches dans la géométrie des nombres en 1937 [158]. »

Le problème auquel Davenport fait allusion dans cette citation est celui de la détermination de la meilleure constante possible dans l'inégalité précédente lorsque n est un entier fixé ; la borne obtenue par le théorème de Minkowski n'est en effet pas optimale.

[155] Davenport 1946b.
[156] Davenport 1950b.
[157] Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des nombres réels strictement positifs alors $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
[158] Davenport 1946b, p.6.

b) Le cas du produit de deux formes linéaires

Pour justifier que la constante trouvée par Minkowski n'est pas optimale Davenport revient sur le cas où l'entier n est égal à 2.
Pour deux formes linéaires $\xi = au + bv$ et $\eta = cu + dv$ de déterminant $\Delta = ad - bc$ non nul, la borne de l'inégalité précédente vaut $\frac{2!}{2^2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|\Delta|$. Mais la meilleure constante pour le produit de deux formes linéaires est connue depuis 1873 et les travaux de Aleksander Nikolaevich Korkine et Egor Ivanovich Zolotareff[159]. Ils ont démontré qu'il existe des entiers u et v non tous deux nuls tels que

$$|\xi\eta| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\,|\Delta|\,.$$

L'égalité est par exemple obtenue pour les formes

$$\xi = u + \frac{\sqrt{5}+1}{2}v \qquad \text{et} \qquad \eta = u + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}v\,.$$

En effet, la valeur absolue du déterminant de ces deux formes est $|\Delta| = \sqrt{5}$ et leur produit est égal à

$$\xi\eta = \left(u + \frac{\sqrt{5}+1}{2}v\right)\left(u + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}v\right) = u^2 + uv - v^2\,.$$

Quand les variables sont des entiers non tout deux nuls, le produit $\xi\eta$ est aussi un entier non nul sinon un des facteurs précédents serait égal à 0, ce qui contredirait l'irrationnalité de $\sqrt{5}$. Pour tous les couples d'entiers (u, v), différent de $(0, 0)$, il vient donc

$$|\xi\eta| \geq 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times |\Delta|\,.$$

Ainsi quand l'entier n est fixé, cela conduit à se demander quelle est la meilleure estimation possible, l'inégalité de Minkowski ne la donnant pas. C'est la recherche que propose Mordell à Davenport dans le cas où n est égal à 3.

c) Conjecture pour $n = 3$

Une possibilité pour essayer de déterminer quelle est la meilleure constante possible est de trouver un moyen de construire un produit de formes linéaires homogènes qui

[159] Dans sa conférence à Bruxelles (Davenport 1946b p.6), Davenport attribue ce résultat à Andrei Andreyevich Markoff en 1879 et dans le cours à Stanford à Korkine et Zolotareff en 1873, d'après lui le résultat était même déjà connu (Davenport 1950b p.47). Il se trouve effectivement dans un article de 1873 de Korkine et Zolotareff sur la réduction des formes quadratiques, voir Korkine et Zolotareff 1873. Pour des informations supplémentaires sur les travaux de Korkine, Zolotareff et Markoff sur les formes quadratiques voir Ozhigova 2001, en particulier les pages 137 à 154.

ne soit pas trop petit quand les variables sont des entiers. Davenport remarque qu'un tel procédé est donné, par exemple, par la théorie algébrique des nombres :

> « The only general construction we know for getting a set of n linear forms whose product cannot be too small is by taking one of the linear forms to have its coefficients in an algebraic number-field of degree n, and the other linear forms to be the algebraic conjugates[160]. »

Soit en effet $k(\theta)$ un corps de nombres algébriques de degré n tel que θ et ses conjugués soient tous des nombres réels. Notons aussi $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ une base des entiers du corps $k(\theta)$, tous les entiers de ce corps s'écrivent donc sous la forme

$$\xi = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n \ ,$$

où les u_i sont des entiers relatifs.
Considérons maintenant les conjugués $\omega_i^{(2)}, \ldots, \omega_i^{(n)}$ de ω_i $(\omega_i^{(1)} = \omega_i)$ et les n formes linéaires conjuguées $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$ définies par :

$$\xi^{(j)} = u_1\omega_1^{(j)} + u_2\omega_2^{(j)} + \cdots + u_n\omega_n^{(j)}$$

Le déterminant au carré de ces formes linéaires est le discriminant d du corps et nous avons donc construit n formes linéaires réelles de déterminant $\pm\sqrt{d}$. Quand les variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prennent des valeurs entières non toutes nulles, le produit $\xi^{(1)}\xi^{(2)}\ldots\xi^{(n)}$ est un entier relatif différent de zéro car il s'agit de la norme de l'entier algébrique $\xi^{(1)}$, donc

$$|\xi^{(1)}\xi^{(2)}\ldots\xi^{(n)}| \ \geq \ 1 \, .$$

Le problème posé au départ est d'établir une inégalité du type[161]

$$\min_{(u)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{(0)\}} |\xi_1\xi_2\ldots\xi_n| \ \leq \ k\,|\Delta| \, .$$

Dans le cas des formes $\xi^{(j)}$, la valeur absolue du déterminant $|\Delta|$ est $\sqrt{d}$ et le deuxième membre de l'inégalité devient $k\sqrt{d}$. Cette inégalité est donc meilleure si on prend pour d le discriminant minimum d'un corps algébrique de nombres totalement réel de degré n. De plus, comme $|\xi^{(1)}\xi^{(2)}\ldots\xi^{(n)}| \geq 1$, la constante k vérifie $k \geq \dfrac{1}{\sqrt{d}}$.
Pour un corps de nombres algébriques réel de degré 2 le discriminant minimum est 5 et $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est comme nous l'avons vu la meilleure constante possible. Cette remarque conduit Davenport à penser que la constante optimale pour $n = 3$ peut être obtenue de la même manière. Alors que le théorème de Minkowski donne comme borne $\frac{3!}{3^3}\ |\Delta| = \frac{2}{9}\ |\Delta|$ avec le procédé précédent elle devient $\frac{1}{7}\ |\Delta|$ conformément au fait que le discriminant

[160] Davenport 1950b p.21.
[161] Nous notons (u) le n-uplet $(u_1, ..., u_n)$.

minimum d'un corps cubique réel est 49. Ainsi le résultat que Davenport va chercher à démontrer est le suivant : pour ξ, η, ζ trois formes linéaires réelles et homogènes de déterminant Δ, il existe des entiers x_1, x_2, x_3 non tous nuls tels que

$$|\xi\,\eta\,\zeta| \;\leq\; \frac{1}{7}\,|\Delta|\,.$$

Davenport indique dans sa conférence à Bruxelles quelle fût sa stratégie pour essayer de démontrer cette conjecture :

> « Bien entendu, ceci n'est qu'une suggestion, et quoiqu'elle se soit montrée être vraie, elle était bien difficile à établir. Mon premier pas était de découvrir une démonstration du théorème de Markoff[162] qui suggérait un processus pour le cas $n = 3$ [163]. »

Nous retrouvons donc la même approche méthodologique que chez Mordell. Pour comprendre comment généraliser un théorème, un procédé consiste à multiplier les preuves dans les cas déjà connus.

4.2.1.2 Les théorèmes de Davenport de 1937-1938

Les premiers résultats obtenus par Davenport sur le produit de trois formes linéaires homogènes sont énoncés dans ce paragraphe. Des éléments sur leur démonstration seront donnés dans le paragraphe suivant.
Les recherches de Davenport sur ce sujet commencent à la fin de l'année 1937, certainement entre septembre et novembre 1937. Elles sont présentées dans une série de trois articles publiés en 1938 et 1939 [164], mais les premières démonstrations sont élaborées dès 1937 :

> « In 1937, I solved this problem, having taken it up at the suggestion of Professor Mordell[165] ».

Cela est confirmé par les dates de réception des articles par les journaux dans lesquels ils sont publiés : le premier est reçu le 16 décembre 1937, le second le 20 janvier 1938 et le troisième le 18 mai 1938. Les premiers théorèmes sont donc démontrés assez rapidement par Davenport.

Dans le premier article[166], Davenport considère trois formes linéaires ξ, η, ζ de trois variables x, y, z, à coefficients réels et de déterminant 1. Il note aussi M la borne

[162] C'est-à-dire du cas $n = 2$.
[163] Davenport 1946b p.7-8.
[164] Davenport 1938a,b, 1939b.
[165] Davenport 1946a, *Inaugural Lecture at University College*, Londres, 6 juin 1946.
[166] Davenport 1938a.

inférieure de $|\xi\eta\zeta|$ pour des valeurs entières des variables non toutes nulles. Dans cet article, il démontre que

$$M \;\leq\; 8\;\left[(3+\sqrt{2})\,\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right]^{-2} \quad \left(\approx \frac{1}{6,07\ldots}\right)\;.$$

Il donne ensuite trois formes pour lesquelles $M = \frac{1}{7}$ et il indique qu'il a conjecturé $M \leq \frac{1}{7}$. Même s'il n'obtient pas ce résultat dans cet article, Davenport semble penser que la méthode utilisée doit pouvoir être améliorée car elle permet de démontrer la meilleure estimation possible dans le cas de deux formes.
La conjecture $M \leq \frac{1}{7}$ est démontrée dans l'article suivant[167]. En fait, Davenport y démontre un résultat un peu plus fort : il existe une constante μ strictement plus petite que $\frac{1}{7}$ telle que $M \leq \mu$ ou bien $M = \frac{1}{7}$; dans le cas où $M = \frac{1}{7}$, les formes sont équivalentes à

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda_1\,(\theta x + \phi y + \psi z), \\ L_2 &= \lambda_2\,(\phi x + \psi y + \theta z), \\ L_2 &= \lambda_3\,(\psi x + \theta y + \phi z), \end{aligned}$$

où $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{7}$ et $\theta = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $\phi = 2\cos\frac{4\pi}{7}$, $\psi = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ sont les racines de l'équation $t^3+t^2-2t-1=0$.
Enfin, le dernier article traite du cas où une des formes L_1 est à coefficients réels et les deux autres L, $\overline{L}$ sont à coefficients complexes et conjugués. De plus, le déterminant des trois formes a un module égal à 1. Davenport montre alors que $M \leq \frac{1}{\sqrt{23}}$ et qu'il s'agit de la meilleure constante possible, le cas d'égalité ayant lieu pour les formes

$$\begin{aligned} L &= \lambda\,(u + v\theta + w\theta^2), \\ \overline{L} &= \overline{\lambda}\,(u + v\overline{\theta} + w\overline{\theta}^2), \\ L_1 &= \mu\,(u + v\phi + w\phi^2), \end{aligned}$$

où λ est un nombre complexe, μ un réel tels que $|\lambda\overline{\lambda}\mu| = \frac{1}{\sqrt{23}}$ et ϕ, θ, $\overline{\theta}$ sont les racines de l'équation $t^3-t-1=0$.
Notons l'analogie avec le cas de trois formes réelles puisque à nouveau

> « The problem is related to the cubic field of numerically least <u>negative</u> discriminant in much the same way as the problem of $|xyz| \leq 1$ is related to the cubic field of least <u>positive</u> discriminant. The cubic field of numerically least negative discriminant is in fact the field generated by $t^3-t-1=0$[168]. »

[167] Davenport 1938b.
[168] Davenport 1950b, p.61.

4.2.1.3 Comparaison des preuves publiées avec des commentaires non publiés de Davenport

> « Davenport took up the problem of finding the arithmetic minimum of a product of three real linear forms, studying the problem by geometrical methods and drawing diagrams on triangulated graph paper. When he came to write up the work (24, 25)[169] he eliminated all reference to the geometry he has used as a guide and presented a severely analytic proof
> [...] Shortly after completing his ' $\frac{1}{7}$ ' result, Davenport tackled the corresponding result for the product of three linear forms, one real and two conjugate complex [...] Although the proof is presented in an analytic form, the geometry from which it was obtained is less well hidden, and indeed this is one of the very few of Davenport's papers that actually contains a diagram[170]. »

L'objet de ce paragraphe est de confirmer ces commentaires de Rogers à propos du travail de Davenport sur le produit de trois formes linéaires. Pour cela, nous allons comparer les premiers articles qu'il publie sur ce sujet avec des sources non publiées. Ces sources non publiées sont des notes de cours ou des notes pour des conférences, des exposés dans lesquelles il donne parfois des morceaux des preuves avec des commentaires sur la démarche employée pour les obtenir. Nous verrons, comme le suggère Rogers, que la géométrie occupe une place importante dans la découverte des démonstrations et des méthodes mais qu'elle disparaît presque complètement lors de la phase de rédaction des travaux publiés. Comme le remarque aussi Rogers, nous constaterons que le cas complexe laisse cependant apparaître un peu plus les aspects géométriques.

a) Quelques éléments sur les démonstrations publiées

Dans un premier temps, des éléments sur les démonstrations données par Davenport dans ses articles sont présentés. L'objectif n'est pas ici d'en exposer tous les détails, mais davantage d'essayer de faire ressortir le mode d'exposition choisi par Davenport.

Dans le premier article publié sur le produit de trois formes linéaires réelles, Davenport démontre que

$$M \;\leq\; 8\;\left[(3+\sqrt{2})\,\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right]^{-2} \quad \left(\approx \frac{1}{6,07\ldots}\right).$$

[169] C'est-à-dire Davenport 1938a,b.
[170] Rogers et al. 1971, p.168-169.

La démonstration repose sur un lemme énoncé au début de l'article[171] :

$$\min_{u,v>0}\left\{u+v+\max\left(\frac{1}{uv}\,,\frac{1}{|(u-1)(v-1)|}-1\right)\right\}=\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)(<3,5)\ .$$

Pour justifier ce résultat, Davenport introduit la fonction

$$\phi(u,v)=u+v+\max\left(\frac{1}{uv}\,,\frac{1}{|(u-1)(v-1)|}-1\right)\ .$$

Il suppose d'abord que $u>1$ et $v>1$, ou bien $u<1$ et $v<1$ et il pose $t=\frac{1}{2}(u+v)$. En étudiant $\phi(t,t)$ selon les valeurs de $t>0$, il montre que $\phi(t,t)\geq 3,5$ et comme

$$\phi(t,t)\geq\phi(u,v)\ ,$$

cela implique que $\phi(u,v)\geq 3,5$. Il suppose ensuite que $u>1>v$, puis justifie qu'il suffit d'étudier ϕ pour des valeurs de u et v qui vérifient

$$\frac{1}{uv}=\frac{1}{(u-1)(1-v)}-1\ .$$

Soit alors $p=(u-1)(1-v)$, la relation précédente donne $0<p<1$ ainsi que

$$\phi(u,v)=p+\frac{1}{1-p}+\frac{1}{p}-1\,.$$

En dérivant par rapport à p, Davenport montre que le minimum pour ϕ est atteint pour

$$p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1-\sqrt{2}\right)$$

et que pour cette valeur de p,

$$\phi(u,v)=\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)\ ,$$

ce qui termine la preuve du lemme.
Soient ξ,η,ζ les formes linéaires, si $\varepsilon>0$, il existe des valeurs entières des variables pour lesquelles $\xi=\xi_0,\eta=\eta_0,\zeta=\zeta_0$ et

$$M\leq|\xi_0\eta_0\zeta_0|<M(1+\varepsilon)\,.$$

Posons $P=\sqrt[3]{|\xi_0\eta_0\zeta_0|}$, quitte à prendre les formes $\frac{\xi P}{|\xi_0|},\frac{\eta P}{|\eta_0|},\frac{\zeta P}{|\zeta_0|}$, Davenport suppose que $|\xi_0|=|\eta_0|=|\zeta_0|=P$. La deuxième étape de la preuve consiste alors à appliquer le théorème des minima successifs de Minkowski à $|\xi|+|\eta|+|\zeta|$. Soient $3S_i$ $(i=1,2,3)$

[171] Davenport 1938a p.140.

ces minima, le volume du domaine défini par

$$|\xi| + |\eta| + |\zeta| \leq 1$$

est $\dfrac{8}{6}$, le théorème de Minkowski implique donc

$$(3S_1)\,(3S_2)\,(3S_3) \times \frac{8}{6} \ \leq\ 8\,.$$

Ce qui permet d'obtenir, d'une part[172],

$$S_1 S_2^2 \ \leq\ \frac{2}{9} \tag{4.8}$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique,

$$M \ \leq\ S_1^3\,. \tag{4.9}$$

Avec la définition de M, Davenport montre ensuite que[173]

$$(|\xi_i| - P)(|\eta_i| - P)(|\zeta_i| + P) \ \geq\ M\ ,$$

puis il pose $u = \frac{|\xi_i|}{P}, v = \frac{|\eta_i|}{P}, w = \frac{|\zeta_i|}{P}$ pour en déduire

$$uvw \ \geq\ \frac{1}{1+\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad |(u-1)(v-1)|(w+1) \ \geq\ \frac{1}{1+\varepsilon}\,. \tag{4.10}$$

En utilisant les inégalités $S_1 \leq S_2$, (4.8) et (4.9), il obtient[174] :

$$u + v + w \ \leq\ 3\,\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Finalement, en appliquant le lemme ainsi que (4.10), cela implique :

$$3\,\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} \ \geq\ \min_{u,v>0}\phi(u,v) = \frac{1}{2}\,\left((3+\sqrt{2})\,\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)\ ,$$

ce qui achève la démonstration.
Davenport termine son article en donnant quelques indications de modifications de sa méthode permettant d'améliorer sensiblement l'estimation de M, mais cela ne conduit pas à la démonstration de la conjecture $M \leq \frac{1}{7}$.
Nous constatons que cette preuve ne fait pas appel à la géométrie. Elle semble ap-

[172] Davenport 1938a, p.143.
[173] Davenport 1938a, p.143.
[174] Davenport 1938a, p.144.

paraître un peu dans le passage où le théorème de Minkowski est appliqué. Mais il s'agit d'une application immédiate de ce théorème et non de la mise en oeuvre d'un raisonnement géométrique.

La preuve de la conjecture $M \leq \frac{1}{7}$ est l'objet de l'article suivant[175] dans lequel est démontré un résultat un peu plus fort (voir le paragraphe 4.2.1.2). La démonstration n'est pas très facile à suivre. Aucune notion vraiment difficile n'est utilisée, mais la présentation des arguments, sous la forme d'une série de 15 lemmes et 2 théorèmes, rend difficile la compréhension de la fonction de chaque étape dans l'ensemble de la preuve. Nous ne donnons que des morceaux de la preuve, l'objectif étant seulement de montrer quel est le style de rédaction adopté par Davenport.
Dans ce qui suit L_1, L_2, L_3 désignent des formes linéaires à coefficients réels et de déterminant 1 et θ, ϕ, ψ sont les solutions de l'équation $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$. ε est un réel strictement positif quelconque et les ε_i sont aussi strictement positifs, ne dépendent que de ε et tendent vers 0 quand ε tend vers 0.
Dans la première partie de la démonstration, Davenport étudie les ensembles de trois réels x, y, z qui vérifient les deux conditions suivantes :

- $x \geq y \geq z$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ |(n+x)(n+y)(n+z)| \geq 1 - \varepsilon\,.$

Des réels de la forme $x+m, y+m, z+m$ ou $-x+m, -y+m, -z+m$, où m est un entier, sont des ensembles dits équivalents à x, y, z. L'objet des trois premiers lemmes de l'article est de montrer que si $x - z < 3 + \frac{1}{5}$, quitte à prendre un ensemble équivalent, il est possible de se ramener au cas où

$$-2 < z < -1\,, \qquad -1 < y < 0 \qquad 1 < x < 2\,,$$

un tel ensemble est alors dit normal. Remarquons que les trois racines θ, ϕ, ψ vérifient également ces inégalités.
Les lemmes 4 à 9 sont tous du même type : étant donnés un ensemble normal et tel que x, y, z vérifient des inégalités supplémentaires (le plus souvent qui permettent de comparer x, y, z avec θ, ϕ, ψ), Davenport obtient une majoration pour

$$\max(|x-\theta|,\ |y-\phi|,\ |z-\psi|)\,.$$

Par exemple, Davenport considère toutes les inégalités entre x, y, z et θ, ϕ, ψ, il appelle (A) la condition $(x \leq \theta,\ y \leq \phi,\ z \leq \psi)$; (B) la condition $(x \leq \theta,\ y \leq \phi,\ z \geq \psi)$; etc...

[175] Davenport 1938b.

jusqu'à (H), les lemmes 5 et 6 sont alors énoncés de la façon suivante[176] :

« LEMMA 5. In cases (A), (B), (C), (D) we have

$$\max(|x-\theta|,\ |y-\phi|,\ |z-\psi|)\ <\ \varepsilon_2\,. \text{ »}$$

« LEMMA 6. In cases (E), (G) we have (trivially) $x-z \geq \theta-\psi$.
If $x-z<\theta-\psi+\frac{1}{30}$, then

$$\max(|x-\theta|,\ |y-\phi|,\ |z-\psi|)\ <\ \frac{1}{30}+\varepsilon\,. \text{ »}$$

Ces différents lemmes sont démontrés grâce à des manipulations techniques d'inégalités, en faisant appel aux lemmes ou inégalités précédemment démontrés et en utilisant aussi les relations entre θ, ϕ, ψ qui sont les racines d'un polynôme. Nous reproduisons à titre d'exemple la preuve du lemme 6 dont nous venons de donner l'énoncé (voir la figure 4.5).

Cette série de lemmes conduit Davenport au lemme 10 qu'il juge le lemme principal de sa démonstration[177] :

« LEMMA 10. If ξ, η, ζ are real numbers satisfying

$$|(\xi+n)(\eta+n)(\zeta+n)|\ >\ 1-\varepsilon$$

for every integer n, and also satisfying

$$|\xi-\eta|<\theta-\psi-\varepsilon_{10}\,,\quad |\eta-\zeta|<\theta-\psi-\varepsilon_{10}\,, \tag{15}$$

$$|\xi-\zeta|<\theta-\psi+\frac{1}{30}\,, \tag{16}$$

then there exist numbers ξ_1, η_1, ζ_1, which are either of the form

$$\xi_1=\xi+m\,,\ \ \eta_1=\eta+m\,,\ \ \zeta_1=\zeta+m\,,$$

or of the form

$$\xi_1=-\xi+m\,,\ \ \eta_1=-\eta+m\,,\ \ \zeta_1=-\zeta+m\,,$$

where m is a integer such that either

$$\max(|\xi_1-\theta|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\psi|)\ <\ \frac{1}{10}+\varepsilon_{11}\,,$$

or

$$\max(|\xi_1-\psi|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\theta|)\ <\ \frac{1}{10}+\varepsilon_{11}\,.$$

[176] DAVENPORT 1938b p.416 et p.417.
[177] DAVENPORT 1938b p.420.

Proof. In case (E), write $x=\theta+\alpha$, $y=\phi-\beta$, $z=\psi-\gamma$; then

$$\alpha+\gamma<\tfrac{1}{30},$$

and, by Lemma 4, $\beta+\gamma<\alpha+\epsilon$. Hence α, β, γ are all less than $\frac{1}{30}+\epsilon$.

In case (G), write $x=\theta+\alpha$, $y=\phi+\beta$, $z=\psi-\gamma$. Then $\alpha+\gamma<\frac{1}{30}$. By (5),

$$(\theta+\alpha)(-\phi-\beta)(-\psi+\gamma)>(1-\epsilon)\,\theta(-\phi)(-\psi),$$

whence

$$1-\frac{\beta}{(-\phi)}>\frac{1-\epsilon}{\left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)\left(1+\frac{\gamma}{(-\psi)}\right)}$$

$$\geqslant(1-\epsilon)\left(1-\frac{\alpha}{\theta}-\frac{\gamma}{(-\psi)}\right)$$

$$\geqslant 1-\frac{\alpha}{\theta}-\frac{\gamma}{(-\psi)}-\epsilon.$$

Thus

$$\beta<\frac{(-\phi)}{\theta}\alpha+\frac{(-\phi)}{(-\psi)}\gamma+(-\phi)\,\epsilon$$

$$<\alpha+\gamma+\epsilon$$

$$<\tfrac{1}{30}+\epsilon.$$

This establishes the result.

FIG. 4.5 – Preuve du lemme 6.

Also ξ_1, η_1, ζ_1 satisfy

$$\xi_1+\eta_1+\zeta_1 \;>\; -1-\varepsilon\,;$$

and, if

$$\xi_1+\eta_1+\zeta_1 \;<\; -1+2\varepsilon$$

then either

$$\max(|\xi_1-\theta|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\psi|) \;<\; \varepsilon_1\,,$$

or

$$\max(|\xi_1-\psi|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\theta|) \;<\; \varepsilon_1\,.$$ »

Les deux lemmes suivants permettent d'évaluer le volume du domaine convexe D_1 défini par les inégalités

$$|\xi+\eta+\zeta|<3\,,\ \ |\xi-\eta|<\theta-\psi-\varepsilon_{10}\,,\ \ |\eta-\zeta|<\theta-\psi-\varepsilon_{10}\,,\ \ |\xi-\zeta|<\theta-\psi+\frac{1}{30}\,.$$

D'après le lemme 12, le volume de D_1 est strictement plus grand que $56,1$. Ce dernier résultat est ensuite utilisé pour démontrer le théorème 1 : Si $M \geq \frac{1}{7,01}$, alors $M = \frac{1}{7}$. Nous donnons quelques détails sur la preuve de ce théorème car nous retrouverons par la suite certaines des idées qui y sont développées.
Par définition de M, il existe des valeurs L_1^*, L_2^*, L_3^* des trois formes telles que

$$M \ \leq \ |L_1^*\, L_2^*\, L_3^*| \ < \ \frac{M}{1-\varepsilon} \,.$$

Comme $|L_1L_2L_3| \geq M$, il vient :

$$\left| \frac{L_1}{L_1^*}\, \frac{L_2}{L_2^*}\, \frac{L_3}{L_3^*} \right| \ > \ 1 - \varepsilon \,.$$

En posant maintenant $\xi = \frac{L_1}{L_1^*}$, $\eta = \frac{L_2}{L_2^*}$ et $\zeta = \frac{L_3}{L_3^*}$, Davenport obtient un réseau qui vérifient les propriétés suivantes :

(a) $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$ sont des points du réseau.

(b) Pour tous les points du réseau différents de $(0,0,0)$, $|\xi\eta\zeta| > 1 - \varepsilon$. Ainsi pour tous les points du réseau différents de (l,l,l) (où l est un entier),

$$|(n+\xi)(n+\eta)(n+\zeta)| \ > \ 1 - \varepsilon \ ,$$

pour tout n entier.

(c) Le déterminant du réseau a pour valeur absolue

$$\frac{1}{|L_1^*\, L_2^*\, L_3^*|} \ \leq \ \frac{1}{M} \ \leq \ 7,01 \,.$$

Le volume de D_1 est donc strictement plus grand que $56,1$, c'est-à-dire que $8 \times 7,01$. Le théorème de Minkowski implique l'existence d'un point du réseau dans D_1 différent de l'origine et qui n'est pas de la forme (l,l,l), où l est un entier, à cause de la définition de D_1. Par la condition (b) ci-dessus, ce point du réseau vérifie les hypothèses du lemme 10, Davenport obtient ainsi un point du réseau (ξ_1, η_1, ζ_1) tel que

$$\max(|\xi_1-\theta|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\psi|) < \frac{1}{10}+\varepsilon_{11} \ \text{ ou } \ \max(|\xi_1-\psi|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\theta|) < \frac{1}{10}+\varepsilon_{11} \,.$$

En échangeant les rôles de θ, ϕ, ψ et en appliquant la même méthode aux nouveaux domaines ainsi définis, il démontre aussi qu'il existe des points du réseau (ξ_2, η_2, ζ_2) et

(ξ_3, η_3, ζ_3) tels que

$$\max(|\xi_2 - \phi|, |\eta_2 - \psi|, |\zeta_2 - \theta|) < \frac{1}{10} + \varepsilon_{11} \quad \text{ou} \quad \max(|\xi_2 - \phi|, |\eta_2 - \theta|, |\zeta_2 - \psi|) < \frac{1}{10} + \varepsilon_{11},$$
$$\max(|\xi_3 - \psi|, |\eta_3 - \theta|, |\zeta_3 - \phi|) < \frac{1}{10} + \varepsilon_{11} \quad \text{ou} \quad \max(|\xi_3 - \theta|, |\eta_3 - \psi|, |\zeta_3 - \phi|) < \frac{1}{10} + \varepsilon_{11}.$$

Davenport justifie ensuite que ces inégalités ne sont pas toutes compatibles entre elles. En fait, seuls deux cas peuvent se présenter. Soit c'est la première inégalité pour chaque point qui est vérifiée, soit c'est la seconde pour les trois points.
Il considère maintenant le point (ξ_4, η_4, ζ_4) défini par

$$\xi_4 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3\,, \qquad \eta_4 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3\,, \qquad \zeta_4 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3\,.$$

Dans les deux cas décrits précédemment, comme $\theta + \phi + \psi = -1$, il vient

$$\max(|\xi_4 + 1|,\ |\eta_4 + 1|,\ |\zeta_4 + 1|) \ < \ \frac{3}{10} + 3\,\varepsilon_{11}\,,$$

ce qui permet de montrer que

$$|(\xi_4 + 1)(\eta_4 + 1)(\zeta_4 + 1)| \ < \ 1 - \varepsilon\,.$$

Cette dernière inégalité implique $\xi_4 = \eta_4 = \zeta_4 = -1$ sinon elle contredirait la condition (b). Ceci permet à Davenport de vérifier les hypothèses de la deuxième partie du lemme 10 qui donne alors

$$\max \left\{ \begin{array}{lll} |\xi_1 - \theta|, & |\eta_1 - \phi|, & |\zeta_1 - \psi|, \\ |\xi_2 - \phi|, & |\eta_2 - \psi|, & |\zeta_2 - \theta|, \\ |\xi_3 - \psi|, & |\eta_3 - \theta|, & |\zeta_3 - \phi| \end{array} \right\} \ < \ \varepsilon_1\,.$$

La même inégalité en échangeant θ et ψ est aussi vérifiée. Après ces résultats préliminaires, Davenport passe à la preuve du théorème 1, il pose d'abord

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \theta & \phi & \psi \\ \phi & \psi & \theta \\ \psi & \theta & \phi \end{vmatrix}.$$

D'une part, les relations entre θ, ϕ et ψ permettent de montrer que $D = 7$ et d'autre part les inégalités précédentes impliquent

$$|\Delta - D| = |\Delta - 7| \ < \ \varepsilon_{14}\,.$$

Comme (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) et (ξ_3, η_3, ζ_3) sont trois points du réseau, Δ est un multiple du déterminant du réseau $\dfrac{1}{|L_1^* L_2^* L_3^*|}$. Mais $|L_1^* L_2^* L_3^*| < \dfrac{M}{1-\varepsilon}$, or par un théorème de Minkowski $M \leq \dfrac{2}{9}$, d'où

$$\frac{2}{|L_1^*\, L_2^*\, L_3^*|} \;>\; 9\,(1-\varepsilon) \;>\; 7+\varepsilon_{14}\ , \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Or $7-\varepsilon_{14} < \Delta < 7+\varepsilon_{14}$, Davenport en déduit que

$$\Delta = \frac{1}{|L_1^*\, L_2^*\, L_3^*|}\ .$$

Finalement,

$$\left|\frac{1}{|L_1^*\, L_2^*\, L_3^*|} - 7\right| \;<\; \varepsilon_{14} \quad \text{et} \quad \frac{1-\varepsilon}{M} \;<\; \frac{1}{|L_1^*\, L_2^*\, L_3^*|} \;<\; \frac{1}{M}\ ,$$

donc $M = \frac{1}{7}$. Dans la fin de la démonstration, Davenport étudie en particulier le cas où $M = \frac{1}{7}$.

Cet article commence donc par l'énoncé du théorème à démontrer. La preuve se développe ensuite à travers une série de résultats intermédiaires dont la fonction n'est pas explicitée au moment où ils sont démontrés. Chacune de ces preuves intermédiaires renvoie à ce qui a été montré précédemment. À aucun moment dans la preuve Davenport ne présente une heuristique pour sa méthode. Comme le remarque Rogers dans la citation donnée page 269, aucune interprétation géométrique n'est proposée dans l'article, ni aucune allusion à la possibilité d'interpréter géométriquement certains passages de la démonstration. Le seul endroit où nous rencontrons un peu de vocabulaire géométrique est celui où Davenport doit évaluer le volume de D_1 mais il s'agit d'un point purement technique de la preuve qui fait davantage intervenir le calcul intégral que la géométrie.

Nous passons plus rapidement sur le cas où deux des formes dans le produit sont à coefficients complexes conjugués, cas dont la première démonstration est publiée en 1939 [178]. Davenport souligne d'ailleurs lui-même que la méthode employée est proche de celle du cas réel :

> « The method used in this paper is similar to that of (II)[179] only in so far as the first steps in the argument are concerned. The subsequent analysis,

[178] Davenport 1939b.
[179] C'est-à-dire la méthode utilisée dans le cas réel.

though elementary, is more complicated and of a different character[180]. »

Une autre raison pour laquelle nous ne détaillons pas cette preuve est que nous ne disposons pas de sources non publiées contenant une preuve ou des commentaires précis à comparer avec l'article publié comme c'est le cas avec le cas des formes réelles.
Nous pouvons cependant observer la différence avec l'exposition faite pour les formes réelles relevée par Rogers (page 269). La présentation est en effet davantage géométrique, en particulier contrairement à ce qu'il fait dans le cas réel, Davenport illustre sa preuve par un dessin (voir la figure 4.6).

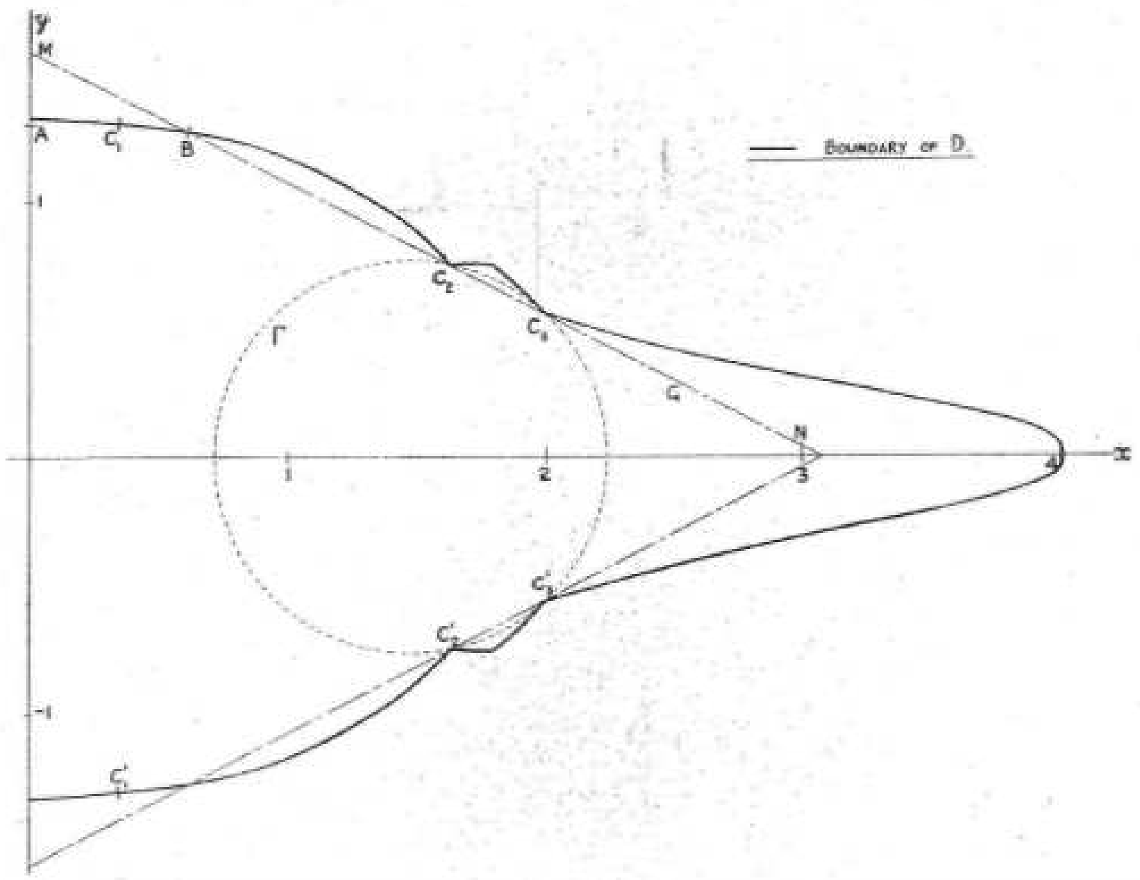


Fig. 4.6 – Illustration pour la preuve du cas complexe.

Comme dans l'article précédent, la démonstration du cas complexe comporte plusieurs lemmes ou théorèmes intermédiaires et le vocabulaire employé dans certains d'entre eux témoigne aussi de la place un peu plus grande accordée à la géométrie, par exemple[181] :

« Theorem 3. If (x_0, y_0) is any point of Q, and $0 < \lambda < \frac{1}{2}\sqrt{23}$, then the

[180] Davenport 1939b p.99.
[181] Davenport 1939b p.106.

straight line

$$xy_0 - yx_0 = \lambda$$

meets the boundary of E in exactly two points, say (x_1, y_1), (x_2, y_2), and these satisfy the inequality

$$|y_1 - y_2| \ > \ y_0 \ . \text{ »}$$

b) Commentaires et preuves non publiés

Les sources utilisées ici sont des notes non publiées de Davenport pour des cours ou des exposés qui ne sont pas toujours datées mais qui sont très certainement pour la plupart des années 1940. Nous utilisons aussi la conférence faite à Bruxelles en 1946 déjà mentionnée.

Dans ces notes, Davenport commence par revenir sur le cas du produit de deux formes linéaires homogènes. La preuve qu'il en donne est celle qui, d'après lui, l'a conduit à la démonstration pour le produit de trois formes. Notons $L_1 = ax + by$, $L_2 = cx + dy$ deux formes linéaires à coefficients réels et de déterminant $ad - bc = 1$, il existe alors un couple d'entiers (x, y), différent de $(0, 0)$, pour lequel

$$|L_1 \, L_2| \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

M désigne toujours la borne inférieure de $|L_1 L_2|$ pour des valeurs entières non nulles des variables.

« First step, very simple and natural, helps with many problems. One might call it the operation of standardising the lattice[182] ».

Ce qui est considéré par Davenport comme la première étape a été rencontrée dans les démonstrations publiées (voir par exemple page 275). Pour tout δ strictement positif, il existe un couple d'entiers (x^*, y^*), différent de $(0, 0)$, tel que

$$M \ \leq \ |L_1^* \, L_2^*| \ < \ M + \delta \ .$$

Davenport écrit $|L_1^* \, L_2^*| = \frac{M}{1-\varepsilon}$ avec $0 \leq \varepsilon < \delta$. Le réseau « standardisé » est obtenu en posant $\xi = \frac{L_1}{L_1^*}$ et $\eta = \frac{L_2}{L_2^*}$ avec les variables x, y qui parcourent les entiers. Ce réseau, dont le déterminant est $\frac{1-\varepsilon}{M}$, possède les propriétés suivantes :

(a) $(1, 1)$ est un point du réseau,

(b) pour tous les points du réseau différents de l'origine $|\xi \, \eta| \geq 1 - \varepsilon$.

[182] Davenport 1946a.

> « This suggests the investigation of the possible places in which lattice points can lie, by drawing the hyperbolae $|(\xi - m)(\eta - m)| < 1 - \varepsilon$[183]. »

De la même façon dans la conférence de Bruxelles, Davenport décrit ainsi la suite de la démonstration :

> « Nous nous demandons dans quelles parties du plan peuvent se trouver des points du réseau. Il y a des points du réseau en les points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, ..., et tout autre point du réseau doit satisfaire à
>
> $$|xy| \geq 1\,, \qquad |(x-1)(y-1)| \geq 1\,, \qquad |(x+1)(y+1)| \geq 1\,,\ \ldots$$
>
> Si l'on trace les aires hyperboliques, d'où les points du réseau sont exclus, on trouve qu'elles couvrent toute la bande donnée par $|x - y| < \sqrt{5}$. Après s'en être rendu compte, ce fait se démontre facilement par l'arithmétique. Ainsi le rectangle défini par
>
> $$|x + y| < 2\,, \qquad |x - y| < \sqrt{5}$$
>
> ne contient aucun point du réseau sauf 0[184]. »

L'aire du rectangle défini par $|\xi + \eta| < 2$ et $|\xi - \eta| < \sqrt{5} - \varepsilon$ est $4(\sqrt{5} - \varepsilon)$, comme il ne contient pas de point du réseau le théorème de Minkowski implique

$$4\,(\sqrt{5} - \varepsilon) \ \leq\ 4\,\frac{1 - \varepsilon}{M}\ ,$$

ce qui permet de conclure.

Nous voudrions souligner plusieurs points sur lesquels nous reviendrons. Contrairement aux preuves publiées l'exposé précédent comporte du vocabulaire géométrique. Ce vocabulaire, qui est employé de manière assez qualitative (« dans quelles parties du plan »...), intervient plutôt dans la phase de la recherche de la démonstration. C'est après avoir observé une propriété sur le dessin que la preuve arithmétique ou analytique peut être développée. Ces deux constations sur la démarche de Davenport vont apparaître encore plus clairement avec sa présentation du cas du produit de trois formes.

[183] Notes de cours Davenport (WL), C 179.

[184] Davenport 1946b. Les notations utilisées dans cette conférence ne sont pas les mêmes que celles des notes de cours reprises auparavant. ξ, η sont remplacées ici par x, y. De plus, dans cet exposé Davenport suppose que M est atteinte et ε n'apparaît donc pas dans les inégalités. Le raisonnement est cependant identique en remplaçant le 1 des inégalités par $1 - \varepsilon$ et $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5} - \varepsilon$.

Comme dans le cas de deux formes, la première étape consiste « standardiser le réseau ». Davenport pose donc

$$|L_1^* \, L_2^* \, L_3^*| = \frac{M}{1-\varepsilon} \,, \qquad \xi = \frac{L_1}{L_1^*} \,, \qquad \eta = \frac{L_2}{L_2^*} \,, \qquad \zeta = \frac{L_3}{L_3^*} \,.$$

Rappelons que ce réseau est tel que $(1,1,1)$ est un point du réseau et tous les points du réseau différents de l'origine sont tels que

$$|\xi \, \eta \, \zeta| \; \geq \; 1 - \varepsilon \,.$$

Davenport décrit la méthode employée pour élaborer sa démonstration de la manière suivante[185] :

> « In examining the portions of space in which lattice points can lie, it is sufficient to consider points satisfying $0 \, \leq \, \xi + \eta + \zeta \, \leq \, 3/2$. When I first attacked the problem, I drew diagrams on triangulated graph paper to represent the section of space by the planes $\xi + \eta + \zeta \; = \; 0, \; \frac{1}{2}, \; 1, \; \frac{3}{2}$. These diagrams indicated that lattice points could lie in small regions surrounding the 12 points (θ, ϕ, ψ) and all permutations, $(-\theta, -\phi, -\psi)$ and all permutations, or in certain other regions considerably further away from the line $\xi = \eta = \zeta$. It follows that there are no lattice points other than O in the hexagonal prism
>
> $$|\xi + \eta + \zeta| \; < \; 3 \,, \qquad \max(|\xi - \eta|, \; |\eta - \zeta|, \; |\zeta - \xi|) \; < \; \theta - \psi - \varepsilon_1 \,. \text{ »}$$

L'évaluation du volume de ce prisme, puis l'application du théorème de Minkowski permet à Davenport de montrer que

$$M \; < \; \frac{1}{6{,}96\ldots} \,.$$

Davenport présente de façon générale cette même méthode dans la conférence de Bruxelles[186] :

> « La première idée qui se présente, par analogie avec le cas précédent[187], est de trouver un domaine convexe qui ne peut contenir un point du réseau autre que O, à volume aussi grand que possible, et d'y appliquer le théorème fondamental de Minkowski. Ceci peut se faire, mais je me suis convaincu qu'il n'existe pas de tel domaine qui permette de démontrer que $\frac{1}{M} \geq 7$. On peut démontrer de cette façon que $\frac{1}{M} > 6{,}96\ldots$, mais cela ne suffit pas. »

[185]Notes de cours DAVENPORT (WL), C 179.
[186]DAVENPORT 1946b p.9.
[187]C'est-à-dire le cas du produit de deux formes linéaires.

Il explique ensuite comment il a surmonté cette difficulté[188] :

> « Au moyen d'un long raisonnement, à la fois compliqué et délicat, qui emploie plusieurs domaines convexes, j'ai réussi à atteindre le résultat désiré. »

Le raisonnement auquel Davenport fait allusion ici est celui de son article DAVENPORT 1938b dans lequel il applique le théorème de Minkowski à plusieurs domaines convexes afin de déterminer des points du réseau qui vérifient certaines inégalités. Ces inégalités interprétées géométriquement correspondent à la situation de ces points dans l'espace. C'est dans ces termes qu'il décrit la modification de sa méthode pour améliorer l'estimation $M < \frac{1}{6{,}96\ldots}$ et obtenir $M \leq \frac{1}{7}$:

> « Here the method seemed likely to come to a full stop. But further inspection of the diagrams showed that a lattice point near (θ, ϕ, ψ) must also satisfy $\xi+\eta+\zeta \geq -1$ (neglecting ε). By considering the expanded hexagonal prisms, typified by
>
> $$|\xi+\eta+\zeta| < 3\,, \quad |\xi-\eta| < \theta-\psi\,, \quad |\eta-\zeta| < \theta-\psi\,, \quad |\zeta-\xi| < \theta-\psi+\frac{1}{30}\,,$$
>
> I was able to establish the existence of lattice points near each of (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) and lying within a distance $\frac{1}{10}$ in each coordinate from these. The sum of these three lattice points lies near $(-1, -1, -1)$ and therefore is $(-1, -1, -1)$. The three points are therefore actually at (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) if we neglect ε, and in this way the determinant of the lattice is ≥ 7, ie $M \leq \frac{1}{7}$.
>
> The formal proof of the various points inferred from the diagrams, and the formal presentation of the arguments, is somewhat long and tedious[189]. »

Chaque étape de la démonstration que Davenport décrit dans cette citation a été rencontrée dans la preuve publiée. En particulier, le prisme dont il est question est le domaine convexe D_1 dont le volume est évalué dans l'article (voir page 274). Les points du réseau situés près des points (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ), à une distance au plus $\frac{1}{10}$ sont les points (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) et (ξ_3, η_3, ζ_3). Ces trois points, qui sont obtenus par l'application du lemme 10, sont caractérisés par des inégalités du type (voir page 275)

$$\max(|\xi_1-\theta|,\ |\eta_1-\phi|,\ |\zeta_1-\psi|) < \frac{1}{10} + \varepsilon_{11}\,.$$

La somme de ces trois points est (ξ_4, η_4, ζ_4), le fait que ce point est proche de $(-1, -1, -1)$ est traduit par les inégalités (voir page 276)

$$\max(|\xi_4+1|,\ |\eta_4+1|,\ |\zeta_4+1|) < \frac{3}{10} + 3\,\varepsilon_{11} \quad \text{et} \quad |(\xi_4+1)(\eta_4+1)(\zeta_4+1)| < 1-\varepsilon\,,$$

[188] DAVENPORT 1946b p.9.
[189] Notes de cours DAVENPORT (WL), C 179.

ce qui permet effectivement à Davenport de montrer que $(\xi_4, \eta_4, \zeta_4) = (-1, -1, -1)$.
Ainsi, que cela soit dans les démonstrations publiées ou les commentaires faits sur ces preuves dans d'autres circonstances nous pouvons observer les mêmes étapes dans le raisonnement. Cependant ces étapes ne sont pas décrites dans les mêmes termes. Comme nous avons commencé à le dire les commentaires non publiés sont exprimés avec un vocabulaire géométrique : « on trace des aires hyperboliques », « the section of space by the planes », « no lattice points other than O in the hexagonal prism », « existence of lattice points near each of... », etc... Il s'agit en particulier de localiser des points du réseau le plus précisément possible dans des domaines du plan ou de l'espace. L'équivalent analytique ou arithmétique de cette question est étudié dans les articles publiés à travers les inégalités vérifiées par certains points du réseau.

Une première explication pour ces choix de présentation est à rechercher dans les objectifs et les fonctions différentes qu'elles doivent remplir. Cela rappelle d'ailleurs ce qui avait été dit à propos de Minkowski quand il exposait son travail à Hermite ou à un public moins spécialisé en théorie des nombres. D'un côté nous trouvons des preuves publiées dans des journaux spécialisés. Davenport s'adresse alors à des mathématiciens confirmés en utilisant un langage arithmétique, son objectif est bien entendu de donner une démonstration achevée et rigoureuse de ses résultats. D'un autre côté, nous avons relevé l'utilisation de la géométrie d'abord dans une conférence. Nous ne savons pas à qui Davenport s'adressait dans cette conférence mais les impératifs de l'exposé oral (comme par exemple la durée) peuvent peut être expliquer la différence de présentation. Un exposé de tous les arguments, avec de nombreux lemmes très techniques tel que nous l'avons rencontré dans ses publications et qu'il juge lui même comme pouvant être longue et ennuyeuse, n'est pas adaptée à cette situation de communication orale. Il préfère alors l'emploi de la géométrie. Mais ce que Davenport utilise alors c'est davantage un vocabulaire de nature géométrique avec lequel il décrit de manière qualitative les idées directrices de ses démonstrations.
Les extraits que nous avons cités sont aussi issus de notes de cours. À nouveau il s'agit donc de textes qui doivent occuper une autre fonction que des articles de recherche. Le souci pédagogique y est plus important et la priorité est donnée à l'expression géométrique des problèmes. De plus, dans ses notes de cours, Davenport fait explicitement référence à des dessins qui représentent les questions étudiées. Malheureusement ces illustrations n'ont pas été reproduites, mais elles étaient très certainement utilisées lors des cours. Ainsi la traduction géométrique des preuves donne à voir à travers le dessin les problèmes posés, elle permet aussi d'en faire une description. Nous retrouvons donc la dimension visuelle de la géométrie qui est mis en oeuvre avec des objectifs pédagogiques et de communication.

Avec cette première explication qui consiste à regarder les circonstances différentes pour lesquelles les discours sont produits, nous pouvons aussi remarquer que les vocabulaires arithmétique et géométrique sont employés à des moments différents du processus de recherche.
La géométrie intervient en amont, elle permet de trouver une méthode pour démontrer le résultat qui est étudié. Il s'agit d'une fonction des dessins que Davenport met particulièrement en avant : « When I first attacked the problem, I drew diagrams [...] *These diagrams indicated* that lattice points could lie in small regions », « Here the method seemed likely to come to a full stop. But further inspection of *the diagrams showed* that... », « The formal proof of the various points *inferred from the diagrams*... ».
Ces considérations géométriques aident donc à déterminer les étapes de la démonstration et fournissent une heuristique, puis dans un deuxième temps l'arithmétique doit venir valider ce qui a été constaté sur les dessins : « Après s'en être rendu compte, se fait se démontre facilement par l'arithmétique ». Deux fonctions distinctes semblent alors se dessiner pour la géométrie et l'arithmétique. La géométrie interviendrait dans la phase de recherche et découverte de la preuve alors que l'arithmétique doit ensuite sanctionner par un raisonnement rigoureux ce qui a été observé géométriquement. Elle apparaît ainsi davantage dans la justification du travail de recherche.
Les mêmes observations peuvent être faites à propos d'une preuve plus simple de l'inégalité $M \leq \frac{1}{7}$ que Davenport publie en 1941.

c) Une simplification de la démonstration pour le produit de trois formes linéaires à coefficients réels

Dans un article publié en 1941 [190], Davenport propose une preuve qu'il juge plus simple de l'inégalité $M \leq \frac{1}{7}$ et à nouveau dans ses notes de cours il souligne l'origine géométrique de cette preuve :

> « I have since obtained a much simpler proof, which is tantamount to using the circular cylinder whose axis is $\xi = \eta = \zeta$ and whose surface passes through the 12 points mentioned above[191]. »

Cette nouvelle démonstration repose sur un lemme que Davenport énonce et démontre au début de son article[192] :

> « Suppose that $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{10}$. Let α_1, α_2, α_3 be real numbers such that

$$(2) \qquad |(n-\alpha_1)(n-\alpha_2)(n-\alpha_3)| \geq 1-\varepsilon$$

[190] Davenport 1941a.
[191] Notes de cours Davenport (WL), C 179.
[192] Davenport 1941a p.98.

for all integers n. Then

$$(3) \qquad S = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \ \geq\ 14 - 10\,\varepsilon\,.\ \text{»}$$

Comme l'énoncé la preuve de ce lemme est complètement arithmétique (voir la figure 4.7) et aucun commentaire ne fait le lien entre le problème à résoudre et les quantités introduites dans le lemme (en particulier S).
Là encore ce type de commentaires est à rechercher dans des textes non publiés de Davenport. En fait l'idée sous-jacente à ce lemme est évoquée dans un extrait que nous avons déjà cité sans qu'elle soit dans un premier temps exploitée par Davenport. Il remarquait alors que les points du réseau « standardisé » ne peuvent être que près des points dont les coordonnées sont formées à partir des solutions de l'équations $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ (ce qui a été approfondi dans la preuve précédente), ou bien « in certain other regions considerably further away from the line $\xi = \eta = \zeta$ [193] ». Cette remarque permet de faire le lien entre le théorème que Davenport souhaite démontré et le lemme précédent. En effet, si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un point du réseau standardisé qui n'est pas de la forme (k, k, k), il doit vérifier la condition (2) du lemme. Ce lemme porte bien sur les points du réseau standardisé et Davenport donne précisément le sens de la quantité S dans sa conférence à Bruxelles[194] :

> « nous pouvons nous attendre à ce qu'il n'y aura pas de points du réseau, sauf ceux de la forme (k, k, k) dans un cylindre infini autour de la ligne $x = y = z$. Ceci suggère que nous pourrions peut-être démontrer quelque chose concernant le minimum de
>
> $$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\ ,$$
>
> expression qui est une mesure de la distance d'un point à la dite ligne[195] pour tous les points du réseau qui ne sont pas de la forme (k, k, k). »

Le lemme permet donc en fait d'estimer quantitativement l'éloignement des points du réseau à la droite $x = y = z$ constaté sur les dessins.
Nous gardons ici les mêmes notations qu'auparavant (voir page 281). La première étape de la démonstration consiste à se ramener à

$$L_1 = L_1^*\,(u + \alpha_1 v + \beta_1 w)\,, \quad L_2 = L_2^*\,(u + \alpha_2 v + \beta_2 w)\,, \quad L_3 = L_3^*\,(u + \alpha_3 v + \beta_3 w)\,,$$

ce qui est fait en choisissant une base du réseau dont le premier vecteur est (L_1^*, L_2^*, L_3^*).
À cause de la définition de L_1^*, L_2^*, L_3^*, d'une part pour tout les triplets d'entiers (u, v, w)

[193] Les points de la forme (k, k, k), avec k entier, mis à part.
[194] Davenport 1946b p.9.
[195] Cette distance est exactement $\frac{1}{3}\,[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$.

Proof. The hypothesis and conclusion are unaffected if $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are permuted, or if $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are replaced by $-\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1$, or if $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are replaced by $\alpha_1+k, \alpha_2+k, \alpha_3+k$, where k is any integer. By employing these three operations successively, we can ensure that

$$\alpha_3 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1, \quad [\alpha_2]-[\alpha_3] \leqslant [\alpha_1]-[\alpha_2], \quad -1 < \alpha_2 < 0.$$

Case 1. Suppose that $[\alpha_2]-[\alpha_3]=0$, so that $-1<\alpha_3<0$. By (2),

$$|\alpha_1||\alpha_2||\alpha_3| \geqslant 1-\epsilon, \quad |\alpha_1+1|(1-|\alpha_2|)(1-|\alpha_3|) \geqslant 1-\epsilon.$$

Now $|\alpha_2|(1-|\alpha_2|) \leqslant \frac{1}{4}$, and similarly for α_3. Hence

$$|\alpha_1||\alpha_1+1| \geqslant 16(1-\epsilon)^2,$$

whence $\alpha_1 > 3$. Thus

$$S > 2\alpha_1^2 > 18.$$

Case 2. Suppose that $[\alpha_2]-[\alpha_3]=1$ and $[\alpha_1]-[\alpha_2]=1$, so that

$$-2 < \alpha_3 < -1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_1 < 1.$$

Let $f(n)=(n-\alpha_1)(n-\alpha_2)(n-\alpha_3)$. Then, by (2),

$$f(1) \geqslant 1-\epsilon, \quad -f(0) \geqslant 1-\epsilon, \quad f(-1) \geqslant 1-\epsilon, \quad -f(-2) \geqslant 1-\epsilon.$$

But since $f(n)$ is a cubic polynomial with highest coefficient 1,

$$f(1)-3f(0)+3f(-1)-f(-2)=6.$$

Hence $6 \geqslant 8(1-\epsilon)$, which is impossible.

Case 3. In the remaining case, we have $[\alpha_2]-[\alpha_3] \geqslant 1$, $[\alpha_1]-[\alpha_2] \geqslant 2$, so that

$$\alpha_3 < -1, \quad -1 < \alpha_2 < 0, \quad 1 < \alpha_1.$$

Let $f(n) = n^3+sn^2-tn-p$. By (2),

$$-f(1) = -1-s+t+p \geqslant 1-\epsilon,$$
$$-f(0) = p \geqslant 1-\epsilon,$$
$$f(-1) = -1+s+t-p \geqslant 1-\epsilon.$$

By adding the third of these to the first or second, we obtain

$$t \geqslant 2-\epsilon, \quad s+t \geqslant 3-2\epsilon.$$

We have

$$S = 2(\Sigma\alpha_1)^2 - 6\Sigma\,\alpha_1\alpha_2 = 2s^2+6t.$$

Put $t = 2-\epsilon+\xi$, $s+t = 3-2\epsilon+\eta$, so that $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$. We find

$$S = 14-10\epsilon+2\epsilon^2+2(\eta-\xi)^2+4(1-\epsilon)\eta+(2+4\epsilon)\xi$$
$$\geqslant 14-10\epsilon.$$

FIG. 4.7 – Preuve du lemme.

différent de $(0,0,0)$

$$|(u+\alpha_1 v+\beta_1 w)(u+\alpha_2 v+\beta_2 w)(u+\alpha_3 v+\beta_3 w)| \;\geq\; 1-\varepsilon \qquad (4.11)$$

et d'autre part le déterminant des trois formes $u+\alpha_1 v+\beta_1 w$, $u+\alpha_2 v+\beta_2 w$, $u+\alpha_3 v+\beta_3 w$ est égal à $\dfrac{1-\varepsilon}{M}$. Davenport introduit ensuite la forme quadratique

$$(\alpha_1 v+\beta_1 w-\alpha_2 v-\beta_2 w)^2+(\alpha_1 v+\beta_1 w-\alpha_3 v-\beta_3 w)^2+(\alpha_2 v+\beta_2 w-\alpha_3 v-\beta_3 w)^2 = Av^2+Bvw+Cw^2\,.$$

Elle peut aussi s'écrire $X^2+(X+Y)^2+Y^2$ où $X=(\alpha_1-\alpha_2)v+(\beta_1-\beta_2)w$ et $Y=(\alpha_2-\alpha_3)v+(\beta_2-\beta_3)w$. Le déterminant des formes X, Y est $\frac{1-\varepsilon}{M}$ et le discriminant de $X^2+(X+Y)^2+Y^2$ est 12, Davenport en déduit le discriminant de la forme quadratique précédente

$$4AC-B^2 = 12\left(\frac{1-\varepsilon}{M}\right)^2.$$

Il utilise ensuite la réduction des formes quadratiques : par une substitution unimodulaire, il se ramène à

$$|B| \;\leq\; A \;\leq\; C\,,$$

avec l'expression du discriminant cette inégalité permet de montrer que

$$3A^2 \;\leq\; 12\left(\frac{1-\varepsilon}{M}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$A \;\leq\; 2\,\frac{1-\varepsilon}{M}\,.$$

En prenant $v=-1$ et $w=0$ dans l'inégalité (4.11), nous voyons que α_1, α_2, α_3 vérifient l'hypothèse du lemme, ainsi

$$A = S \;\geq\; 14-10\,\varepsilon\,,\text{ ce qui implique }\; 2\,\frac{1-\varepsilon}{M} \;\geq\; 14-10\,\varepsilon\,,$$

finalement $M \;\leq\; \frac{1}{7}$. Cette preuve concerne les formes linéaires réelles et Davenport remarque

> « The above simple proof (real case) seems to have no analogue in the complexe case[196]. »

De plus, il considère que

> « This proof makes no use of the geometry of numbers[197] ».

[196] Notes de cours Davenport (WL), C 179.
[197] Notes de cours Davenport (WL), C 179.

Ces deux citations suggèrent que dans ce cadre la géométrie des nombres est plus générale car elle permet de démontrer avec les mêmes idées les cas réel et complexe, nous y reviendrons. Mais que signifie ici « géométrie des nombres » pour Davenport ?
Dans la citation précédente, quand il dit que sa preuve n'utilise pas la géométrie des nombres ce qu'il met en avant c'est que le théorème de Minkowski n'intervient pas. Quand il explique sa démonstration à la conférence de Bruxelles, il fait la même remarque mais de manière un peu plus précise

> « On verra que ce lemme en soi n'a rien à faire avec la géométrie des nombres[198]. »

Seul le lemme ne serait pas de la géométrie des nombres et donc la seconde partie de la preuve en ferait partie. Cette deuxième partie utilise la réduction des formes quadratiques binaires, question qui est liée au minimum de ces formes pour des valeurs entières des variables. Or pour Davenport, ce type de problème appartient à la géométrie des nombres, cela est confirmé par d'autres définitions qu'il donne de la discipline[199]

> « In the geometry of numbers, we treat a general class of problems in number theory by methods which are suggested by a geometrical interpretation. The problems in question relate to "Diophantine inequalities", ie inequalities which are to be satisfied by integral values of the variables. »

Ainsi l'utilisation de l'expression *géométrie des nombres* est locale, elle désigne parfois un des théorèmes de Minkowski sur les convexes ou bien la problématique plus générale de la résolution d'inégalités diophantiennes. Dans ce cadre, les questions sont interprétées géométriquement et la géométrie joue le rôle d'un guide pour l'élaboration de méthodes permettant de résoudre le problème.

4.2.1.4 Une preuve de Mordell pour le produit de deux formes linéaires homogènes

Mordell ne se contente pas de suggérer la question du produit des formes linéaires homogènes à Davenport, il contribue aussi à son étude. En 1938, il publie une nouvelle preuve pour le produit de deux formes linéaires homogènes[200]. Il redémontre que pour deux formes linéaires homogènes réelles L et M, de déterminant 1, il existe un couple d'entiers (x, y), différent de $(0, 0)$, tel que

$$|LM| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

[198] Davenport 1946b p.10.
[199] Résumé d'un cours sur la géométrie des nombres, Berkeley, 24 janvier 1948, Davenport (WL), C 165.
[200] Mordell 1938.

Nous avons dit que de nombreuses démonstrations de ce résultat ont déjà été données par exemple par Korkine et Zolotareff, Hurwitz[201] et plus récemment Davenport[202]. Mordell justifie donc l'intérêt d'en proposer une nouvelle preuve

> « Though many proofs have been given, it may be worth while giving another which seems to involve a minimum of calculation[203]. »

Dans cette preuve, Mordell commence par définir les formes U, V par

$$\begin{aligned} \lambda\,(\theta-\phi)^{\frac{1}{2}}L &= U+\theta V \\ \lambda^{-1}\,(\theta-\phi)^{\frac{1}{2}}M &= U+\phi V\ , \end{aligned}$$

où λ est un réel non nul, $2\theta = 3+\sqrt{5}$ et $2\phi = 3-\sqrt{5}$. Mordell en déduit que

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\,LM &= U^2+3UV+V^2 \\ &= (w^2+3w+1)\ \max(U^2,V^2)\,. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Minkowski, il existe des valeurs entières et non nulles des variables pour lesquelles

$$|U|\ \le\ 1\,, \qquad |V|\ \le\ 1\,.$$

Mordell sépare ensuite le cas où le produit UV est négatif et le cas où $U > 0$, $V > 0$. Par exemple, dans le premier cas, Mordell remarque que si $-1 \le w \le 0$ alors $|w^2+3w+1| \le 1$, ce qui implique le résultat.
Bien qu'il ne fasse pas de commentaire sur ce point, nous pouvons penser que cet article fait partie des recherches de nouvelles approches pour obtenir des résultats sur le produit de plus de deux formes. Ce travail reste cependant isolé ce qui n'est pas le cas avec la méthode que Mordell propose par la suite. Cette méthode consiste à étudier le minimum des formes cubiques binaires.

4.2.2 L'étude du produit de trois formes linéaires homogènes par les formes cubiques binaires

4.2.2.1 Lien entre les deux problèmes

> « The present writer well recalls the time, early in 1940, when Mordell told him that he was working on a most interesting problem in the geometry of numbers, which would throw new light on recent results concerning the

[201] Hurwitz 1891. La preuve de Hurwitz utilise les fractions continues.
[202] Davenport 1938a.
[203] Mordell 1938 p.186.

product of three homogeneous linear forms[204]. »

Le problème intéressant auquel Davenport fait référence est celui du minimum des formes cubiques binaires pour des valeurs entières et non nulles de ses variables. Il indique que Mordell commence à travailler sur cette question en liaison avec le produit de trois formes linéaires homogènes. Explicitons tout de suite le rapport entre ces deux problèmes. Mordell écrit une forme cubique binaire

$$f(x,y) \;=\; ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \;,$$

où a, b, c, d sont des nombres réels. La quantité $D = 27a^2d^2 - 18abcd - b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3$ est appelée déterminant de la forme f. La forme cubique peut toujours se factoriser en un produit de trois facteurs linéaires

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^{3}(\alpha_i x + \beta_i y)\,.$$

Quand le déterminant D est strictement négatif, les trois facteurs du produit précédent sont réels, quand il est strictement positif deux de ces facteurs sont à coefficients complexes et conjugués. Enfin, si D est nul, au moins deux facteurs du produit sont identiques[205]. L'idée de Mordell pour étudier le minimum du produit de trois formes linéaires homogènes de trois variables est donc d'abord de se ramener à des formes de deux variables, puis d'utiliser une estimation du minimum de ces formes. C'est bien de cette manière que Davenport décrit la démarche de Mordell dans des notes de cours :

> « Essence of Mordell's result is to establish first an inequality for the minimum of three linear forms in two variables. Say we put $w = 0$ in X, Y, Z
>
> $$XYZ = (\alpha_{11}u + \alpha_{12}v)(\alpha_{21}u + \alpha_{22}v)(\alpha_{31}u + \alpha_{32}v) = f(u,v)$$
>
> is a binary cubic forms[206] ».

Ainsi déterminer une borne pour le minimum des formes cubiques binaires doit donner une borne pour le produit de trois formes de deux variables et par suite permettre de retrouver une estimation pour le produit de trois formes de trois variables.

4.2.2.2 Enoncés des principaux résultats

Mordell commence à travailler sur le minimum des formes cubiques binaires en 1940. Cependant l'article qui correspond à ses premières recherches sur cette question

[204] Davenport 1964 p.9.
[205] Pour quelques détails supplémentaires voir par exemple Cassels 1959 p.51.
[206] Davenport (WL), C 180.

n'est publié qu'en 1945 dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*[207]. Une courte note dans laquelle les théorèmes sont énoncés sans démonstration est quand même publiée dès 1941 dans le *Journal of the London mathematical society*[208].
Nous notons toujours D le déterminant de la forme cubique binaire à coefficients réels

$$f(x,y) \;=\; ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \;.$$

Pour D différent de 0, Mordell aborde le problème du point de vue de la détermination d'une constante l telle qu'il existe des entiers x, y qui ne sont pas nuls tous les deux et qui vérifient

$$|f(x,y)| \;\leq\; \left(\frac{|D|}{l}\right)^{\frac{1}{4}} \;.$$

Mordell indique que les formes cubiques binaires avaient déjà été étudiées au XIX^e siècle par Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, Peter Friedrich Arndt et Charles Hermite[209]. Il décrit leurs contributions à cette théorie en disant par exemple que Arndt donna une valeur de l pour D strictement négatif en 1857 [210] qui fut retrouvée en 1859 par Hermite. Ce dernier détermina aussi une valeur de l qui convient dans le cas où D est strictement positif. Cependant le cadre théorique dans lequel ces mathématiciens du XIX^e siècle travaillent sur ce problème n'est pas la question de la détermination du minimum mais celle plus générale de la réduction des formes cubiques binaires. Leurs résultats ne sont donc pas exprimés comme le fait Mordell[211]. Dans ce contexte, Arndt est celui qui a proposé une réduction pour les formes de déterminant strictement négatif alors qu'Hermite a résolu la question de la réduction pour celles de déterminant strictement positif.

Pour les formes dont le déterminant D est strictement négatif, Mordell démontre le théorème 1 : il existe des valeurs entières des variables x et y, non toutes deux nulles, telles que

$$|f(x,y)| \;\leq\; \sqrt[4]{\frac{|D|}{49}}\,.$$

Le cas d'égalité se présente si et seulement si $D = -49\,e^4$ et $e^{-1}f(x,y)$ est équivalente à $x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$, e étant une constante quelconque[212].
Dans le théorème 2 où le déterminant est strictement positif, l'inégalité précédente

[207] Mordell 1945a.
[208] Mordell 1941b.
[209] Mordell 1945a p.198.
[210] Mordell indique 1958.
[211] Pour les travaux d'Eisenstein, Arndt et Hermite sur les formes cubiques binaires voir par exemple Eisenstein 1844; Arndt 1851b,a, 1852, 1857, 1858; Hermite 1851, 1859.
[212] Deux formes cubiques binaires sont équivalentes si elles sont liées par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant ±1.

devient

$$|f(x,y)| \ \leq\ \sqrt[4]{\frac{|D|}{23}}$$

avec cette fois égalité si et seulement si $D = 23\,e^4$ et $e^{-1}f(x,y)$ est équivalente à $x^3 - xy^2 - y^3$.
Mordell traite aussi le cas où D est nul (jugé presque trivial) qui utilise le théorème de Minkowski sur la majoration simultanée de deux formes linéaires. Dans cette situation la cubique f prend des valeurs arbitrairement petites pour des valeurs entières et non nulles de ses variables[213] :

> « THEOREM 3. If $D = 0$ then, for arbitrary $\varepsilon > 0$, integer values of x, y, not both zero, exist such that
>
> $$|f(x,y)| \ <\ \varepsilon\ .\ »$$

Après ces théorèmes principaux, Mordell donne différents énoncés qui leur sont équivalents, en particulier les théorèmes 3 et 4 qui nous intéressent davantage ici car c'est sous cette forme que les résultats sont démontrés.
Considérons le réseau $\mathcal{L}$ d'origine O qui est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$x = \alpha\xi + \beta\eta \qquad \text{et} \qquad y = \gamma\xi + \delta\eta\ ,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels qui vérifient $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et ξ, η parcourent les entiers.
Le théorème 3, équivalent au théorème 1, donne alors l'existence d'un point de $\mathcal{L}$, différent de l'origine O, tel que

$$|g(x,y)| = |x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3| \ \leq\ 1\ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{L}$ est équivalent soit au réseau

$$x = \xi\ , \qquad y = \eta\ ,$$

soit à un des trois réseaux défini par

$$(\theta - \phi)\,x = \theta\phi^2\xi + \psi\eta\ , \qquad (\theta - \phi)\,y = -\theta^2\xi - \theta\phi^2\eta\ ,$$

où θ, ϕ, ψ sont les solutions de l'équation $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$.
Le théorème 4 est le même type d'énoncé mais cette fois équivalent au théorème 2 : il

[213] MORDELL 1945a p.200.

existe un point (x, y) du réseau $\mathcal{L}$, différent de l'origine O, tel que

$$|h(x,y)| = |x^3 - xy^2 - y^3| \ \leq \ 1 \ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{L}$ est équivalent au réseau

$$x = \xi \ , \qquad y = \eta \ ,$$

ou bien au réseau défini par

$$(3\theta^2 - 1)\, x = -\xi - (\theta + 3)\, \eta \ , \qquad (3\theta^2 - 1)\, y = -3\theta\xi + \eta \ ,$$

où θ est l'unique solution réelle de l'équation $t^3 - t - 1 = 0$.
L'équivalence entre les théorèmes 1 et 3, et les théorèmes 2 et 4 est une conséquence d'un résultat sur les cubiques binaires. En effet, deux formes cubiques binaires quelconques de déterminant strictement négatif peuvent être déduites l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients réels. Ainsi pour n'importe quelle cubique binaire de déterminant strictement négatif il est possible de se ramener à

$$g(x,y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$$

qui est de déterminant -49. De la même manière, une cubique binaire de déterminant strictement positif peut être ramenée à la cubique

$$h(x,y) = x^3 - xy^2 - y^3$$

de déterminant 23.
D'autres résultats équivalents sont énoncés par Mordell, parmi eux le théorème 5 est celui qui permet de faire le rapprochement avec le minimum du produit de formes linéaires[214] :

> « THEOREM 5. Let p, q, r, p', q', r' be six numbers, which in case (I) are all real, while in case (II) p, p' are real and q, r are conjugate complex numbers, as are also q', r'. Suppose also that
>
> $$\prod (qr' - q'r) \neq 0\,.$$
>
> Let $K = \dfrac{1}{7}$, $1/\sqrt{(23)}$ in the respective cases. Then integer values of x, y,

[214] MORDELL 1945a p.201.

not both zero, exist such that

$$|(px + p'y)\,(qx + q'y)\,(rx + r'y)| \;\leq\; \left|K \prod (q'r - qr')\right|^{\frac{1}{2}} \;. \text{ »}$$

Nous pouvons déjà noter une différence avec les travaux précédents de Davenport. En effet, avec ces énoncés nous voyons que la géométrie ne disparaît pas complètement des publications de Mordell et c'est même sous la forme géométrique que les théorèmes principaux sont démontrés.

4.2.2.3 Conséquence sur le produit de trois formes linéaires homogènes

Comme nous l'avons déjà remarqué, le travail de Mordell sur le minimum des cubiques binaires a été initialement suscité par son intérêt pour le problème du produit de trois formes linéaires homogènes. Son théorème sur les cubiques lui permet effectivement de donner une nouvelle démonstration des résultats qu'a obtenus Davenport sur ce sujet. Cette preuve fait l'objet d'un article publié en 1942 mais dont la rédaction date de 1940 à la suite de son premier article sur le minimum des cubiques[215]. Cela confirme l'imbrication de ces deux problèmes dans les recherches de Mordell au début des années 1940.

Mordell note les trois formes linéaires homogènes

$$L_r = a_r x_1 + b_r x_2 + c_r x_3 \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Ces formes peuvent avoir des coefficients réels (cas (I)) ou deux d'entre elles peuvent avoir des coefficients complexes et conjugués (cas (II)). Leur déterminant d est alors 1 ou i selon le cas étudié. Mordell suppose aussi qu'aucune des formes L_1, L_2, L_3 ne s'annule pour des valeurs entières de ses variables excepté pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Il rappelle alors le théorème de Davenport : pour tout ε strictement positif, il existe des entiers x_1, x_2, x_3, non tous nuls, tels que

$$|L_1\, L_2\, L_3| \;<\; \frac{1}{K} + \varepsilon \;,$$

où $K = 7$ dans le cas (I) et $K = \sqrt{23}$ dans le cas (II). Mordell caractérise ensuite les formes réalisant l'égalité. À nouveau, Mordell justifie l'intérêt de la nouvelle preuve de ce résultat par sa simplicité

> « The ideas involved in Davenport's work are simple, but the details require considerable calculation. The theorems are of such a nature as to suggest

[215] Mordell 1942.

> strongly the possibility of a simpler proof.
> [...] This led further to the method of the present paper, which gives a demonstration of Theorem 1 [celui de Davenport] as short and simple as could be desired[216]. »

Nous revoyons aussi apparaître la distinction entre l'idée de la preuve et la rédaction formelle des arguments. Selon Mordell, ce qui est en question dans la preuve de Davenport n'est pas la simplicité de l'idée qui est issue de considérations géométriques mais la difficulté des vérifications à faire dans la rédaction rigoureuse de la démonstration. Cependant comme Mordell le remarque lui-même

> « My proof depends, however, upon a theorem (7) (the proof of which is not short), naturally suggesting itself in my method, which is more fundamental than Theorem 1 and which had surprisingly escaped the notice of other investigators for more than eighty years[217]. »

Effectivement, dans cet article, Mordell admet et utilise son théorème sur les formes cubiques binaires qui conduit à une inégalité du type

$$|f(x,y)| \leq \left(\frac{|D|}{K^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

et dont la simplification de la démonstration fait aussi l'objet de nombreux échanges entre les deux mathématiciens.

La première étape de la preuve de Mordell consiste à écrire la cubique f sous sa forme factorisée

$$f(x,y) = (px + p'y)(qx + q'y)(rx + r'y)\,.$$

Les coefficients p, p', q, q', r, r' sont réels dans le cas (I) alors que q, r et q', r' sont complexes et conjugués dans le cas (II). De plus, le produit

$$\prod (qr' - q'r)$$

est différent de 0, ce qui assure que tous les facteurs dans f sont distincts. Le déterminant D de f s'exprime alors en fonction de p, p', q, q', r, r' de la façon suivante

$$D = [(qr' - q'r)(rp' - r'p)(pq' - p'q)]^2\,.$$

[216] Mordell 1942 p.109.
[217] Mordell 1942 p.109. Les 80 ans auxquels Mordell fait référence renvoient aux articles de Arndt et Hermite publiés à la fin des années 1850.

Le théorème de Mordell sur les cubiques peut donc s'écrire

$$|(px+p'y)(qx+q'y)(rx+r'y)| \ \leq\ K^{-\frac{1}{2}}\,|(qr'-q'r)(rp'-r'p)(pq'-p'q)|^{\frac{1}{2}}\ ,$$

où x, y sont toujours des entiers non tous deux nuls.
Comme le produit $P = |L_1L_2L_3|$ dépend des trois variables x_1, x_2, x_3 et que l'inégalité précédente concerne un produit de formes linéaires de deux variables, l'étape suivante consiste à se ramener de 3 à 2 variables. Mordell effectue pour cela le changement de variables[218]

$$x_1 = \xi\,, \qquad x_2 = y\eta\,, \qquad x_3 = z\eta\,,$$

où ξ, η, y, z sont des entiers avec y et z qui sont soit nuls tous les deux, soit premiers entre eux. Cela implique que

$$P = \prod_{s=1}^{3} |a_s\xi + (b_sy + c_sz)\eta|$$

et P est vu comme une forme cubique binaire en les variables ξ et η. Pour le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\,,$$

Mordell note par exemple B_i le cofacteur pour lequel la i-ème ligne et la colonne des b_j ont été supprimées. La valeur absolue du déterminant de la forme cubique P est alors

$$\prod_{i=1}^{3}(C_iy - B_iz)^2\,.$$

Si y, z sont tels que le produit précédent ne s'annule pas (ce cas est traité à part par Mordell), le théorème sur les cubiques implique l'existence d'un couple d'entiers (ξ, η) non nul tel que

$$P \ \leq\ K^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{3} |C_iy - B_iz|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Mais $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}(C_iy - B_iz)$ est aussi une forme cubique binaire en y, z, si ce n'est pas une cubique critique (c'est-à-dire conduisant au cas d'égalité dans le théorème) en lui ap-

[218] Mordell 1942 p.110.

pliquant le théorème, Mordell obtient pour y, z des entiers non tous deux nuls

$$\prod_{i=1}^{3} |C_i y - B_i z| \ < \ K^{-\frac{1}{2}} \left|(B_2C_3 - B_3C_2)(B_3C_1 - B_1C_3)(B_1C_2 - B_2C_1)\right|^{\frac{1}{2}} .$$

Comme le déterminant d des formes linéaires L_1, L_2, L_3 est égal à 1 ou i, il vient que

$$\left|(B_2C_3 - B_3C_2)(B_3C_1 - B_1C_3)(B_1C_2 - B_2C_1)\right| = |a_1a_2a_3| ,$$

ce qui permet de montrer finalement que[219]

$$KP \ < \ |K\, a_1a_2a_3|^{\frac{1}{4}} .$$

Mordell considère des entiers premiers entre eux x_1, x_2, x_3 qui vérifient $P > \frac{1}{K}$, quitte à faire une substitution, il suppose $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ et donc $P = |a_1a_2a_3|$. Cela lui permet de construire une suite d'entiers x_1, x_2, x_3 tels que

$$|K\, L_1\, L_2\, L_3| \ < \ 1 + \varepsilon ,$$

pour tout ε strictement positif, ce qui implique le résultat. L'article continue avec l'étude du cas d'égalité.

Pour Mordell, sa démonstration et celle de Davenport sont de natures différentes :

> « The proof actually constructs, by means of a "*descente infinie*", lattice points satisfying the inequality (2), whereas Davenport's results are in the nature of existence theorems[220]. »

Cette remarque doit cependant être précisée. En effet, si la fin de la preuve donne un « process [which] is an actual construction of sets of integers x_1, x_2, x_3 [221] » qui satisfont l'inégalité du théorème de Davenport, le début utilise le théorème de Mordell sur les formes cubiques binaires qui est un théorème d'existence. En particulier, la démonstration n'est pas effective. D'autre part, la méthode apparaît différente d'une preuve par descente infinie. Même si une suite de solutions est construite, il ne s'agit pas d'une suite de solutions de plus en plus petites qui conduirait à utiliser qu'il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels[222].

Mordell considère le théorème sur le minimum des cubiques binaires comme plus fondamental que celui sur le produit de trois formes linéaires (voir la citation de Mor-

[219] Mordell 1942 p.111.
[220] Mordell 1942 p.109.
[221] Mordell 1942 p.111-112.
[222] Voir Goldstein 1993.

dell page 295). Une première raison est bien entendu que le résultat sur les formes linéaires est une conséquence de celui sur les formes cubiques. Mais comme le montre la démonstration précédente, c'est aussi surtout parce que l'approche par les formes cubiques binaires permet d'unifier le cas réel et le cas complexe du théorème de Davenport. En effet, même si les preuves des deux cas avec la méthode de Davenport relèvent des mêmes grandes idées, elles font l'objet de deux publications différentes car les détails techniques sont différents et plus compliqués dans le cas complexe. D'ailleurs Davenport regrettait que la simplification de la preuve dans le cas réel que nous avons évoquée n'ait pas d'analogue dans le cas complexe (voir la citation de Davenport page 287). Cet aspect de la méthode de Mordell est mis en avant par Davenport

> « Mordell's method deduces the result very simply in both cases from a similar result for a binary cubic form, which however requires itself a proof which is not as simple as one might wish[223]. »

Ainsi Mordell déduit de manière simple le théorème de Davenport de son théorème sur les cubiques, une unique démonstration est nécessaire pour les cas réel et complexe et donc la question de la simplicité va se déplacer sur le théorème à propos du minimum des formes cubiques. Nous verrons qu'effectivement Mordell et Davenport travaillent à obtenir la preuve la plus simple possible pour le théorème sur les formes cubiques.
Un autre problème auquel Mordell fait allusion à la fin de son article en proposant quelques conjectures et qui va faire l'objet de recherches de la part de Mordell et Davenport est celui des « minima isolés[224] ». Il s'agit de savoir si un résultat analogue pour le minimum du produit de formes linéaires ou des formes cubiques peut être trouvé quand les formes conduisant au cas d'égalité sont exclues.

4.2.2.4 La méthode de Mordell pour le théorème sur les formes cubiques binaires

Entre 1941 et 1945, Mordell publie cinq articles consacrés aux théorèmes sur les formes cubiques binaires. L'ordre des publications ne suit cependant pas la chronologie du travail de Mordell sur cette question. Dans le premier de ces articles, Mordell énonce une série de résultats sans démonstration[225]. La première démonstration du théorème principal obtenue par Mordell dès 1940 se trouve dans un article publié en 1945[226]. En 1943, deux articles proposent des preuves qu'il juge plus simples de son théorème[227],

[223] Notes de cours Davenport (WL), C 179.
[224] Mordell 1971d p.10.
[225] Mordell 1941b.
[226] Mordell 1945a.
[227] Le cas où le déterminant est strictement positif dans Mordell 1943a et strictement négatif dans Mordell 1943b.

démonstrations à nouveau simplifiées en 1944 pour les formes de déterminant strictement positif[228].

a) Résumé de la méthode de Mordell

À Bruxelles en 1946, Davenport résume de la manière suivante la méthode employée par Mordell pour démontrer les théorèmes sur le minimum des formes cubiques binaires :

> « M. Mordell a interprété le problème dans un plan obtenu à partir du plan u, v par une transformation linéaire, qui réduit la forme cubique [à] une forme spéciale, dépendant du signe de D. Le problème consiste alors à démontrer que si un réseau n'a d'autre point que O dans un domaine fixe, son déterminant a une certaine borne inférieure. Le domaine est limité par une courbe cubique et son image par rapport à O, et s'étend à l'infini. Par diverses applications du théorème fondamental de Minkowski, M. Mordell a trouvé plusieurs petites régions, dont chacune doit contenir un point du réseau. À la suite de combinaisons de ces points, et après un raisonnement difficile et détaillé, il est arrivé à une contradiction si le déterminant du réseau ne satisfait pas à son inégalité[229]. »

Mordell décrit lui aussi les grandes étapes de sa méthode à différentes occasions. Nous suivons maintenant les présentations qu'il fait dans un article général sur la théorie des nombres[230] publié en 1946, un article sur la géométrie des nombres issu d'un exposé au congrès canadien de mathématiques en 1945 [231] et enfin d'un article reprenant un exposé donné en 1948 sur la question des formes cubiques[232].

Comme le remarque Davenport, pour une forme cubique binaire

$$f(x,y) \;=\; ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \;,$$

la première étape de la méthode de Mordell est de se ramener à l'étude de formes cubiques particulières par une substitution linéaire sur les variables. Notons maintenant

$$D = 18abcd - 27a^2d^2 + b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3$$

[228] Mordell 1944a.
[229] Davenport 1946b p.12-13.
[230] Mordell 1946b.
[231] Mordell 1946a.
[232] Mordell 1949.

le discriminant[233] de la cubique f. Pour D strictement négatif, Mordell écrit

$$f(X,Y) = g(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)\ ,$$

où α, β, γ, δ sont des réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et $g(x,y) = x^3 - xy^2 - y^3$ est de discriminant -23. De la même façon, si D est strictement positif,

$$f(X,Y) = h(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)\ ,$$

où $h(x,y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$ est de discriminant 49. Quand X, Y décrivent les entiers, les points

$$x = \alpha X + \beta Y\ , \qquad y = \gamma X + \delta Y$$

définissent un réseau de déterminant 1 et d'origine notée O. Mordell se ramène ainsi à démontrer que tout réseau de déterminant 1 possède un point différent de O dans chacun des domaines définis par les inégalités

$$|g(x,y)| \ \leq\ 1\,, \qquad |h(x,y)| \ \leq\ 1\,.$$

En 1949, Mordell caractérise cette étape de la preuve en indiquant

> « The problem of the minimum of a binary cubic can be reduced to a question in the geometry of numbers[234]. »

Cette fois l'expression *géométrie des nombres* désigne la formulation géométrique, en termes de la recherche de points d'un réseau dans un domaine, du problème arithmétique de la détermination du minimum des formes cubiques binaires.
Dans la suite de la preuve, Mordell recherche des points du réseau. Son idée est d'utiliser le théorème de Minkowski, cependant les domaines $|g(x,y)| \leq 1$ et $|h(x,y)| \leq 1$, que nous notons $\mathcal{R}$, ne sont pas convexes. Il détermine donc des domaines convexes d'aire assez grande et qui sont presque inclus dans $\mathcal{R}$ afin d'obtenir des points du réseau. Par exemple, quand le domaine $\mathcal{R}$ est donné par $g(x,y)$, seulement deux parties du carré (symétriques par rapport à O) $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ ne sont pas dans $\mathcal{R}$, or par le théorème de Minkowski ce carré contient un point du réseau. Si ce point est aussi dans $\mathcal{R}$ le théorème est démontré, sinon il doit être dans les parties du carré qui ne sont pas dans $\mathcal{R}$. Mordell applique éventuellement le même raisonnement à d'autres parallélogrammes pour trouver d'autres points du réseau.
Dans l'étape suivante, Mordell continue à déterminer des points du réseau mais cette fois en exploitant les symétries du domaine $\mathcal{R}$. Ce domaine est en effet invariant par une substitution linéaire de déterminant 1 et l'image des parallélogrammes précédents

[233] C'est-à-dire l'opposé du déterminant.
[234] Mordell 1949 p.72.

par cette transformation permet de trouver de nouveaux points du réseau.
Enfin la dernière partie de la démonstration consiste à déterminer une combinaison linéaire des points du réseau trouvés afin d'en construire un nouveau qui est dans $\mathcal{R}$, la vérification de l'appartenance de ce point à $\mathcal{R}$ est assez technique et demande pas mal de calculs

> « In considering linear combinations of any of the points, a detailed numerical knowledge of the regions involved is necessary[235]. »

Mordell résume la fin de sa preuve de la manière suivante

> « After many efforts, I succeeded in finding smaller and smaller regions external to $\mathcal{R}$ and containing points of Λ[236], and finally was able to show that a linear combination of these points led to a point [of] Λ other than O and lying in $\mathcal{R}$[237]. »

b) Les premières preuves de Mordell

Plusieurs articles de Mordell concernent la démonstration des résultats sur les formes cubiques binaires : Mordell 1945a, Mordell 1943a et Mordell 1943b. Dans les articles publiés en 1943, il propose des preuves qu'il juge plus simples que dans son article publié en 1945[238] des cas où le déterminant des formes cubiques est strictement positif ou strictement négatif. Cependant toutes ces démonstrations suivent la démarche décrite dans le paragraphe précédent et les simplifications portent essentiellement sur les parties les plus calculatoires des preuves (en particulier dans la dernière étape de la preuve). Par ailleurs, tout ce qui est présenté dans l'article de 1945 n'est pas repris dans les autres publications. Mordell y énonce plusieurs théorèmes qu'il présente comme étant d'autres formes possibles de ses résultats, par exemple[239]

> « Theorem 6. A point of $\mathcal{L}$ not O exists such that
>
> $$|xy\,(x+y)| \;\leq\; \sqrt{\frac{1}{7}}\,. \text{ »}$$

Mordell démontre d'abord à part le cas où le déterminant de la forme cubique

$$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + cy^3$$

[235] Mordell 1946a p.274.
[236] Mordell note Λ le réseau.
[237] Mordell 1946a p.274.
[238] Rappelons que cet article a été rédigé avant ceux de 1943.
[239] Mordell 1945a p.201.

est de déterminant nul. Dans cette situation, le résultat à montrer est que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers x, y, non tous deux nuls tels que

$$|f(x, y)| < \varepsilon .$$

La méthode n'a aucun rapport avec celle employée pour les formes cubiques de déterminant non nul. Lorsque le déterminant est égal à 0, la forme f peut s'écrire

$$f(x, y) = a\,(x + py)^2\,(x + qy) ,$$

avec a, p, q des nombres réels. Mordell juge le résultat évident quand $p = q$, il suppose donc p différent de q. Il applique alors le théorème de Minkowski dans le cas particulier d'un parallélogramme du plan, il s'agit du lemme 5 dans son article[240] :

> « Lemma 5. Every parallelogram with area 4 and center at O contains a point of $\mathcal{L}$ other than O. »

Soit maintenant N un entier naturel, Mordell applique le lemme précédent au parallélogramme

$$|x + py| \leq \frac{1}{N} , \qquad |x + qy| \leq N\,|p - q|$$

ce qui donne l'existence d'un couple d'entiers (x, y) non nul et tel que

$$|f(x, y)| \leq \frac{a\,|p - q|}{N} .$$

Le résultat suit en prenant N suffisamment grand.

La première étape de la démonstration qui consiste à passer de l'énoncé des théorèmes sous leur forme arithmétique à la forme géométrique est expliquée dans l'article de 1945[241] mais elle n'est pas reprise dans les articles de 1943. Dans le cas où le discriminant de la forme cubique binaire est strictement négatif, Mordell doit donc montrer qu'il existe un point du réseau différent de l'origine dans le domaine défini par

$$|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1 ,$$

ce qui est l'objet du premier des articles publiés en 1943 que nous reprenons ici[242]. Mordell définit le réseau $\mathcal{L}$ comme l'ensemble des points dont les coordonnées s'écrivent

$$x = \alpha\xi + \beta\eta , \qquad y = \gamma\xi + \delta\eta ,$$

[240] Mordell 1945a p.205.
[241] Mordell 1945a p.202.
[242] Mordell 1943a.

où ξ, η parcourent l'ensemble des entiers et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. L'origine de ce réseau est noté O.
Mordell commence par rappeler sans démonstration des résultats relatifs aux réseaux qui lui seront utiles par la suite de la preuve[243] :

1. un parallélogramme d'aire 4 et centré en O contient un point du réseau $\mathcal{L}$ différent de l'origine O (c'est un cas particulier du théorème de Minkowski).
2. Si P et Q sont des points du réseau $\mathcal{L}$ qui ne sont pas alignés avec O alors le double de l'aire du triangle OPQ est un entier et donc

$$2 \times \text{aire}(OPQ) \;\geq\; 1\,.$$

   De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathcal{L}$ est engendré par P et Q.
3. Si l'aire de OPQ est égal à 1 et si aucun point de $\mathcal{L}$ différent de O, P et Q n'appartient à OP ou OQ, alors le milieu de PQ est un point de $\mathcal{L}$.
4. Si F, G sont des points tels que $FG = OP$, les droites FG et OP sont parallèles et l'aire de $OPGF$ est égale à 1, alors FG contient au moins un point de $\mathcal{L}$.

Mordell note $h(x,y) = x^3 - xy^2 - y^3$ et $\mathcal{R}$ le domaine $|h(x,y)| \leq 1$ (voir la figure 4.8). Il examine dans un premier temps des propriétés de ce domaine. Il remarque que $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à O (car $h(-x,-y) = -h(x,y)$) et que toute droite passant par O coupe la frontière de $\mathcal{R}$ en exactement deux points sauf la droite $x = \theta y$ qui est asymptote à la courbe $|h(x,y)| = 1$ (θ est la racine réelle de l'équation $t^3 - t - 1 = 0$).
Mordell cherche ensuite des parallélogrammes auxquels il va appliquer le théorème de Minkowski dans sa forme rappelée dans la propriété 1 ci-dessus. Or la frontière de $\mathcal{R}$ passe par les sommets et le milieu des côtés du carré ($\mathcal{P}_1$ sur la figure 4.8) défini par les inégalités

$$|x| \;\leq\; 1\,, \qquad |y| \;\leq\; 1\,.$$

Ce carré est inclus dans $\mathcal{R}$ à part une partie dans le premier cadran et en-dessous de la droite d'équation $y = 1$ (noté $\mathcal{R}_1$ sur la figure 4.8) ainsi que son symétrique par rapport à O.
D'après le théorème de Minkowski, le carré $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ contient un point P de $\mathcal{L}$ différent de O. Mordell envisage ensuite quatre cas selon la position de P :

(I) P est un point intérieur de $\mathcal{R}$,

(II) P est un sommet du carré $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$,

(III) P est le milieu d'un côté du carré $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$,

(IV) P est un point de $\mathcal{R}_1$ sauf $(0,1)$ et $(1,1)$ (ou de l'image de $\mathcal{R}_1$ par rapport à O).

[243] Mordell 1943a p.202.

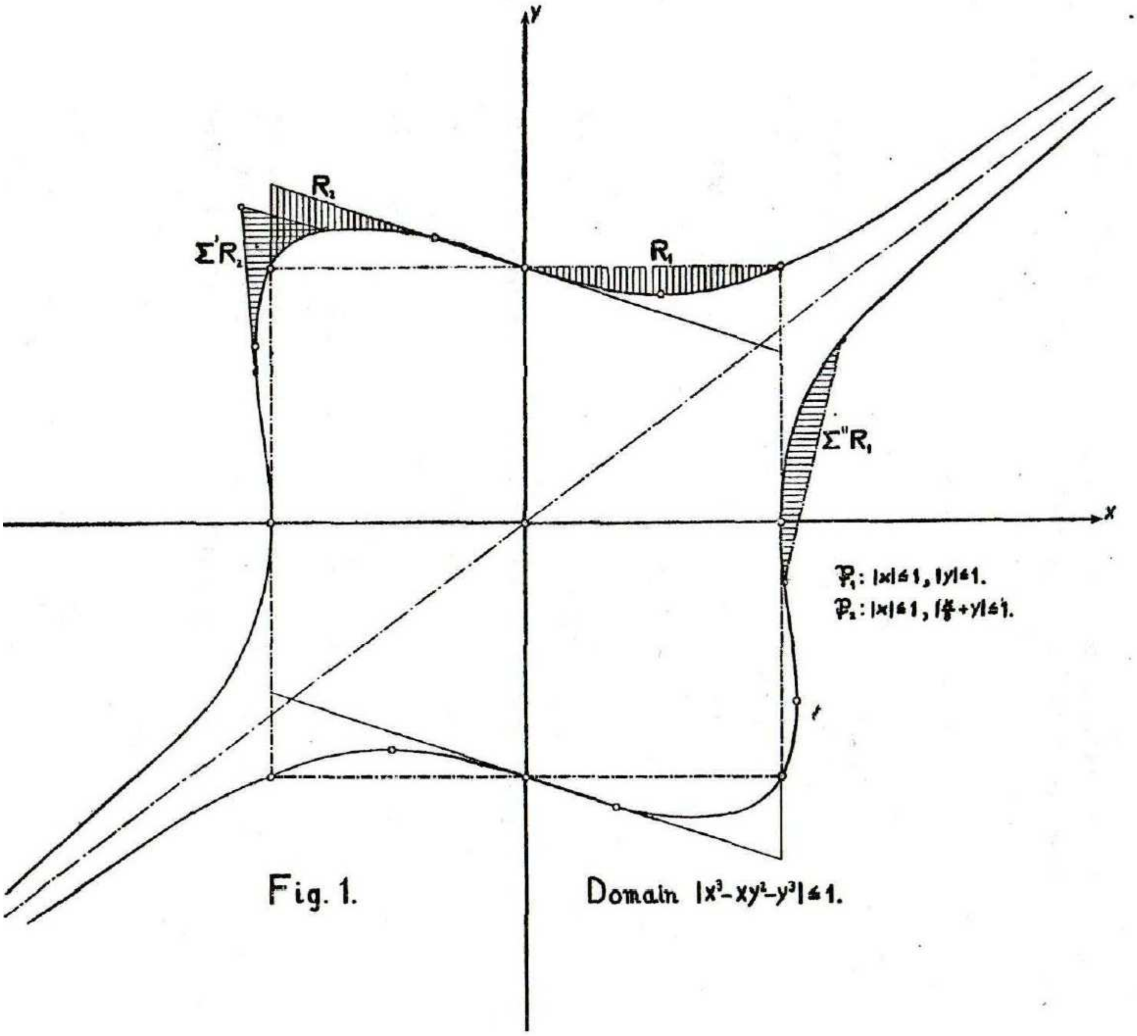


FIG. 4.8 – Le domaine $|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1$.

Dans la situation (I), le théorème est démontré. Si P est un sommet du carré $\mathcal{P}_1$, par exemple $P = (1,1)$, Mordell suppose qu'aucun autre point de $\mathcal{L}$ se trouve sur le segment OP à l'exception de O et de P, sinon il est ramené au cas (I). Soient alors les points $F = (-1,0)$ et $G = (0,1)$, le parallélogramme $OPGF$ est d'aire égale à 1 donc, d'après une propriété des réseaux déjà rappelée, FG contient un point Q de $\mathcal{L}$. Mais le cas (I) étant exclu, Mordell en déduit que $Q = F$ ou que $Q = G$. Le réseau $\mathcal{L}$ est alors défini par

$$x = \xi \,, \qquad y = \eta \,.$$

Comme il n'y a pas de point à coordonnées entières dans l'intérieur de $\mathcal{R}$

$$|\xi^3 - \xi\eta^2 - \eta^3| \;\geq\; 1 \,,$$

pour tous les entiers ξ, η qui ne sont pas nuls tous les deux. De plus, l'égalité est réalisée par exemple pour le point du réseau $(1, 1)$, ce qui signifie que ce réseau est un réseau critique. Le même raisonnement dans le cas (III) conduit aussi à ce réseau critique.
Mordell suppose donc maintenant que le point $P = (X, Y)$ du réseau ne satisfait pas (I), (II) ou (III) mais qu'il appartient à $\mathcal{R}_1$ (cas (IV)). Il justifie d'abord que $\mathcal{R}_1$ ne peut contenir deux points du réseau.
Mordell veut ensuite exploiter les symétries de $\mathcal{R}$ afin de trouver un deuxième point du réseau, pour cela il détermine une substitution linéaire Σ pour laquelle le domaine est invariant. Pour trouver cette substitution, il factorise $h(x, y)$:

$$x^3 - xy^2 - y^3 = (x - \theta y)(x^2 + \theta xy + \theta^{-1}y^2) ,$$

où θ est le réel tel que $\theta^3 - \theta - 1 = 0$. Il résout ensuite le système

$$\begin{cases} x' - \theta y' = -(x - \theta y) \\ x'^2 + \theta x'y' + \theta^{-1}y'^2 = x^2 + \theta xy + \theta^{-1}y^2 , \end{cases}$$

et il obtient pour Σ

$$(3\theta^2 - 1)\, x' = x + (\theta + 3)\, y , \qquad (3\theta^2 - 1)\, y' = 3\theta x - y ,$$

notée aussi

$$x' = \lambda x + \mu y , \qquad y' = \nu x + \rho y .$$

Il explique ensuite ce qu'il appelle « l'argument de symétrie » qu'il énonce dans un théorème[244] :

> « THEOREM. Let $\mathcal{R}$ and D be any two given regions, not necessarily convex or finite, of which $\mathcal{R}$ contains the origin and is transformed into itself by a linear homogeneous substitution Σ of determinant 1, and D is such that no point of D is contained in $\mathcal{R}$. Suppose that a lattice $\mathcal{L}$ of determinant 1 exists such that no point of $\mathcal{L}$ except O is contained in $\mathcal{R}$, and that further every such lattice $\mathcal{L}$ has a point contained in D. Then the region ΣD, i. e. the transform of D by Σ, will also contain a point of $\mathcal{L}$ other than O. »

Cet argument de symétrie appliqué à la situation présente[245] où $D = \mathcal{R}_1$ donne l'existence d'un point $P_1 = (X_1, Y_1)$ du réseau $\mathcal{L}$ dans $\Sigma\mathcal{R}_1$. L'image par Σ du réseau critique

[244] MORDELL 1943a p.205.

[245] Dans le théorème la substitution est supposée être de déterminant 1 alors que la substitution Σ à laquelle Mordell applique ce résultat à un déterminant égal à -1. La démonstration donnée par Mordell du théorème montre que le résultat reste vrai pour les substitutions dont le déterminant est -1.

$x = \xi$, $y = \eta$ donne le deuxième réseau critique annoncé[246] dans le théorème page 293

$$(3\theta^2 - 1)\, x = -\xi - (\theta + 3)\, \eta\ , \qquad (3\theta^2 - 1)\, y = -3\theta\xi + \eta\ .$$

Ainsi Mordell a déterminé deux points du réseau P et P_1, il va maintenant montrer que le point $P + P_1$ est dans l'intérieur de $\mathcal{R}$.
Un morceau de la frontière de $\Sigma\mathcal{R}_1$ est le segment noté B[247] dont les extrêmités sont les points $\Sigma(0,1) = (\mu, \rho)$ et $\Sigma(1,1) = (\lambda + \mu, \nu + \rho)$, c'est donc une partie de la droite d'équation $\nu x + \rho y = 1$. Les abscisses des points (x, y) de $\Sigma\mathcal{R}_1$ vérifient

$$\mu\ \leq\ x\ \leq\ \lambda + \mu\,.$$

Mordell fait maintenant l'hypothèse que n'importe quel réseau de déterminant 1 qui n'a aucun point dans $\mathcal{R}$ autre que l'origine possède un point dans $\Sigma\mathcal{R}_1$ dont l'ordonnée est strictement négative. Comme pour le domaine $\mathcal{R}_1$, $\Sigma\mathcal{R}_1$ ne contient qu'un seul point du réseau, ainsi le point de $\mathcal{L}$ dans $\Sigma\mathcal{R}_1$ dont l'ordonnée est strictement négative est nécessairement P_1. Or l'image de l'ensemble des points d'ordonnées strictement négatives par Σ est l'ensemble des points (x, y) tels que

$$\nu x + \rho y\ <\ 0\,.$$

Comme P est le seul point du réseau dans $\mathcal{R}_1$, l'argument de symétrie appliqué au domaine $\Sigma\mathcal{R}_1 \cap \{(x,y)\,,\, y < 0\}$ implique que P appartient à $\mathcal{R}_1 \cap \{(x,y)\,,\, \nu x + \rho y < 0\}$. En particulier, les coordonnées des points P et P_1 vérifient

$$\nu X + \rho Y\ <\ 0\ , \qquad \nu X_1 + \rho Y_1\ <\ 1\ ,$$

c'est-à-dire

$$\nu(X + X_1) + \rho(Y + Y_1)\ <\ 1\,.$$

Le point $P + P_1$ se situe donc à gauche de B (dans le même demi-plan que l'origine). De plus, le point P est dans le carré $\mathcal{P}_1$ sans être un de ses sommets et dans le premier cadran, d'où $0 \leq Y < 1$ et comme $Y_1 < 0$, il vient

$$Y + Y_1\ <\ 1\ ,$$

ce qui signifie que $P + P_1$ est strictement en-dessous de la droite d'équation $y = 1$. Ensuite, comme P_1 est dans $\Sigma\mathcal{R}_1$ et que P est dans le premier cadran, $X + X_1 > 0$. Enfin, en regardant l'ordonnée minimale des points de $\mathcal{R}_1$ et $\Sigma\mathcal{R}_1$, Mordell justifie que

[246] Au signe près, mais il s'agit bien du même car un réseau est symétrique par rapport à O.
[247] Voir la figure 4.8. Sur ce dessin le domaine $\Sigma\mathcal{R}_1$ est noté $\Sigma''\mathcal{R}_1$.

$Y + Y_1 > 0$. Finalement, le point $P + P_1$ est dans l'intérieur du quadrilatère délimité par les droites d'équation $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ et $\nu x + \rho y = 1$. Les seules parties de ce quadrilatère qui ne sont pas dans $\mathcal{R}$ sont $\mathcal{R}_1$ et $\Sigma\mathcal{R}_1$, or $P + P_1$ est différent de P et de P_1 donc $P + P_1$ est un point du réseau, différent de O, et dans $\mathcal{R}$.

Si maintenant le point $P_1 = (X_1, Y_1)$ ne vérifie pas $Y_1 < 0$, Mordell construit un nouveau point du réseau comme il l'a fait pour P_1. Il remarque pour cela que les droites d'équation $x = \pm 1$ et les tangentes à la frontière de $\mathcal{R}$ aux points $(0, \pm 1)$, dont les équations sont $x + 3y = \pm 3$, forment un parallélogramme d'aire égale à 4 [248] (il s'agit du parallélogramme $\mathcal{P}_2$ sur la figure 4.8). La partie $\mathcal{R}_2$ de $\mathcal{P}_2$ qui n'est pas incluse dans $\mathcal{R}$ est le triangle curviligne de sommets $A = (-d = -\frac{9}{25}; 1,12)$, $(-1, l = \frac{4}{3})$ (l'autre intersection de la tangente au point $(0, 1)$ avec la frontière de $\mathcal{R}$ et avec la droite $x = -1$) et $(-1, 1)$ (ce dernier point est exclu de $\mathcal{R}_2$). Comme précédemment, il existe un point $P_2 = (X_2, Y_2)$ du réseau $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{R}_2$. Mordell prouve alors que $\mathcal{L}$ est engendré par les points P et P_2. Pour cela, il montre que l'aire du triangle OPP_2 est égale à $\frac{1}{2}$. De la même manière, il démontre ensuite que le réseau $\mathcal{L}$ est aussi engendré par les points P et P_1, ce qui lui permet d'écrire

$$P_1 = pP - qP_2 \qquad \text{et} \qquad P_2 = rP - sP_1 \ ,$$

où p, q, r, s sont des entiers strictement positifs. Comme les points O, P, P_2 ne sont pas alignés, ces deux relations impliquent

$$P_1 + P_2 = pP \ . \tag{4.12}$$

Dans ce qui suit, Mordell montre que cette dernière égalité ne peut se produire ce qui termine la preuve de l'existence d'un point du réseau dans $\mathcal{R}$.
Pour cela il commence par considérer la transformation Σ' définie par[249]

$$(3\theta^2 - 1)x' = -x - (\theta + 3)y \ , \qquad (3\theta^2 - 1)y' = -3\theta x + y \ ,$$

ou encore $\Sigma'(x, y) = \Sigma(-x, -y)$. L'application de ce qui a été appelé précédemment le principe de symétrie à la transformation Σ' et au domaine $\mathcal{R}_2$ implique l'existence d'un point du réseau P_3 dans $\Sigma'\mathcal{R}_2$. En justifiant que le point du réseau $P_2 - P_3$ est dans $\mathcal{R}$ et donc ne peut être que l'origine O, Mordell montre qu'en fait $P_2 = P_3$ [250].

[248] Mordell 1943a p.206.
[249] Mordell 1943a p.207.
[250] Mordell rappelle qu'il a déjà démontré que $P_2 = P_3$ dans Mordell 1945a. Il propose ici une autre démonstration. Cette remarque confirme que les preuves de ces différents articles sur les cubiques ne diffèrent essentiellement que sur les aspects techniques mais que le principe des démonstrations est le même.

Revenons à la relation (4.12) et supposons d'abord que $p = 1$, c'est-à-dire que $P_1 = P - P_2$. Comme $Y \leq 1$ et $Y_2 > 1$, P_1 est strictement en-dessous de la droite d'équation $y = 0$. De plus, le point P_2 appartient à l'intersection de $\mathcal{R}_2$ et de $\Sigma'\mathcal{R}_2$ (car $P_2 = P_3$). Or $\Sigma' = -\Sigma$, d'où $-P_2$ appartient à $\Sigma\mathcal{R}_2$. Ainsi la même méthode que pour la somme $P + P_1$ permet de montrer que $P_1 = P + (-P_2)$ est dans l'intérieur de $\mathcal{R}$ ce qui est absurde car P_1 est dans $\Sigma\mathcal{R}_1$ et donc p est différent de 1. Finalement, p est supérieur à 2, ainsi (4.12) implique en particulier que

$$Y_2 + Y_1 \geq 2Y \ .$$

Mordell désigne par h l'ordonnée minimale des points de $\mathcal{R}_1$, ainsi comme P est dans $\mathcal{R}_1$ et P_2 dans $\mathcal{R}_2$ il obtient que

$$Y_1 \geq 2h - l \, .$$

Ensuite, comme l'aire du triangle OPP_2 est $\frac{1}{2}$ alors $XY_2 - X_2Y = 1$. En utilisant les inégalités suivantes

$$Y \geq h \, , \qquad -1 \leq X_2 \leq -d \, , \qquad 1 \leq Y_2 \leq l$$

Mordell obtient

$$X \ \leq \ 1 - dh \, .$$

Le point P_1 est dans $\Sigma\mathcal{R}_1$ et donc il appartient à l'image par Σ du domaine défini par l'inégalité $x \leq 1 - dh$, par suite, ΣP_1 est dans le domaine $x \leq 1 - dh$ car σ est son propre inverse. Cette dernière condition se traduit par

$$\lambda X_1 + \mu Y_1 \ \leq \ 1 - dh \ ,$$

ou encore, comme X_1 est plus grand que 1,

$$Y_1 \ \leq \ \frac{1 - dh - \lambda}{\mu} \ .$$

Les deux conditions sur Y_1 conduisent à la nouvelle inégalité

$$dh + \lambda + \mu \, (2h - l) \ \leq \ 1 \, .$$

Les valeurs calculées par Mordell pour ces constantes impliquent $1,0049 \leq 1$ ce qui est absurde et termine la démonstration.
Mordell démontre en fait un peu plus que l'existence d'un point du réseau dans $\mathcal{R}$. Même si nous ne l'avons pas mentionné, sa preuve lui permet d'être plus précis sur la localisation de ce point du réseau. Ce raffinement du résultat est énoncé dans un

théorème au début de son article[251]

> « THEOREM 2a. The point of $\mathcal{L}$ in Theorem 2 lies in the finite part of $\mathcal{R}$ cut off by the parts of the lines[252]
>
> $$y = 1\,, \qquad 3\theta^2 x - y = 3\theta - 1\,,$$
>
> lying in the first quadrant, and their images in O. The point is a boundary point of the modified region when and only when $\mathcal{L}$ is a critical lattice, and then the equality sign is necessary in (5). »

Le cas où le discriminant de la forme cubique est strictement positif est traité dans un article qui suit celui dont il vient d'être question[253]. Il s'agit cette fois de démontrer l'existence d'un point du réseau dans le domaine $\mathcal{R}$ défini par l'inégalité

$$|x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3| \ \leq\ 1\,.$$

Le schéma général de la preuve est exactement le même que pour le domaine

$$|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1\ ;$$

étude géométrique de la frontière de $\mathcal{R}$, utilisation du carré $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ pour construire un premier point du réseau, construction de nouveaux points du réseau par le principe de symétrie, combinaison de tous ces points etc... Par contre, les parties techniques de la preuve sont plus difficiles à cause de la géométrie du nouveau domaine $\mathcal{R}$. D'abord, la frontière de $\mathcal{R}$ possède trois asymptotes d'équation respectives

$$x + \theta y = 0, \quad x + \phi y = 0 \quad \text{et} \quad x + \psi y = 0.$$

Ensuite, lorsque Mordell considère le carré $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ pour appliquer le théorème de Minkowski, deux parties de ce carré ne sont pas incluses dans $\mathcal{R}$ (ces deux parties sont notées $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}'_1$ sur la figure 4.9).

Un peu plus tard en 1944, Mordell publie une nouvelle preuve du cas où le discriminant est strictement négatif[254]. À nouveau cette démonstration suit le même modèle

[251] MORDELL 1943a p.202.

[252] Il y a très certainement une faute de frappe dans l'équation de la seconde droite. En effet, le point qui répond au problème est $P + P_1$ et ce qui précède montre que ce point est situé à gauche de la droite B d'équation $\nu x + \rho y = 1$. Lorsque les coefficients de cette équation sont exprimés en fonction de θ nous obtenons $3\theta x - y = 3\theta^2 - 1$.

[253] MORDELL 1943b.

[254] MORDELL 1944a.

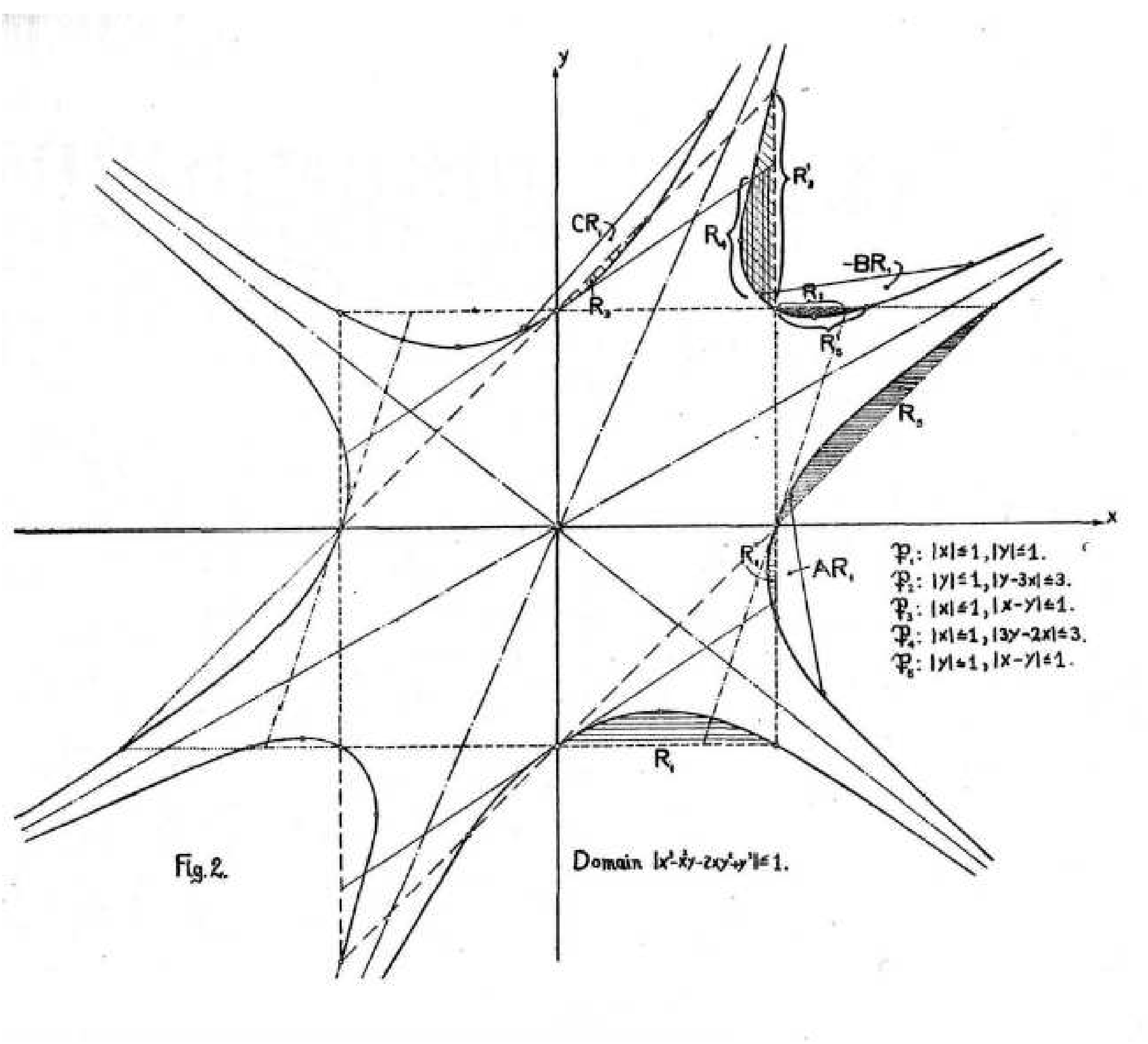


FIG. 4.9 – Le domaine $|x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3| \leq 1$.

que ce qui vient d'être exposé mais en utilisant cette fois le domaine défini par

$$|x^3 + y^3| \ \leq \ 1\,.$$

Pour Mordell, de ce nouveau domaine est qu'il lui permet de simplifier encore les vérifications techniques de sa preuve

> « I have also given a proof when $D < 0$ by considering the more symmetrical region $|x^3 + y^3| \leq 1$, and have thus reduced the numerical details to a minimum[255]. »

[255] MORDELL 1949 p.74.

4.2.2.5 Les preuves de Davenport du théorème sur le minimum des cubiques binaires

Mordell voit les preuves précédentes de son théorème comme géométriques et lorsqu'il présente les démonstrations proposées par Davenport il reprend les termes géométriques et arithmétiques pour les qualifier :

> « Subsequently much simpler geometrical proofs were given by DAVENPORT who clothed his proof in arithmetical form, and by myself. [...]
> After these results were found, DAVENPORT discovered arithmetical proofs of surprising simplicity based on ideas related to those used by HERMITE nearly ninety years ago[256]. »

Cette description de Mordell nous ramène à la distinction entre les différents niveaux auxquels géométrie ou arithmétique peuvent intervenir et invite à préciser ce qu'il entend quand il qualifie de géométrique les démonstrations du paragraphe précédent. Ses preuves sont pour lui géométriques à la fois par les idées qui y sont mises en oeuvres et par les vérifications formelles qu'elles contiennent. Cette séparation apparaît plus clairement dans son commentaire sur la première preuve de Davenport dont la méthode sous-jacente est pour lui géométrique mais qui est présentée (ou habillée) sous une forme arithmétique. La seconde preuve de Davenport évoquée dans la citation est quant à elle complètement arithmétique.

a) Une preuve géométrique présentée sous forme arithmétique

Dans l'article où il donne sa première démonstration sur le théorème de Mordell du minimum sur les formes cubiques binaires, Davenport reprend la description faite par Mordell de son travail :

> « The object of this paper is to give simple proofs of these theorems. The method of the present proofs was first obtained in a geometrical form, shortly after I had been privileged to read Mordell's manuscript, but I give them here in a purely arithmetical form, in order to avoid appealing to any properties of diagrams[257]. »

Davenport commence par redonner les énoncés du théorème dans le cas où le discriminant de la cubique est strictement négatif (théorème 1) et strictement positif (théorème 2). Nous retrouvons dans cet article une exposition similaire aux autres travaux de Davenport que nous avons vus : il commence par énoncer des lemmes qu'il

[256] MORDELL 1949 p.74.
[257] DAVENPORT 1943a p.168.

applique à la situation qu'il veut étudier.
La première partie de la preuve concerne une transformation linéaire T définie par

$$\begin{cases} \xi' + \eta' = \alpha\xi + \beta\eta\,, \\ \xi + \eta = \alpha\xi' + \beta\eta'\,, \end{cases}$$

où $\alpha \neq \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 2$. Cette transformation est son propre inverse. La première étape consiste à démontrer le lemme 1 [258] :

> « LEMMA 1. Let ξ, η be linear forms in x, y with real coefficients and determinant 1, and let ξ', η' be the transforms of ξ, η by T. Then there exist integral values of x, y, not both zero, which satisfy at least one of the following conditions :

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & |\xi| \leq 1\,, \quad |\eta| \leq 1\,, \quad |\xi + \eta| \leq 1\,; \\
\text{(I')} & |\xi'| \leq 1\,, \quad |\eta'| \leq 1\,, \quad |\xi' + \eta'| \leq 1\,; \\
\text{(II)} & 0 \leq \xi \leq 1\,, \quad 0 \leq \eta \leq 1\,, \quad \xi + \eta > 1\,, \quad \xi' \leq 1\,; \\
\text{(II')} & 0 \leq \xi' \leq 1\,, \quad 0 \leq \eta' \leq 1\,, \quad \xi' + \eta' > 1\,, \quad \xi \leq 1\,; \\
\text{(III)} & \xi + \eta > 0\,, \quad \xi' < 0\,, \quad \xi + \eta - \xi' \leq \beta\,; \\
\text{(III')} & \xi' + \eta' > 0\,, \quad \xi < 0\,, \quad \xi' + \eta' - \xi \leq \beta\,; \\
\text{(IV)} & \xi > 1\,, \quad \xi' > 1\,, \quad \eta \leq 1\,, \quad \eta' \leq 1\,. \text{ »}
\end{array}$$

Pour démontrer ce lemme Davenport fait un raisonnement par l'absurde. Donnons le début de la preuve. Le parallélogramme défini par $|\xi| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$ est d'aire égale à 4, d'après le théorème de Minkowski il existe des entiers x_1, y_1, non tous deux nuls, tels que

$$|\xi(x_1, y_1)| = |\xi_1| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\eta(x_1, y_1)| = |\eta_1| \leq 1\,.$$

ξ_1 et η_1 ne peuvent pas être de même signe sinon, nous aurions par exemple

$$0 \leq \xi_1 \leq 1\,, \qquad -1 \leq \eta_1 \leq 0\,,$$

ce qui implique $-1 \leq \xi_1 + \eta_1 \leq 1$, la condition (I) est alors vérifiée ce qui est contraire à l'hypothèse. Les conditions (I) et (II) ne sont pas vérifiées donc

$$0 \leq \xi_1 \leq 1\,, \quad 0 \leq \eta_1 \leq 1\,, \quad \xi_1 + \eta_1 > 1\,, \quad \xi_1' > 1$$

[258] DAVENPORT 1943a p.169.

et le même raisonnement pour ξ', η' entraîne l'existence d'entiers x_2, y_2 tels que

$$0 \leq \xi_2' \leq 1\,, \quad 0 \leq \eta_2' \leq 1\,, \quad \xi_2' + \eta_2' > 1 \quad \xi_2 > 1\,.$$

Si η_1' et η_2 sont négatifs alors

$$\xi_1 + \xi_2 > 1\,, \quad \xi_1' + \xi_2' > 1\,, \quad \eta_1 + \eta_2 \leq 1\,, \quad \eta_1' + \eta_2' \leq 1\,.$$

Ces conditions s'écrivent aussi

$$\xi(x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) > 1\,, \quad \xi'(x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) > 1\,,$$
$$\eta(x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) \leq 1\,, \quad \eta'(x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) \leq 1.$$

Ainsi la condition (IV) est vérifiée ce qui est absurde, Davenport suppose donc par exemple que $\eta_2 > 0$ etc... La suite de la preuve de ce lemme continue de la même façon en combinant des inégalités pour aboutir à des contradictions.

Dans l'étape suivante de la démonstration, Davenport fait le lien entre le lemme 1 et la forme cubique binaire $F = \xi^3 - \xi\eta^2 - \eta^3$. Il montre (lemme 2) qu'il existe une transformation T qui vérifie les mêmes hypothèses que dans le lemme 1 et telle que chacune des conditions (I), (I'), ..., (IV) implique $|F| \leq 1$. L'égalité se produit pour

$$\begin{array}{lll} \xi = 0,\ \eta = 1\,; & \xi = 1,\ \eta = 0\,; & \xi = 1, \eta = -1\,; \\ \xi' = 0,\ \eta' = 1\,; & \xi' = 1,\ \eta' = 0\,; & \xi' = 1, \eta' = -1\,; \end{array}$$

ainsi que pour les cas qui sont symétriques des précédents par rapport à l'origine. Davenport construit la transformation T en factorisant la forme cubique F

$$F = (\xi - \theta\eta)(\xi - \chi\eta)(\xi - \bar{\chi}\eta)\ ,$$

où θ est la solution réelle de l'équation $t^3 - t - 1 = 0$ et χ, $\bar{\chi}$ les solutions complexes et conjuguées. T est alors définie par les relations

$$\begin{aligned} (\chi - \bar{\chi})(\xi' - \theta\eta') &= -(\chi - \bar{\chi})(\xi - \theta\eta)\ , \\ (\bar{\chi} - \theta)(\xi' - \chi\eta') &= -(\theta - \chi)(\xi - \bar{\chi}\eta)\ , \\ (\theta - \chi)((\xi' - \bar{\chi}\eta') &= -(\bar{\chi} - \theta)(\xi - \chi\eta)\ . \end{aligned}$$

Davenport justifie ensuite rapidement que T est ainsi bien définie, qu'elle est son propre inverse et qu'elle transforme F en $-F$. En combinant les équations définissant T et en utilisant les relations entre les trois racines θ, χ, $\bar{\chi}$, il montre que T peut s'écrire

$$\xi' + \eta' = \alpha\xi + \beta\eta \,, \qquad \xi + \eta = \alpha\xi' + \beta\eta' \,,$$

avec $\alpha = \dfrac{3\theta+1}{3\theta^2-1}$ et $\beta = \dfrac{\theta+2}{3\theta^2-1}$ qui, après calcul, vérifient bien les conditions

$$\alpha > 0 \,, \qquad \beta > 0 \,, \qquad \alpha + \beta < 2 \,.$$

Il s'agit ensuite de démontrer que chaque système d'inégalité (I), (I'), ..., (IV) implique $|F| \leq 1$. Nous donnons à nouveau seulement quelques exemples.
Supposons d'abord que la condition (I) est vérifiée, c'est-à-dire que

$$|\xi| \leq 1 \,, \quad |\eta| \leq 1 \,, \quad |\xi + \eta| \leq 1 \,.$$

Si ξ et $\xi + \eta$ sont positifs alors $0 \leq (\xi + \eta)\eta^2 \leq 1$ et $0 \leq \xi^3 \leq 1$, ce qui entraîne bien $|F| \leq 1$. Si maintenant, $\xi < 0$ et $\xi + \eta > 0$ alors $\eta > 0$ et $\xi - \eta < 0$, donc $\xi^2 - \eta^2 < 0$. D'autre part, comme $-1 \leq \xi < 0$ et $0 < \eta \leq 1$, Davenport en déduit que

$$-1 \;\leq\; \xi^2 - \eta^2 \;<\; 0$$

et par suite

$$0 \;<\; \xi(\xi^2 - \eta^2) \;\leq\; 1 \,.$$

Or $0 < \eta^3 \leq 1$ donc il obtient bien $|F| \leq 1$.
Pour la condition (III), Davenport réécrit les inégalités

$$\xi + \eta > 0 \,, \qquad \xi' < 0 \,, \qquad \xi + \eta - \xi' \leq \beta$$

en posant $\xi + \eta = \beta u$ et $\xi' = -\beta v$, où u et v sont strictement positifs.
Ainsi $\xi + \eta - \xi' = \beta(u + v)$ et il en déduit que $u + v \leq 1$. Davenport exprime ensuite F en fonction de u et de v. Pour cela, il utilise le fait que le changement de variables T transforme F en $-F$ ce qui permet d'écrire

$$F = (-\xi')^3 + \xi'\eta'^2 + \eta'^3 \,.$$

D'une part, $\xi' = -\beta v$ et d'autre part,

$$\beta u = \xi + \eta = \alpha\xi' + \beta\eta' = -\alpha\beta v + \beta\eta' \,,$$

d'où $\eta' = u + \alpha v$. En reportant dans F, il obtient

$$F = u^3 + (\beta^3 - \alpha^2\beta + \alpha^3)v^3 + (3\alpha - \beta)u^2 v + (3\alpha^2 - 2\alpha\beta)uv^2 \,.$$

En prenant $u = 0$ et $v = 1$ il détermine ensuite le coefficient devant v^3 et finalement

$$F = u^3 + v^3 + \gamma u^2 v + \delta u v^2 \ ,$$

où $\gamma = 3\alpha - \beta < 3$ et $\delta = 3\alpha^2 - 2\alpha\beta < 3$. Ce qui implique enfin

$$|F| \ < \ u^3 + v^3 + 3u^2 v + 3uv^2 = (u+v)^3 \ \leq \ 1 \, .$$

Pour chaque condition, les cas primes s'obtiennent par symétrie.

Davenport passe ensuite à la démonstration du théorème quand le discriminant D de la forme cubique f est strictement négatif. Il doit donc montrer que pour des valeurs entières non nulles des variables

$$|f(x,y)| \ \leq \ \left(\frac{-D}{23}\right)^{\frac{1}{4}} \ .$$

Comme Mordell, Davenport se ramène à la forme $f(x,y) = \xi^3 - \xi\eta^2 - \eta^3$ qui est de discriminant -23. L'application des lemmes 1 et 2 donne l'existence d'entiers x, y non tous les deux nuls et tels que

$$|f(x,y)| \ \leq \ 1 \, .$$

Il discute pour terminer les cas d'égalité donnés dans le lemme 2.

Quand le discriminant de la forme cubique est strictement positif, Davenport procède de la même manière en montrant d'abord le lemme 3 [259] :

> « Lemma 3. Let $F = \xi^3 + \xi^2\eta - 2\xi\eta^2 - \eta^3$. There exists a self-inverse transformation T satisfying (2) such that any one of (I), (I'), (III), (III'), (IV) implies $|F| \leq 1$. This is true with strict inequality except for the cases enumerated in Lemma 2. »

La difficulté par rapport au cas précédent est que les conditions (II) et (II') n'implique pas $|F| \leq 1$. Davenport surmonte ce problème en considérant une transformation T définie à partir des solutions de l'équation $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ mais aussi la transformation U définie par

$$\bar{\xi} = -\eta \, , \qquad \bar{\eta} = \xi + \eta$$

qui transforme aussi F en $-F$.

En quoi cette démonstration est-elle géométrique malgré la présentation arithmétique qui est faite par Davenport ? Prenons par exemple le lemme 1 et comme point de

[259] Davenport 1943a p.173.

comparaison les preuves de Mordell qui sont vues comme géométriques. Mordell essaie de construire des points du réseau dans des domaines particuliers. Les points sont localisés en donnant leur position par rapport aux frontières de ces domaines (en-dessous ou bien à gauche de la droite d'équation...). Le résultat énoncé par Davenport dans le lemme 1 pourrait aussi être traduit de cette façon. Les systèmes d'inégalités (I), (I'), ..., (IV) peuvent s'interpréter comme l'appartenance de points d'un réseau à des parties bien délimitées du plan. D'ailleurs, comme Mordell, Davenport commence sa démonstration en appliquant le théorème de Minkowski à un parallélogramme d'aire égale à 4, ce qui confirme la proximité des méthodes sous-jacentes.

b) Une preuve purement arithmétique

La deuxième démonstration de Davenport du théorème sur le minimum des formes cubiques binaires est considérée par Mordell et Davenport comme arithmétique par les idées qui y sont développées ainsi que par les parties techniques de la preuve. Les deux cas où le discriminant des formes sont strictement positifs ou négatifs sont traités dans des articles différents publiés dans le même volume du *Journal of the London Mathematical Society* en 1945 [260]. Le titre de ces articles « The reduction of a binary cubic form » confirme la place de ce travail dans un contexte arithmétique.

Davenport s'intéresse d'abord aux formes cubiques binaires de discriminant strictement positif. Il rappelle la notion de réduction introduite par Hermite pour ces formes. Pour une forme

$$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

de discriminant strictement positif, il introduit la forme quadratique

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (bx + cy)^2 - (3ax + by)(cx + 3dy)$$

qui est définie positive. La forme cubique f est dite réduite si la forme quadratique précédente est réduite, c'est-à-dire si

$$C \;\geq\; A \;\geq\; B \;\geq\; 0\,.$$

Toute forme cubique peut être transformée en une forme réduite par une transformation linéaire à coefficients entiers de déterminant ± 1. Davenport utilise cette notion pour démontrer l'existence d'entiers x, y non tous deux nuls et tels que

$$|f(x,y)| \;\leq\; \left(\frac{D}{49}\right)^{\frac{1}{4}}$$

[260] Davenport 1945a,b.

avec égalité si f est équivalente à

$$\left(\frac{D}{49}\right)^{\frac{1}{4}}(x^3+x^2y-2xy^2-y^3)\,.$$

Par homogénéité, on peut supposer que f a pour discriminant 49. Davenport énonce alors le théorème 1 qui implique le résultat de Mordell[261] :

> « THEOREM 1. Let $f(x,y)$ be a reduced binary cubic form of discriminant 49. Than at least one of
>
> $$f(1,0)\,,\quad f(0,1)\,,\quad f(1,1)\,,\quad f(1,-1)$$
>
> does not exceed 1 numerically. One of them is numerically less than 1 except when
>
> $$\pm f(x,y)=x^3+x^2y-2xy^2-y^3 \quad \text{or} \quad \pm f(x,y)=x^3+2x^2y-xy^2-y^3\,. \text{ »}$$

Davenport démontre aussi le « deeper result[262] » où sous les mêmes hypothèses que le théorème 1 la conclusion devient qu'au moins un des produits

$$f(1,0)f(0,1),\quad f(1,0)f(1,1),\quad f(1,0)f(1,-1),\quad f(0,1)f(1,1),\quad f(0,1)f(1,-1)$$

est inférieur à 1.
Davenport rappelle dans un premier temps des relations sur les coefficients de la forme cubique f et la forme quadratique qui lui est associée[263] :

$$A=b^2-3ac,\qquad B=bc-9ad,\qquad C=c^2-3bd,$$
$$Bc-Cb=3Ad,\qquad Bb-Ac=3Ca,$$
$$Ac^2+Cb^2=AC+Bbc,$$
$$AC\leq 49,\qquad 0\leq B\leq A\leq 7\,.$$

Il raisonne ensuite par l'absurde, il suppose donc que

$$|f(1,0)|=|a|\geq 1\quad,\qquad |f(0,1)|=|d|\geq 1,$$
$$|f(1,1)|=|a+b+c+d|\geq 1\quad,\qquad |f(1,-1)|=|a-b+c-d|\geq 1$$

[261] DAVENPORT 1945a p.15.
[262] DAVENPORT 1945a p.15.
[263] DAVENPORT 1945a p.16.

et montre que cela conduit à une contradiction à moins d'être dans un des cas cités dans le théorème. Quitte à prendre $-f$, Davenport se ramène à $a \geq 1$. En utilisant les inégalités rappelées et l'inégalité arithmetico-géométrique, il obtient d'abord

$$2\,|bc|\sqrt{AC} \;\leq\; Ac^2 + Cb^2 = AC + Bbc \;\leq\; AC + |bc|\sqrt{AC}\ ,$$

d'où il déduit

$$|bc| \;\leq\; \sqrt{AC} \;\leq\; 7\,.$$

Ainsi l'inégalité $d \geq 1$ est impossible et $d \leq -1$.
De plus, $bc \leq -9 + 7 = -2$, ainsi la relation $Bb - Ac = 3Ca$ entraîne $b > 0$ et $c < 0$. Davenport écrit alors $c = -\gamma$ et $d = -\delta$. Comme la forme est supposée réduite $C(b + \gamma) \geq Bb - Ac = 3Ca$, donc

$$b + \gamma \;\geq\; b\,\frac{B}{C} + \gamma\,\frac{A}{C} = 3a\,.$$

Si $a - b - \gamma + \delta \geq 1$ alors $\delta \geq 1 - a + b + \gamma$ ce qui implique $\delta \geq 1 + 2a \geq 3$. Ensuite,

$$AC = (b^2 + 3a\gamma)(\gamma^2 + 3b\delta) > 9a\delta b\gamma \geq 18a\delta \geq 54\,,$$

ce qui est une contradiction, ainsi $a - b - \gamma + \delta \leq -1$.
Pour terminer, Davenport démontre avec des arguments similaires que si $a+b-\gamma-\delta \geq 1$ alors $b = 2$, $\gamma = 1$, $a = 1$ et $\delta = 1$, c'est-à-dire que

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - y^3\,.$$

Enfin le cas où $-(a + b - \gamma - \delta) \geq 1$ conduit à la cubique

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3\,.$$

La fin de l'article est consacrée à justifier que si la forme cubique f représente 0, il n'existe pas d'inégalité du type de celle donnée par le théorème de Mordell.

Dans l'article suivant, Davenport s'intéresse au cas où le discriminant D de la forme cubique binaire f est strictement négatif, la difficulté étant de définir une méthode de réduction pour ces formes. f possède alors un facteur réel et deux facteurs complexes et conjugués, elle peut donc s'écrire

$$f(x, y) = (x + \theta y)(Px^2 + Qxy + Ry^2)\,,$$

avec θ, P, Q, R des réels. La forme quadratique $Px^2 + Qxy + Ry^2$ est définie et quitte à considérer $-f$, Davenport la suppose définie positive. f est dite réduite si elle vérifie les deux conditions[264] :

1. $Px^2 + Qxy + Ry^2$ est réduite, c'est-à-dire $-P \leq Q \leq P \leq R$,
2. $\theta \geq 0$.

Toute forme cubique f peut alors être transformée par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant ± 1 en une forme réduite qui est en général unique à part dans quelques cas énumérés par Davenport. Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent le théorème suivant implique le théorème de Mordell[265]

> « THEOREM. Let $f(x, y)$ be a reduced binary cubic form of discriminant -23. Than one at least of
>
> $$f(1,0)\,, \quad f(0,1)\,, \quad f(1,-1)\,, \quad f(1,-2)$$
>
> does not exceed 1 numerically. One of them is numerically less than 1 except when
>
> $$f(x, y) = x^3 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
>
> (in which case all four values are ± 1). »

La stratégie de Davenport pour démontrer ce théorème est la même que pour $D > 0$. Il raisonne par l'absurde ce qui l'amène à supposer que

$$P \geq 1, \quad \theta R \geq 1, \quad |1-\theta|(P-Q+R) \geq 1, \quad |1-2\theta|(P-2Q+4R) \geq 1,$$

il cherche alors à montrer que $\mathcal{D} = -D \geq 23$. Pour cela, il remarque que, pour θ fixé, les inégalités précédentes sur P, Q, R ainsi que les conditions de réduction définissent un domaine convexe $\mathcal{R}$ et il prouve dans un lemme que $\sqrt[4]{\mathcal{D}}$, qui est une fonction de P, Q, R, est une fonction convexe. Davenport justifie ensuite que le minimum de $\mathcal{D}$ sur le domaine $\mathcal{R}$ est atteint à un sommet de $\mathcal{R}$. La fin de la preuve consiste alors à étudier $\mathcal{D}$ à chaque sommet du domaine $\mathcal{R}$.

Nous constatons que Davenport emploie un vocabulaire géométrique dans un travail pourtant qualifié de purement arithmétique. La part de la géométrie reste cependant assez faible. D'un point de vue technique, les justifications sont faites par un travail sur des inégalités et la plus grande partie de la démonstration est l'étude de $\mathcal{D}$ aux sommets de $\mathcal{R}$ qui est abordée par des méthodes proches de celles utilisées dans l'article où D est strictement positif. Du point de vue de l'idée de la preuve, Davenport se place dans un contexte arithmétique qui est celui de la théorie arithmétique des formes et de leur réduction. Il est d'ailleurs intéressant de noter que Davenport fait référence dans cet article à Minkowski. Il cite d'abord l'article de Minkowski de 1905

[264] DAVENPORT 1945b p.140.
[265] DAVENPORT 1945b p.140-141.

dans lequel Minkowski étudie la réduction des formes quadratiques de n variables et donne des conditions de réduction qui le conduisent à l'étude d'un domaine convexe ; Minkowski utilise aussi dans cet article une propriété de convexité du déterminant de formes quadratiques définies positives[266]. Davenport cite également le livre *Geometrie der Zahlen* à propos de la convexité, plus précisément le dernier paragraphe du premier chapitre qui concerne les systèmes d'inégalités linéaires[267].

4.2.2.6 Les échanges entre Mordell et Davenport au sujet des formes cubiques

Selon les sources dont nous disposons, un des premiers mathématiciens auquel Mordell communique son travail sur les formes cubiques binaires est Siegel. Dans une lettre du 12 janvier 1941, Siegel remercie Mordell de lui avoir envoyé ses articles sur ces formes et sur le produit de trois formes linéaires. Le jugement de Siegel sur les résultats obtenus sur les cubiques est très positif :

> « As a matter of fact, your theorem for the binary cubic is one of the most beautiful results in the geometry of numbers[268]. »

Siegel note cependant la difficulté de certains calculs dans les preuves des théorèmes : il a essayé de simplifier ces calculs sans y parvenir.

Une lettre de Mahler montre que Mordell l'a aussi sollicité à propos de son travail sur les cubiques. Dans cette lettre datée du 9 août 1941, Mahler répond, semble-t-il, à une question que lui a posé Mordell à propos du domaine dont la frontière est donnée par

$$|x|\,|y|\,(|x|+|y|) = \text{constante}.$$

Mahler énonce une conjecture sur « the best possible result for lattices without points inside the domain[269] ». Il décrit les réseaux critiques (ceux qui ont des points sur la frontière du domaine mais pas à l'intérieur) de manière géométrique

> « the critical lattice has as its basis two points P_1, P_2 in the first quadrant on the curve $\mathcal{C}$; these are chosen that both $P_0 = P_1 - P_2$ and $P_3 = P_2 - 3P_1$ lie on $\mathcal{C}$[270]. »

[266]Voir Minkowski 1905.

[267]Comme le remarque Davenport, le point de vue adopté par Minkowski n'est pas géométrique dans cette partie du livre.

[268]Lettre de Siegel à Mordell du 12 janvier 1941, Mordell (St John's), box 3, folder 28.

[269]Lettre de Mahler à Mordell du 9 août 1941, Mordell (St John's), box 2, folder 17.

[270]Lettre de Mahler à Mordell du 9 août 1941, Mordell (St John's), box 2, folder 17.

Mahler accompagne son explication d'un dessin (voir la figure 4.10[271]).

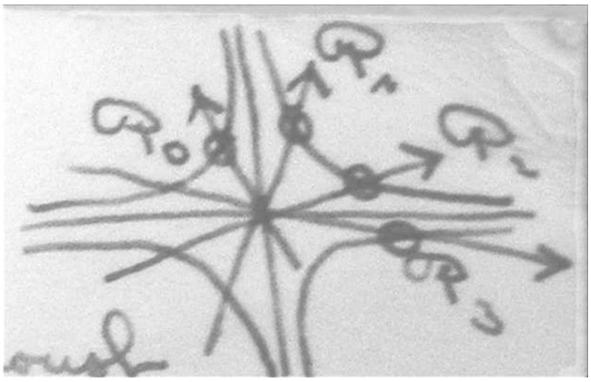


FIG. 4.10 – Dessin de Mahler dans la lettre à Mordell du 9 août 1941.

Cette courte lettre de Mahler est caractéristique de la correspondance de Mordell. Quand nous y trouvons des mathématiques, ce sont le plus souvent des points très précis et techniques qui sont abordés ; il est peu fréquent de trouver des commentaires sur les méthodes employées ou bien encore l'heuristique. De plus, les échanges conservés sont ponctuels, autour d'une question isolée[272].

La correspondance entre Mordell et Davenport est un peu différente, certains thèmes sont abordés de façon plus continue : c'est par exemple le cas pour les formes cubiques binaires. Leur collaboration sur ce sujet qui apparaît dans leurs publications respectives est donc confimée par leur correspondance. Huit lettres concernent les formes cubiques : quatre écrites par Davenport et quatre par Mordell. Les commentaires que nous trouvons dans ces lettres sont de natures diverses. Les deux mathématiciens comparent par exemple leurs méthodes sur un même problème et discutent de la manière la plus juste de rendre compte de leur travail respectif dans leurs articles. Ils se font parfois des suggestions pour des corrections dans un article ou encore ils communiquent sur leur dernières découvertes sur le sujet.
Une question qu'ils débatent est la façon dont Mordell doit faire référence dans un article à une démonstration de Davenport :

> « I now use the phrase "a variation of my geometric methods". I want to use a phrase suggesting that your method was not completely independent

[271] Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

[272] Avant de déposer les papiers de Mordell à la bibliothèque de Saint John's College, J.W.S. Cassels a fait un tri dans les documents (communication personnelle avec Cassels, 25 avril 2005). Nous ne connaissons pas exactement quels furent les critères employés pour faire ce tri mais cela explique certainement en partie pourquoi les archives contiennent essentiellement des mathématiques très techniques et peu d'informations personnelles.

> of mine so "another geometric method" does not appeal to me[273]. »

Mais cette formule ne convient toujours pas à Davenport

> « I do not altogether like the phrase you have selected in referring to my simplification, but will think further about this[274]. »

Finalement, la phrase choisie par Mordell est la suivante :

> « Davenport has given an arithmetic proof of Theorems 2 and 3, which is, however, based upon a simplification of my geometric methods[275]. »

Cet épisode montre d'abord la minutie avec laquelle ils veulent rendre compte de leur collaboration. Mais cela traduit aussi l'importance qu'ils accordent à ces simplifications successives qu'ils proposent pour un même résultat.
Dans la lettre suivante, Davenport compare justement les deux démonstrations auxquelles Mordell fait référence dans la citation précédente[276]. Pour lui, l'idée fondamentale de leurs démonstrations est la même. Elle consiste à faire deux cas : « one in which $P+P_1$ lies in the little quadrilateral, which is trivial, the other in which it does not[277] » (voir la démonstration de Mordell page 306). Davenport indique qu'il traite le second cas en montrant que le point $P-P_1$ appartient à un domaine assez proche de celui considéré par Mordell. Plus loin il ajoute que l'utilisation de la convexité d'une partie de la frontière du domaine est cruciale. Il exprime cette convexité analytiquement par

$$u^3+v^3 \leq (u+v)^3 \ ,$$

où u et v sont positifs. Davenport explique la motivation qu'il la conduit à suivre cette méthode :

> « Actually my objective originally was to get a proof which should be symetrical with respect to the linear transformation, and there I did not succeed[278]. »

Ces courts extraits de cette lettre montrent bien la différence de présentation par rapport à la démonstration publiée de Davenport (voir les grandes lignes de cette démonstration dans le paragraphe 4.2.2.5), alors même que ce sont les mêmes idées qui sont exprimées. Dans son article, Davenport présente son travail de façon arithmétique alors que dans la discussion avec Mordell il fait le choix de la géométrie. Comme Minkowski le faisait avec Hermite quand il lui présentait son travail sous une forme

[273] Lettre de Mordell à Davenport du 3 novembre 1942, Davenport (WL), G 214.
[274] Lettre de Davenport à Mordell du 13 novembre 1942, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[275] Mordell 1943a p.202.
[276] Lettre de Davenport à Mordell du 26 novembre 1942, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[277] Lettre de Davenport à Mordell du 26 novembre 1942, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[278] Lettre de Davenport à Mordell du 26 novembre 1942, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

analytique, Davenport choisit la géométrie peut être pour prendre le même point de vue que celui adopté par son interlocuteur (Mordell) dans ses propres recherches. Mais chez Davenport, cette différence de présentation entre ce qui est publié et ce qui ne l'est pas apparaît comme une attitude générale. Cette constatation sur la correspondance avec Mordell rejoint en effet ce que nous avions remarqué à propos de ses notes de cours ou d'exposés non publiées (voir à ce sujet le paragraphe 4.2.1.3). En particulier, nous retrouvons l'utilisation de la géométrie quand il s'agit de décrire les grandes idées de la preuve, de la méthode ou une heuristique (voir à ce sujet la page 283).

Une question qui revient à plusieurs reprises dans leurs lettres et que nous avons déjà mentionnée auparavant est celle de la simplicité. Le problème est évoqué quand Mordell doit faire référence au travail de Davenport, Mordell y revient à propos d'une nouvelle démonstration :

> « Proof for the second case is now very simple. I have dispensed with the 9/14 and have presented it in a form which makes the result more intuitive[279]. »

Dans une lettre du 13 mai 1943, Davenport fait part de ses critiques sur un manuscrit que Mordell lui a demandé de relire[280]. Après avoir signalé à Mordell des passages qu'il juge peu clairs, Davenport conclut :

> « I found the paper difficult reading, but I think the exposition is as clear as the method permits. The numerous little calculations absorb a lot of the reader's energy. But it is a fine paper, especially when one thinks of the further work it has led you to[281]. »

D'après Davenport, la complexité des preuves sur les cubiques est donc liée à la démarche qu'ils utilisent. Comme le suggère aussi cette dernière citation, la difficulté se trouve dans les aspects techniques des démonstrations. Les preuves ne contiennent pas de notion théorique très élaborée, en revanche elles sont très sophistiquées techniquement.

[279]Lettre de Mordell à Davenport du 17 mars 1943, Davenport (WL), G 214.
[280]Il s'agit probablement de Mordell 1945a.
[281]Lettre de Davenport à Mordell du 13 mai 1943, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

4.3 Les autres travaux en géométrie des nombres entre 1937 et 1943 et de nouvelles pistes de recherche

4.3.1 Le produit de formes linéaires homogènes

Pendant la période qui nous intéresse, le travail de Mordell et Davenport sur les formes linéaires homogènes est focalisé sur la question du minimum du produit de trois formes de trois variables. Mordell obtient cependant aussi des résultats sur des produits plus généraux.
C'est en particulier le cas en 1941 dans un article[282] où Mordell revient sur le produit de n formes linéaires de n variables. Il note $L_1, \dots, L_n$ des formes linéaires homogènes en les variables $x_1, \dots, x_n$ et de déterminant 1. Soit aussi k une constante indépendante des coefficients des formes et telle qu'il existe des valeurs entières des x_i non toutes nulles pour lesquelles

$$|L_1 L_2 \dots L_n| \ \leq \ k\,.$$

K désigne la borne inférieure de toutes les constantes k possibles. Le problème est de calculer ou bien de majorer K et nous allons voir que Mordell déduit d'un théorème général des améliorations pour des résultats connus dans les cas $n = 4$ et $n = 5$.
Mordell commence par un bref historique de ce problème qui le conduit à rappeler que Davenport a récemment montré que, pour $n = 3$, la constante K est atteinte et est égale à $\frac{1}{7}$ alors que dans un article précédent il avait obtenu $K < \frac{1}{6{,}07\ldots}$. Mordell souligne ensuite qu'utilisant la méthode de Davenport de ce premier article, Žilinskas vient[283] d'améliorer le résultat pour $n = 4$ en montrant que $K < \frac{1}{14{,}9\ldots}$. Quand $n = 5$, Mordell remarque que la borne de Minkowski, $K \leq \frac{1}{26{,}0\ldots}$, est alors la meilleure connue.
La méthode proposée ici par Mordell lui permet d'obtenir dans ces deux derniers cas

$$K \leq \frac{1}{14,9\dots} \quad (\text{pour } n = 4)\,, \qquad K \leq \frac{1}{32,4\dots} \quad (\text{pour } n = 5)\,.$$

Ces majorations pour la constante K sont des conséquences d'un théorème que Mordell énonce de la façon suivante : s'il existe un ensemble convexe de dimension $(n-1)$, symétrique par rapport à l'origine $O(x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0)$, de volume $2^{n-1}V$ et telle que tous ses points vérifient l'inégalité $|x_1 x_2 \dots x_{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})| \leq 1$, alors

$$K \ \leq \ V^{\frac{-n}{n-2}}\,.$$

[282]MORDELL 1941d.

[283]ZILINSKAS 1941. Notons que ce résultat de Žilinskas fut publié dans le même volume du *Journal of the London mathematical society* que l'article de Mordell dont il est ici question.

La preuve de ce théorème utilise en particulier un résultat que Mordell attribue à Kurt Mahler[284] et dont il rappelle la démonstration.
Avec ce théorème, le problème arithmétique à résoudre au départ est ramené à une question que nous pouvons qualifier de géométrique[285] :

> « Concrete results now depend upon finding simple $(n-1)$-dimensional sets satisfying (8) [286]. »

Mordell détermine ensuite de tels ensembles convexes pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$. Pour $n = 3$, sa méthode ne lui permet pas de retrouver la borne optimale obtenue par Davenport. Mais pour $n = 4$ et $n = 5$ le calcul du volume des ensembles trouvés implique les majorations pour K données ci-dessus.
Dans une note à la fin de l'article, Mordell indique que ce travail est celui qui l'a amené à ses résultats sur les formes cubiques binaires.

En 1943, Mordell consacre un autre article au produit de formes linéaires homogènes[287]. Pour $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des formes linéaires de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à coefficients réels ou complexes et de déterminant 1, Mordell définit $K(X)$ comme étant la borne inférieure du produit $|X_1 X_2 \ldots X_n|$ pour des valeurs entières des variables non toutes nulles, puis K la borne supérieure des $K(X)$ pour tous les systèmes de formes linéaires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de déterminant 1. En particulier, pour tout ε strictement positif, il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous nuls et tels que

$$|X_1 X_2 \ldots X_n| \ < \ K + \varepsilon \, .$$

Mordell considère ensuite $n-1$ formes $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ des variables $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ qui vérifient les mêmes hypothèses que les formes X_i précédentes. La constante k est définie de la même manière que K pour le produit

$$|L_1 L_2 \ldots L_{n-1}(L_1 + L_2 + \cdots + L_{n-1})| \, .$$

Pour n strictement plus grand que 2 et des hypothèses sur les formes X_i, Mordell démontre que[288]

$$K \ \leq \ k^{\frac{n-1}{n-2}} \, .$$

Cassels classe ce dernier article parmi un ensemble de travaux dont l'idée commune est de ramener un problème de dimension n à un problème de dimension $n-1$ [289]. La

[284] Mahler 1938-1939.
[285] Mordell 1941d p.8.
[286] (8) est l'inégalité des hypothèses du théorème.
[287] Mordell 1943c.
[288] Mordell 1943c p.273.
[289] Cassels 1973 p.505 et Cassels 1959 p.269.

méthode de Mordell pour démontrer le théorème de Davenport sur le produit de trois formes linéaires homogènes ternaires peut être vue comme appartenant à ces travaux. Il effectue un changement de variables pour se ramener de trois à deux variables. Son travail entre 1937 et 1945 sur le minimum des formes quadratiques relève aussi de ce type d'idée.

4.3.2 Les minima des formes quadratiques

Pour une forme quadratique définie positive, l'estimation du minimum pour des valeurs entières des variables est un problème classique abordé dans le cadre de la géométrie des nombres. Minkowski et Blichfeldt ont par exemple obtenu des résultats sur cette question, Mordell et Davenport s'y sont aussi intéressés. Nous allons illustrer leur travail à ce sujet par un résultat de Mordell plus particulièrement cité puisqu'il permet de retrouver plus simplement un théorème dû à Blichfeldt. Avant de passer au théorème de Mordell, voyons comment Davenport décrit le sujet dans des notes de cours du début des années 1940. Pour une forme quadratique de n variables, définie positive

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s$$

de déterminant Δ, le problème est de déterminer la meilleure constante possible γ_n telle qu'il existe $(x_1, ..., x_n)$ des entiers non tous nuls et qui vérifient

$$f(x_1, ..., x_n) \ \leq\ \gamma_n\, \Delta^{\frac{1}{n}}\ .$$

Davenport envisage alors deux questions en liaison avec ce problème. La première est d'essayer d'améliorer la constante γ_n pour un entier n quelconque. Hermite[290] avait donné $\gamma_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, Minkowski démontra ensuite en 1891 par des méthodes géométriques que $\gamma_n = \frac{4}{\pi}\left[\Gamma(1+\frac{n}{2})\right]^{\frac{2}{n}}$. Blichfeldt[291] améliora encore ce dernier résultat en 1914 avec $\gamma_n = \frac{2}{\pi}\left[\Gamma(1+\frac{n+2}{2})\right]^{\frac{2}{n}}$. La deuxième question est de trouver la meilleure constante possible γ_n où cette fois l'entier n est fixé. Ces constantes sont connues pour les entiers entre 1 et 8 :

$$\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\ ;\quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2}\ ;\quad \gamma_4 = \sqrt{2}\ ;\quad \gamma_5 = \sqrt[5]{8}\ ;\quad \gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}\ ;\quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64}\ ;\quad \gamma_8 = 2\,.$$

[290] Hermite 1850.
[291] Blichfeldt 1914.

Dans son article publié en 1944, Mordell note[292]

> « None of the proofs for $n = 5, 6, 7, 8$ are as simple as one could wish. Thus Blichfeldt's method involves considerable numerical work. »

Mordell fait référence au calcul de γ_8 par Blichfeldt. Pour lui le principal intérêt de ce nouvel article est de pouvoir déterminer plus simplement γ_8 à partir de γ_7 grâce à une inégalité entre γ_n et γ_{n-1} qui est valable pour tout n. Il démontre donc le théorème

$$\gamma_n \;\leq\; \gamma_{n-1}^{(n-1)/(n-2)} \;.$$

Comme $\gamma_7 = \sqrt[7]{64} = 2^{6/7}$, cette inégalité implique $\gamma_8 \leq 2$. De plus, la forme

$$\sum_1^8 x_r^2 + \left(\sum_1^8 x_r\right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_8 \;,$$

qui est de déterminant 1, prend la valeur 2 pour $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_8 = 0$, d'où $\gamma_8 = 2$.

Après avoir démontré le théorème, Mordell fait le rapprochement entre la méthode employée ici et celle qu'il a utilisée dans un article sur les formes linéaires (voir page 325). Il souligne aussi la similitude des inégalités obtenues

$$K \;\leq\; k^{\frac{n-1}{n-2}} \;, \qquad \gamma_n \;\leq\; \gamma_{n-1}^{(n-1)/(n-2)} \;.$$

La preuve de Mordell n'est pas géométrique. Cela semble confimer ce que Davenport remarque à propos des démonstrations permettant de déterminer la constante γ_n pour n entre 1 et 8

> « It may be noted that the proofs of these mostly make no use of the methods of the geometry of numbers. This is often the case with special problems[293]. »

Pour Davenport, il apparaît donc que la géométrie des nombres et les méthodes géométriques seraient mieux adaptées pour traiter le cas général que pour les cas particuliers où l'entier n est fixé. Cette idée que la géométrie serait du côté de la généralité est aussi reprise par Mordell en 1971 :

> « It sometimes happens that arithmetical proofs are simpler but these may not suggest the possibility of further application. The geometric method often depends upon a simpler and more general idea, and this is often more fruitful since obvious new problems can now be attacked[294]. »

[292] Mordell 1944b p.3.
[293] Notes non datées de Davenport sur la géométrie des nombres, Davenport (WL), C 179.
[294] Mordell 1971c p.612.

Mordell exprime ici à la fois le fait que la géométrie serait plus générale[295], mais aussi son intérêt dans la découverte de nouveaux problèmes.

4.3.3 « Isolation Theorems »

Dès ses premiers travaux sur les formes cubiques binaires, Mordell énonce des conjectures sur le comportement du minimum lorsque les cas d'égalités sont exclus. Dans l'article dans lequel est exposé sa première démonstration de son théorème, il fait une analogie avec les formes quadratiques binaires qui le conduit aux hypothèses suivantes[296] :

« HYPOTHESIS 1. If $D < 0$ and $f(x, y)$ is not equivalent to

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 \ ,$$

then integer values of x, y, not both zero, exist such that

$$|f(x,y)| \ \leq \ \sqrt[4]{\frac{|D|}{81}} \ ,$$

where the equality sign holds when and only when $D = -81e^4$ and

$$e^{-1}\, f(x,y) \sim x^3 - 3xy^2 + y^3 \ ,$$

of determinant -81.

HYPOTHESIS 2. If $D > 0$ and $f(x, y)$ is not equivalent to $x^3 - xy^2 - y^3$, then integer values of x, y, not both zero, exist such that

$$|f(x,y)| \ \leq \ \sqrt[4]{\frac{D}{31}} \ ,$$

where the equality sign holds when and only when $D = 31e^4$ and

$$e^{-1}\, f(x,y) \sim x^3 + xy^2 + y^3 \ ,$$

[295] Ce n'est pas la première mention de la généralité en liaison avec la géométrie que nous rencontrons chez Mordell et Davenport. Ils mettent ici en avant qu'une idée de nature géométrique serait plus générale pour aborder des problèmes dans n'importe quel domaine des mathématiques et en particulier en théorie des nombres. Notons la différence avec la question de la généralité décrite dans NABONNAND 2008. Pour les mathématiciens du XIX[e] siècle qui y sont étudiés, il s'agit de proposer des principes généraux ou des méthodes générales pour la géométrie. Ils restent donc dans le cadre de la géométrie, l'objectif poursuivi étant de développer un traitement général pour les problèmes géométriques.

[296] MORDELL 1945a p.203.

of determinant 31. »

En 1940, Mordell énonce aussi des conjectures similaires pour le produit de trois formes linéaires homogènes[297] :

« CONJECTURE. If
(I) $K' = \sqrt{81}$, and $KL_1L_2L_3$ is not equivalent to (3)[298] defined by (4)[299],
(II) $K' = \sqrt{31}$, and $KL_1L_2L_3$ is not equivalent to (3) defined by (5)[300],
then integer values of x_1, x_2, x_3, not all zero, exist such that

$$|L_1\, L_2\, L_3| \;\leq\; \frac{1}{K'} + \varepsilon\,.$$

The least value of the product is $1/K'$ when, and only when,

$$K'\, L_1\, L_2\, L_3 \;\sim\; \prod_{\theta',\phi',\psi'} (x_1 + \theta' x_2 + \theta'^2 x_3)\ ,$$

where for (I) θ', ϕ', ψ' are the roots of the cubic

$$t^3 - 3t + 1 = 0\ ,$$

of determinant -81 ; and for (II) of the cubic

$$t^3 + t + 1 = 0\ ,$$

of determinant 31. »

Comme le précise Mordell, la première conjecture sur les formes cubiques binaires implique la seconde sur le produit de trois formes linéaires.
C'est en fait Davenport qui répond à ces conjectures. Dans un article publié en 1941, il démontre que la conjecture pour les formes cubiques binaires est fausse[301]. Il donne un contre exemple pour l'hypothèse 2 énoncée par Mordell, mais il prouve un résultat plus fort puisqu'il justifie qu'il n'existe pas de constantes, mêmes différentes de $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ et $\sqrt[4]{\frac{1}{31}}$ proposées par Mordell, pour lesquelles la conjecture serait vraie. Les outils utilisés par Davenport sont issus de l'approximation diophantienne. D'abord des résultats sur les fractions continues, puis un cas particulier du théorème de Thue-Siegel : si θ est un nombre algébrique de degré 3, pour tout ε strictement positif, il existe un nombre

[297] MORDELL 1942 p.114.

[298] C'est-à-dire $\prod_{\theta,\phi,\psi} (x_1 + \theta x_2 + \theta^2 x_3)$.

[299] Il s'agit du cas où les formes sont à coefficients réels donc θ, ϕ, ψ sont les solutions de l'équation $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$.

[300] L_1 est à coefficients réels et L_2, L_3 à coefficients complexes conjugués, donc θ, ϕ, ψ sont les solutions de l'équation $t^3 - t - 1 = 0$.

[301] DAVENPORT 1941b.

positif K_ε tel que, pour tous les entiers x, y avec $y > 0$,

$$\left|\theta - \frac{x}{y}\right| > \frac{K_\varepsilon}{y^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}\,.$$

Davenport aborde aussi le problème pour le produit de trois formes linéaires homogènes. Dans le cas où deux des formes sont complexes conjuguées, il indique qu'un contre exemple peut être construit comme il l'a fait dans le cas des formes cubiques binaires. Par contre, Davenport annonce qu'il a démontré le cas réel.

Dans l'article dans lequel il propose une preuve simplifiée de son théorème sur le produit de trois formes linéaires à coefficients réels (voir le paragraphe 4.2.1.3), Davenport remarque[302]

> « In a later paper the method will be developed to give a much deeper result concerning the "second minimum" of $|L_1L_2L_3|$. »

En 1943, Davenport montre le résultat sous la forme[303]

> « Either (a) $M = \frac{1}{7}$ and L_1, L_2, L_3 are equivalent (in some order) to
>
> $$\lambda_1(u + \theta v + \phi w)\,, \quad \lambda_2(u + \phi v + \psi w)\,, \quad \lambda_3(u + \psi v + \theta w)\,,$$
>
> where θ, ϕ, ψ are the roots of $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$, and $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{7}$;
> or (b) $M = \frac{1}{9}$ and L_1, L_2, L_3 are equivalent (in some order) to
>
> $$\lambda_1(u + \theta' v + \phi' w)\,, \quad \lambda_2(u + \phi' v + \psi' w)\,, \quad \lambda_3(u + \psi' v + \theta' w)\,,$$
>
> where θ', ϕ', ψ' are the roots of $t^3 - 3t - 1 = 0$, and $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{9}$;
> or (c) $M < \frac{1}{9{,}1}$. »

L_1, L_2, L_3 sont ici des formes linéaires homogènes de trois variables, de déterminant 1, à coefficients réels et M la borne inférieure de $|L_1L_2L_3|$ quand les variables prennent des valeurs entières non toutes nulles. Nous retrouvons effectivement des notions déjà employées dans Davenport 1941a (par exemple les ensembles normaux) ainsi que des similitudes dans la démarche (utilisation de la réduction des formes quadratiques binaires etc...).

L'étude de ce phénomène de "minima isolés[304]" fait partie des thèmes que Davenport, ainsi que les élèves de Mordell et Davenport, vont continuer à développer par la suite

> « This provides an analogous 'isolation' situation similar to the well-known Markoff results for quadratic forms. In a joint paper with Rogers such isolation results and results asserting the existence of infinitely many solutions

[302] Davenport 1941a p.98.
[303] Davenport 1943b p.1.
[304] Pour une présentation modernisée de cette question voir Cassels 1959, en particulier le chapitre X.

were discussed in a general setting. This work was taken further by Rogers (1953) and J.W.S. Cassels & H.P.F. Swinnerton-Dyer (1955). Very recently Swinnerton-Dyer, by very subtle use of an electronic computer, has found a chain of 18 special forms so that the inequality $|L_1L_2L_3| \leq (1/17)\Delta$ can be satisfied unless $L_1L_2L_3$ is equivalent to one of the 18 forms[305]. »

4.3.4 Produit de formes linéaires non homogènes

Le problème du produit de formes linéaires non homogènes et la conjecture de Minkowski à ce sujet est un thème qui a intéressé Mordell depuis le début de son travail sur la géométrie des nombres. Il a joué aussi un rôle important à la fin des années 1920 et au début des années 1930 dans les choix de méthodes de Mordell. Entre 1937 et 1945, la dynamique de la recherche de Mordell et Davenport sur la géométrie des nombres est davantage guidée par la question du minimum des cubiques binaires et du produit de trois formes linéaires ternaires. Cependant le travail sur les formes non homogènes n'est pas abandonné pendant cette période et les deux mathématiciens consacrent quelques articles à ce sujet. Nous résumons ici les résultats obtenus en suivant la chronologie des publications.

D'abord en 1939, Davenport redémontre le résultat pour le produit de trois formes linéaires non homogènes[306]. Ce cas avait déjà été prouvé par Remak en 1923[307]. En suivant les notations de Davenport, rappelons d'abord l'énoncé de ce théorème. Si ξ, η et ζ sont trois formes linéaires à coefficients réels, de déterminant 1 et dont les variables sont notées u, v, w, alors pour n'importe quels nombres réels α, β, γ il existe des valeurs entières de u, v, w pour lesquelles

$$|\xi - \alpha|\,|\eta - \beta|\,|\zeta - \gamma| \leq \frac{1}{8}\,.$$

La preuve proposée par Davenport commence par le rappel d'un résultat déjà présent dans la démonstration originale de Remak : il existe des réels p, q, r tels que l'ellipsoïde défini par

$$p^2\xi^2 + q^2\eta^2 + r^2\zeta^2 = 1$$

ne contient aucun point à coordonnées entières dans son intérieur mais trois sur sa frontière qui n'appartiennent pas à un plan passant par l'origine. Ce lemme ainsi qu'un théorème sur le minimum des formes quadratiques quaternaires définies positives attri-

[305] Rogers et al. 1971 p.169.
[306] Davenport 1939c.
[307] Remak 1923b.

bué à Korkine et Zolotareff[308] lui permet d'obtenir l'existence d'un point à coordonnées entières qui vérifie

$$p^2(\xi-\alpha)^2+q^2(\eta-\beta)^2+r^2(\zeta-\gamma)^2 \;\le\; \frac{3}{4}\,(pqr)^{\frac{2}{3}}\ .$$

En appliquant enfin l'inégalité arithmético-géométrique, cela implique bien le résultat sur le produit des trois formes.

Mordell revient sur le cas général de cette conjecture de Minkowski en 1940 [309]. Rappelons que Minkowski avait conjecturé que pour n formes $L_r(x)+c_r=\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s+c_r$ à coefficients réels et de déterminant 1, il existe un $n-$uplet d'entiers (x) vérifiant

$$\prod_{r=1}^{n} |L_r(x)+c_r| \;\le\; \frac{1}{2^n}\ .$$

De plus, Minkowski avait démontré cette conjecture quand $n=2$ et d'autres preuves de ce cas ont ensuite été trouvées, par exemple par Mordell lui-même. Nous venons de voir que Davenport a publié peu de temps auparavant une preuve plus simple que celle de Remak pour $n=3$. Mordell indique qu'à sa connaissance aucun résultat général même plus faible n'a encore été trouvé pour n plus grand que quatre.
En ce qui concerne le cas où l'entier n est quelconque, Mordell revient sur la lettre de Siegel d'octobre 1937 que nous avons déjà évoquée dans laquelle Siegel propose une méthode qui lui permet de montrer l'existence d'une constante $M(n)$, indépendante des coefficients des formes, majorant le produit précédent. Mordell expose cette méthode lors de son séminaire et cela conduit Davenport à écrire son premier article sur le produit de formes linéaires[310]. Mordell rappelle ici l'estimation pour $M(n)$ à laquelle Davenport est parvenue :

$$M(n) \;\le\; \left[n\,2^{n-1}\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\,n)\ \frac{(n!)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})^n}\right]^n\ .$$

En fait, comme Mordell l'indique lui-même, une amélioration de cette inégalité a été donnée en 1934. Mais publié en russe cet article avait échappé à Mordell et c'est son auteur Nikolai Grigorievich Tschebotareff qui le lui signale. Tschebotareff a démontré

$$M(n) \;\le\; 2^{-\frac{1}{2}n}\,.$$

[308] Korkine et Zolotareff 1872.
[309] Mordell 1940b.
[310] Davenport 1937.

En reprenant la méthode de Tschebotareff, Mordell obtient une meilleure estimation de la constante $M(n)$:

$$M(n) \leq \frac{2^{-\frac{1}{2}n}}{1+(\sqrt{2}-1)^n} .$$

Mordell précise aussi que quelques jours après lui, Davenport a retrouvé ce résultat puis l'a même plus tard amélioré. Cela traduit une fois de plus le travail effectué en parallèle par ces deux mathématiciens autour de la géométrie des nombres[311]. Remarquons enfin que l'amélioration de l'estimation de Tschebotareff pour $M(n)$ de Mordell repose sur les majorations simultanées plus précises de formes linéaires qu'il avait démontrées environ deux ans plus tôt[312].
Les lettres de Tschebotareff à Mordell de cette période apportent des précisions sur cet épisode. Les deux mathématiciens avaient déjà eu des contacts épistolaires en 1931 au sujet des points rationnels sur les courbes. L'échange de lettres reprend en 1938 à propos de la conjecture de Minkowski sur les formes linéaires non homogènes. Dans une lettre du 24 février 1938 [313], Tschebotareff explique à Mordell qu'il vient de lire son intervention de 1936 au congrès international d'Oslo intitulée *Minkowski's Theorems and Hypotheses on Linear Forms*[314]. Dans cet article que nous avons rencontré plus haut, Mordell note l'absence de résultat pour $n > 3$. Tschebotareff écrit donc à Mordell pour lui faire part de son travail de 1934 dans une publication de l'université de Kazan. Il lui traduit en allemand quelques pages de son article afin que Mordell puisse prendre connaissance de son résultat et de la méthode employée[315] .

Fidèle à son idée que la diversité des points de vue sur des cas particuliers d'un problème doit permettre de développer de nouvelles méthodes pour démontrer le cas général, Mordell revient encore à deux reprises sur le produit de deux formes[316] au début des années 1940. Cette preuve, dont l'idée aurait aussi été découverte par Davenport indépendamment, utilise le théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans une partie convexes symétriques par rapport à un point. Pour Mordell, la preuve repose sur une idée géométrique[317]

> « The proof was suggested by geometric considerations and is essentially based on the fact that the four hyperbolas
>
> $$|(x-c)(y-c)| \leq c^2 , \quad |(x+c)(y+c)| \leq c^2 ,$$

[311] Nous avons pour l'instant pas trouvé à quel résultat de Davenport Mordell fait ici allusion.
[312] Voir Mordell 1937a.
[313] Mordell (St John's) Box 3, Folder 19.
[314] Mordell 1936.
[315] La lettre est reproduite en annexe.
[316] Mordell 1941c, 1943d.
[317] Mordell 1941c p.88.

enclose the parallelogram

$$|x-y| \leq 2c\,, \quad |x+y| \leq 4c\,,$$

whose sides $|x+y| = 4c$ each touch one hyperbola, while the sides $|x-y| = 2c$ each touch two of the hyperbolas. »

Il est rare que Mordell soit très explicite à ce sujet, mais nous pouvons noter ici qu'il reconnaît à la géométrie un rôle heuristique. Cette dernière citation montre aussi que la méthode employée par Mordell est la même que celle utilisée à propos des formes cubiques binaires. Il s'agit de déterminer un parallélogramme d'aire suffisamment grande dans le domaine qu'il étudie afin d'appliquer le théorème de Minkowski et de trouver ainsi des points du réseau. Dans des périodes précédentes, nous avons vu que le travail de Mordell était souvent guidée par une idée forte comme par exemple la formule sommatoire de Poisson ou bien à un autre moment le lemme de Smith. Au début des années 1940, il semble que cela soit ce principe de la recherche de parallélogrammes permettant l'application du théorème de Minkowski qui occupe cette place. Cette méthode est par ailleurs aussi utilisée par Davenport.
Nous donnons juste le résultat démontré par Mordell dans le dernier article sur les formes non homogènes de la période qui nous occupe. Il redémontre donc que pour $L = ax + by$, $M = cx + dy$ deux formes linéaires réelles de déterminant un et p, q des nombres réels[318]

« Theorem. (A) Integer values of x, y exist such that

$$|L+p|\,|M+q| \leq \frac{1}{4}\,. \qquad (1)$$

(B) If a/b is not rational, there is, for given $\varepsilon > 0$, an integer solution of (1) such that

$$0 < |L+p| < \varepsilon\,.$$

(C) If a/b, c/d are both rational, there are only a finite number of solutions of (1) unless $L+p=0$ or $M+q=0$ for integers x, y, and these give an infinity of trivial solutions of (1) in which one factor is zero.

(D) The result (A) is best possible, and the sign of equality in (1) is required when and only when

$$(L+p)\,(M+q) \sim \left(x+r+\frac{1}{2}\right)\left(y+s+\frac{1}{2}\right)$$

[318]Mordell 1943d p.218.

for a unimodular substitution (i.e. one of the form

$$x' = \alpha x + \beta y \ , \quad y' = \gamma x + \delta y \ ,$$

where α, β, γ, δ are integers, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), and integers r, s. »

Il ne s'agit pas d'un nouveau résultat. Mordell attribue (A), (D) et (C) à Minkowski et (B) à Blichfeldt. Il indique aussi que d'après R.Q. Seale, qui donne aussi une démonstration[319], la preuve de Blichfeldt apparaît dans son cours donné à l'université de Stanford en 1932. Nous trouvons effectivement ce théorème dans ce cours, l'idée de départ de Blichfeldt est de se ramener à un problème homogène en introduisant une variable supplémentaire[320].

Le produit de formes linéaires non homogènes est aussi un thème que Mordell et Davenport vont continuer à travailler après 1945. Mordell y reviendra tout au long de sa carrière, remarquons pour l'anecdote que le dernier article de Mordell recensé dans *Acta Arithmetica* est une note sur le produit de n formes non homogènes publiée en 1972 [321]. Davenport étudie ces produits de formes linéaires non homogènes en liaison avec les corps de nombres algébriques[322]. L'algorithme d'Euclide est valable dans un corps de nombres algébriques K, si pour tout élément λ de K, il existe un entier algébrique ξ tel que $|N(\xi - \lambda)| < 1$ [323]. N, qui désigne la norme sur le corps K, est en fait un produit de formes linéaires. Par exemple, pour un corps quadratique la condition précédente s'écrit

$$|(\xi - \lambda)(\xi' - \lambda')| \ < \ 1 \ ,$$

où les primes désigne les conjugués. Le calcul ou l'estimation du minimum euclidien

$$M(K) = \sup_{x \in K} \inf_{c \in \mathcal{O}_K} |N(x - c)|$$

d'un corps de nombres K ($\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de ce corps) est un sujet de recherche encore actif. La conjecture de Minkowski sur le produit de n formes linéaires non homogènes qui est liée à ce problème n'a pas encore été démontrée dans le cas général mais des démonstrations ont été trouvées pour $n \leq 6$ [324].

[319] SEALE 1935.
[320] BLICHFELDT 1932 p.29-37. Des précisions sur ce cours sont données au chapitre 6.
[321] MORDELL 1972.
[322] ROGERS ET AL. 1971 p.170-171.
[323] DAVENPORT 1949 p.883.
[324] Pour des détails sur ce problème ainsi que des références voir BAYER-FLUCKIGER et SUAREZ 2006; BAYER-FLUCKIGER 2006b.

4.3.5 Vers la géométrie des nombres pour des domaines non convexes

Une autre direction prise par les recherches de Mordell et Davenport sur la géométrie des nombres est l'étude de problèmes qui conduisent à des domaines non convexes. Ce nouvel intérêt va les amener à des résultats pour des domaines jusqu'alors peu étudiés mais va aussi modifier la perception de la géométrie des nombres. Le réseau de points est de plus en plus central dans la théorie. Le problème fondamental s'est déplacé de l'estimation de minima d'une fonction (forme) à celui de l'existence de points du réseau dans un domaine fixé. Cette existence est discutée selon les valeurs du déterminant du réseau. Les titres des articles de Mordell illustrent ce changement : « Lattice points in the region $|Ax^4 + By^4| \leq 1$ », « Lattice points in some n-dimensional non-convex regions »...

Dans ce nouveau cadre théorique, les théorèmes de Davenport sur le produit de trois formes linéaires homogènes et de Mordell sur les formes cubiques binaires sont considérés comme une première étape vers une théorie générale de la non convexité. Mordell s'exprime à plusieurs reprises à ce propos ce qui montre l'importance qu'il accorde à cet aspect de leur travail sur la géométrie des nombres :

> « My method of proof is geometrical and gives the first simple instance of best possible results for a non-convex plane region bounded by curves of degree greater than two[325]. »

> « The method of finding the results for the binary cubic meant that the geometry of numbers for nonconvex regions was no longer a closed book[326]. »

> « The emphasis, however, was on convex regions.
> The first real approach to non-convex regions was made by Davenport when the region R is defined by
>
> $$f(x_1, x_2, x_3) = \prod_{r=1}^{3} \left| \sum_{s=1}^{3} a_{rs} x_s \right| \leq 1 ,$$
>
> where either the a_{rs} are all real, or the a_{1s} are real and the a_{2s}, a_{3s} are conjugate complex numbers. He found the best possible result for the minimum of $f(x_1, x_2, x_3)$ by considering non-convex two-dimensional regions, very complicated in the second case, but this did not lead to any similar general results for non-convex regions.
> The first vital breach was made by Mordell in 1940 when the region R was defined by $|f(x, y)| \leq 1$ where $f(x, y)$ is a binary cubic form with real

[325] Mordell 1941b p.85.
[326] Mordell 1946a p.276.

coefficients[327]. »

« The new method employed for the binary cubic led to great developments in the Geometry of Numbers. Previously only convex regions had been studied, but now the road was open to the study of non-convex regions[328]. »

Pour Mordell, cette théorie de la non convexité devient possible grâce à la méthode de démonstration qu'il a développée pour les formes cubiques binaires. Comme il le montre dans les travaux à ce sujet, elle permet en effet d'aborder des domaines non convexes en utilisant des parallélogrammes auxquels il peut appliquer le théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans des parties convexes. Dans un long article[329] (52 pages) rédigé en 1941 et publié en 1945, il étudie par exemple le domaine

$$|x|^p + |y|^p \ \leq\ 1$$

pour $0 < p < 1$, il démontre aussi

« Theorem 3. Let

$$f(x, y) = x + y + [(\lambda^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2xy]^{\frac{1}{2}} ,$$

where $1 \leq \lambda < \sqrt{2}$. Then a point other than the origin of every lattice of determinant $\Delta > 0$ lies in the region

$$f(|x|, |y|) \ \leq\ [\lambda^2 + 2 + (-\lambda^4 + 12\lambda^2 - 4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\, \Delta^{\frac{1}{2}} .$$

This is the best possible result. There are exactly two critical lattices[330]. »

Il obtient des résultats similaires pour

$$f(x, y) = \min(x + my\ ,\ y + mx)\ ,$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq 1$ ou encore $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)$. Dans un autre article[331], il s'intéresse au domaine $|Ax^4 + By^4| \leq 1$ et il revient plus particulièrement sur $|x^4 - y^4| \leq 1$ et $|x^4 + y^4| \leq 1$. Il montre le théorème

« Theorem. Let A, B be real numbers and $AB \neq 0$. Then a point, other than the origin, of every lattice L, of determinant $\Delta > 0$, satisfies the inequality[332]

$$|Ax^4 + By^4| \ \leq\ K\, |AB|^{\frac{1}{2}}\, \Delta^2 ,$$

[327] Mordell 1961 p.90-91.
[328] Mordell 1971d p.10.
[329] Mordell 1945b.
[330] Mordell 1945b p.361.
[331] Mordell 1941a.
[332] Mordell 1941a p.152.

where $K = 4/\sqrt{17}$ if $AB < 0$, $K = 2/(2\sqrt{6} - 3)$ if $AB > 0$. »

Ces nouvelles questions sont réellement perçues comme étant à l'origine d'un nouveau champ de recherche

> « These remarks make clear that the geometry of numbers in non-convex domains offers far more interesting possibilities than the theory for convex regions, and has now become a most promising field for further investigation and future research[333]. »

Dans ce nouveau courant de recherche, l'accent est mis sur l'existence de points de réseau dans un domaine donné, sur la détermination de réseaux critiques et du déterminant critique. Ces questions deviennent fondamentales alors qu'elles ne l'étaient pas encore dans les premiers articles sur les formes cubiques binaires, où les problèmes étaient formulés différemment. La traduction du problème du minimum des formes cubiques binaires en terme de points d'un réseau dans le domaine $|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1$ n'était alors vue que comme une étape de la démonstration. D'ailleurs, que cela soit dans les premiers articles sur les formes cubiques binaires ou dans ceux sur le produit de trois formes linéaires homogènes, l'accent n'est pas mis sur la non convexité des domaines étudiés. Il semble donc qu'il s'agisse d'une relecture de ces résultats et méthodes *a posteriori* (bien que peu de temps après) qui conduit Mordell et Davenport à les envisager dans le contexte plus général d'une géométrie des nombres des domaines non-convexes - « géométrie des nombres » prenant alors le sens de la recherche des conditions pour lesquelles un réseau possède un point différent de l'origine dans un domaine fixé.

Conclusion

Cette étude du travail de Mordell et Davenport sur la géométrie des nombres fait déjà apparaître une autre conception de cette discipline par rapport à celle de Minkowski. La géométrie des nombres n'est plus organisée avec Mordell et Davenport autour d'un théorème fondamental ou d'une méthode qu'il s'agit d'appliquer dans des situations variées. La discipline est structurée par un certain nombre de problèmes à résoudre. Ces problèmes peuvent être étudiés de manière largement indépendante, d'autres, comme par exemple le produit de trois formes linéaires homogènes et le minimum des formes cubiques binaires, sont liés. Les objets fondamentaux dans la géométrie des nombres de Mordell et Davenport sont par conséquent ceux qui interviennent dans ces problèmes : les formes linéaires homogènes ou non homogènes, leurs produits, les formes quadratiques, les formes cubiques... De l'image d'une discipline unifiée avec

[333] Mordell 1945b p.350.

Minkowski, nous sommes donc passés, avec Mordell et Davenport, à l'image d'un domaine fractionné en différentes questions.

Pour Mordell et Davenport, l'introduction d'un point de vue géométrique en théorie des nombres dans le cadre de la géométrie des nombres consiste en la traduction de problèmes arithmétiques par la recherche de points d'un réseau dans un domaine fixé :

> « Many questions in the theory of numbers can be expressed in the form : Does a particular region contain a lattice point, or under what conditions is this the case ? This geometrical approach led Minkowski to many important theorems. It is also valuable in suggesting new and interesting questions, even when it does not provide any means for answering them[334]. »

Cependant, la géométrie n'occupe pas non plus chez Mordell et Davenport le rôle central qu'elle avait avec Minkowski. Ce changement est bien illustré par la succession des points de vue adoptés par Mordell au cours de ces recherches : analytique, arithmétique ou géométrique.
Des utilisations spécifiques de la géométrie ont pu quand même être constatées à travers plusieurs commentaires ponctuels et isolés de Mordell et Davenport, ainsi qu'en comparant des articles publiés et des notes non publiées de Davenport.
Contrairement à ce qui a été observé chez Minkowski, quand elle intervient la géométrie n'est presque jamais associée à l'intuition. Une seule mention de l'intuition a été rencontrée dans le cadre de la géométrie des nombres chez Mordell :

> « Geometrical intuition and ideas seem to be very relevant for some of the problems and occasionally the arithmetic aspect seems to have disappeared[335]. »

Comme le suggère la fin de la citation précédente de Davenport, à certaines occasions, la géométrie semble être employée à des fins heuristiques, en particulier dans la recherche de l'« idée » d'une preuve. Rappelons à ce sujet que Mordell distingue souvent dans une démonstration l'enchaînement logique des arguments de l'« idée principale » qui permet « de voir la démonstration dans son ensemble[336] », c'est cette idée qui renferme

> « the why and wherefore of the procedure or [on] the origin of the proof or why it succeeds[337]. »

Le rôle de la géométrie dans la découverte de l'idée de la preuve est apparu par exemple dans la lettre de Mordell à Davenport du 25 septembre 1933 où il discute de l'hypothèse de convexité dans le théorème de Minkowski à propos de la démonstration arithmétique qu'il en donne. Davenport semble attribuer une place précise à la géométrie et à

[334] Davenport 1947a p.104.
[335] Mordell 1961 p.93.
[336] Mordell 1959 p.11.
[337] Mordell 1959 p.11.

l'analyse ou l'arithmétique selon le moment du processus de recherche dans lequel il se trouve. Cela a été illustré en particulier par son travail sur le théorème sur le produit de trois formes linéaires homogènes pour lequel l'origine géométrique de certaines preuves disparaît dans les publications.
La dimension heuristique qu'apporte la géométrie ou peut-être même plus généralement une autre discipline dans la géométrie des nombres est reconnue dans le travail de leurs prédecesseurs :

> « the proofs of both Minkowski's theorem and Blichfeldt's theorem, when expressed in the proper professional form, need no reference to the geometry or to matter[338]. They are expressed in terms which involve numbers only but nevertheless that is where the idea come from[339]. »

Un autre aspect de la géométrie chez Minkowski souligné par Davenport est la généralité :

> « Minkowski found a semi-geometrical interpretation of the problem which suggested to him arguments which proved to be of great generality and power[340]. »

Le peu de commentaires sur cette question rend difficile leur interprétation, mais Mordell et Davenport font référence à plusieurs reprises au caractère plus général des arguments géométriques dans leur propre travail (voir page 327).

Tout cela montre que les critères pour caractériser la géométrie des nombres comme discipline chez Minkowski ne peuvent être conservés dans le cas de Mordell. En particulier, l'étude de la géométrie des nombres chez Mordell à l'échelle de sa pratique des mathématiques a mis en évidence sa collaboration avec Davenport. Cette observation suggère que dans leur cas, des phénomènes collectifs doivent être pris en compte pour comprendre le développement de la géométrie des nombres comme discipline. Nous sommes donc conduit à regarder le travail de Mordell à une autre échelle afin d'approfondir ces facteurs collectifs.

[338] La référence à la matière renvoie à l'utilisation par Blichfeldt de sphères matérielles pour estimer la constante γ_n intervenant dans l'étude du minimum des formes quadratiques.
[339] Davenport 1946a.
[340] Davenport 1946a.

Chapitre 5

L'« Ecole » de Mordell

Sommaire

À travers la collaboration entre Mordell et Davenport, le chapitre précédent a montré que les facteurs sociaux sont pertinents pour rendre compte de la géométrie des nombres telle qu'elle est développée par ces mathématiciens. Ces aspects sont abordés maintenant en exploitant de nouvelles sources, en particulier leur correspondance. Cette remarque sur l'importance des facteurs collectifs est confirmée par plusieurs commentaires sur la création autour de Mordell d'une école de recherche spécialisée en théorie des nombres. Ces commentaires viennent de mathématiciens qui observent ce groupe de l'extérieur (nous en donnerons des exemples dans la suite) mais aussi de Mordell lui-même. Dans ses *Reminiscenses of an Octogenarian Mathematician*, il revient sur sa carrière et en particulier sur ces années à Manchester puis à Cambridge :

> « Fortune was kind to me, and in later years I gathered around myself some brilliant young mathematicians as members of my staff or research students. There were Professor H. Davenport, F.R.S., now at Cambridge (but who recently died), Professor K. Mahler, F.R.S., Professor at Manchester, Canberra, and Ohio State University, and Dr. P. Erdös, Professor at the Hungarian Academy of Science, all of whom have acquired world wide reputations.

> [...] It is not often that such a brilliant young trio could be found anywhere. We had also Professor B. Segre, an Italian emigré, now President of the Lincei Academy at Rome, and H. Heilbronn, F.R.S., Professor at Bristol and Toronto. It is not surprising that mathematics flourished and that the Manchester School became well known. As a result, I shone with a great deal of reflected glory.
> [...] I was very fortunate again at Cambridge in having some very bright students. This was perhaps the beginning of the new number theory school here, now one of the best in the world under the leadership of (the late) Professor Davenport and Professor Cassels, both of whom I am proud to say were my former students[1]. »

La notion d'« école », qui est utilisée par plusieurs mathématiciens à propos de la carrière de Mordell, est aussi une catégorie d'analyse employée en histoire des sciences. Un des articles considérés comme fondateurs de cette tradition historiographique est celui sur Liebig et Thomson de Jack B. Morrell[2].
Dans cet article publié en 1972, l'objectif de Morrell est de comparer deux écoles de recherche en chimie : le laboratoire de Justus von Liebig à l'université de Giessen et celui de Thomas Thomson à l'université de Glasgow[3]. Pour cela, il propose des critères pour juger de la réussite d'une école de recherche. Ces critères sont à la fois intellectuels, institutionnels, techniques, psychologiques et financiers. Pour Morrell, une école doit avoir un directeur qui supervise un programme de recherche trop important pour qu'il puisse être réalisé par une seule personne. Ce directeur doit posséder des moyens institutionnels, du charisme et il est préférable qu'il ait une forte réputation dans son domaine de recherche. L'école doit accueillir régulièrement de nouveaux étudiants qui ont à leur disposition un petit ensemble de méthodes de recherche simples permettant d'arriver rapidement à de nouveaux résultats. Enfin, les membres de l'école doivent avoir des moyens de publication et des moyens financiers. Morrell indique lui-même certaines limites du modèle qu'il propose : d'une part, il s'agit de critères adaptés pour des « laboratory-based research school » dans la première moitié du XIX^{e} siècle, d'autre part, ils ont été construits pour rendre compte du succès de l'école de Liebig en comparaison de celle de Thomson. Malgré ces réserves, Morrell juge que la notion d'école ainsi que les critères qu'il propose est une approche fructueuse pour l'historien.
Cependant, Gerald Geison constate en 1981 que cette catégorie d'analyse a été négligée. Geison revient sur les critères de Morrell mais donne aussi sa propre définition :

> « small groups of mature scientists pursuing a reasonably coherent programme of research side-by-side with advanced students in the same insti-

[1] Mordell 1971b p.958.
[2] Voir par exemple la synthèse de John Servos, Servos 1993.
[3] Morrell 1972.

> tutional context and engaging in direct, continuous social and intellectual interaction[4]. »

Il insiste aussi sur la nécessité pour une école d'être ouverte sur l'extérieur[5].
En 2004, Karen Parshall souligne que la notion d'école a souvent été utilisée en histoire des mathématiques sans qu'elle ait été définie de manière précise. De plus, les caractérisations proposées pour les autres sciences concernent essentiellement les sciences de laboratoires et les critères apparaissent comme peu adaptés aux mathématiques[6]. En modifiant les critères de Morrell et de Geison, elle donne une caractérisation des écoles de recherche en mathématiques qui tient compte des spécificités de cette discipline. Pour Parshall, une école est définie par un leader qui défend une idée fondamentale ou une approche particulière pour un ensemble de problèmes. Ensuite, ce leader doit former des étudiants et leur inculquer son approche des problèmes et sa conception de la recherche. Par la suite, ces étudiants doivent poursuivre leur propre travail de recherche dans le même esprit. Enfin les publications des membres de l'école sont le signe de la reconnaissance des recherches effectuées et elles valident le point de vue du leader dont les idées peuvent être reprises plus largement[7].
Dans ce qui suit nous verrons que cette définition ne rend pas compte de la dynamique des recherches effectuées autour de Mordell. En particulier parce qu'elle ne décrit qu'un seul type de relation entre les individus participant au développement de l'école : celle du leader avec des étudiants. Ensuite, parce que la conception du rôle de ce leader qui s'en dégage ne correspond pas à la place qu'occupe Mordell à Manchester et à Cambridge.

5.1 Premiers indices de la reconnaissance de Manchester comme école de recherche

Dans son article biographique sur Mordell, Cassels revient longuement sur le rôle qu'il tient d'abord à Manchester puis à Cambridge :

> « During the thirties Mordell built up a strong school of mathematics at Manchester and one which attracted many visitors [...] As Davenport rightly says, 'When one recalls the very small scale of mathematical activity in that age, both in England and in the world at large, as compared with the activity today, one realizes that Mordell at Manchester exercised

[4]Geison 1981 p.23.
[5]Geison 1981 p.35.
[6]Parshall 2004 p.271-272.
[7]Parshall 2004 p.274.

> a notable influence'.
> Davenport adds, 'Those who served under him as junior members of staff found him an admirable head of department. He was conscious of his responsibilities, and made us very conscious of ours, but at the same time he did everything possible to encourage us in our researches, and this independently of whether their subject matter interested him personally or not'. His usual morning greeting was 'What's your news ?' so that one almost felt obliged to produce some new mathematical result for him. For undergraduate courses he made the rule that after each lecture the lecturer had to make a record of the material covered. This was not merely useful in constructing the syllabus next year. If for some unavoidable reason the lecturer was unable to continue then someone else was detailed to give the missing lecture from the point reached[8]. »

Cette citation laisse entrevoir différentes caractéristiques de l'intervention de Mordell. D'abord l'environnement qu'il a créé est reconnu non seulement en Angleterre mais aussi à l'étranger, ce qui attire de nombreux visiteurs. Nous le verrons, ces visiteurs sont aussi bien des étudiants voulant continuer leur formation que des chercheurs déjà confirmés. Cassels et Davenport insistent aussi sur les encouragements de Mordell envers ses collaborateurs qui influencent ainsi le développement de leurs recherches. À un autre niveau, Mordell joue un rôle dans l'organisation de l'enseignement et comme le montre l'anecdote racontée par Cassels pas seulement pour les étudiants les plus avancés.

Mordell arrive à Manchester en 1920, d'abord au Manchester College of Technology puis à partir de 1922 à l'université de Manchester où il reste jusqu'en 1945. Dès 1924 dans une lettre à Hardy, Mordell reconnaît lui-même la dynamique qui est en train d'être créée à Manchester. Alors qu'il est à Chicago, il a entendu parlé de postes de professeur à Liverpool, Sheffield et Londres, il confie son impression à ce sujet à Hardy :

> « But I don't think Liverpool or Sheffield are in the same class as Manchester (i.e mathematically) which seems to be developing a large math school. Further we are starting graduate work this coming year which we hope may develop.
> I am not so sure about London. I would rather be in Manchester University than London University although of course Manchester is not so pleasant a town (climatically etc) as London[9]. »

[8] Cassels 1973 p.502-503.

[9] Lettre de Mordell à Hardy du 24 juillet (1924), Mordell (St John's), box 1, folder 8. L'année n'est pas précisée sur la lettre, 1924 est celle attribuée par l'archiviste.

Mordell a donc conscience de ce qui se met en place à Manchester et nous voyons le volontarisme qui est mis dans l'enseignement pour y développer les mathématiques. La réussite de Manchester dans les années 1920 est une source de fierté pour Mordell. D'après Cassels[10], il ressortait souvent à la fin de sa vie une photo de jeunes mathématiciens de ces années à Manchester en insistant sur le fait qu'ils sont tous devenus professeurs par la suite (voir la figure 5.1 [11]).

En 1931, Mordell envisage de quitter Manchester attiré par d'autres opportunités à Oxford ou Cambridge. Dans une lettre à Hardy il explique les raisons pour lesquelles il veut partir et ses arguments montrent ce qu'il juge important pour développer des recherches dans de bonnes conditions[12]. Il voudrait d'abord plus de temps pour la recherche et donc être moins pris par des tâches administratives. De plus, il juge que son travail a atteint une certaine reconnaissance et qu'il serait profitable qu'il soit en contact avec plus d'étudiants susceptibles de se diriger vers les mathématiques (« a more mature class of students »). Il souhaiterait enfin pouvoir organiser un séminaire centré sur ses recherches. En fait, cette lettre de Mordell apparaît comme un acte de candidature officieux pour un poste à Oxford : il prend la peine de faire écrire la lettre par quelqu'un d'autre (son écriture étant souvent presque illisible) et il donne implicitement son autorisation pour que Hardy la fasse circuler. Mordell a en effet conscience qu'il n'est pas favori pour ce poste ce qu'il semble attribuer à son manque de connection avec Oxford par rapport à celui qu'il voit comme son principal concurrent Edward C. Titchmarsh. Il n'obtient effectivement pas ce poste qui revient finalement à Titchmarsh mais cet épisode montre que Mordell accorde une place importante à la transmission dans son activité de chercheur.
Dans une lettre où il regrette que Mordell n'ait pas eu ce poste à Oxford, Edward Arthur Milne note en guise de consolation

> « But at any rate at Manchester you have a department of your own, and all the world knows what a fine amount of original work you are turning out[13]. »

Malgré les doutes exprimés par Mordell en 1931, Manchester finit par être reconnue comme centre de recherche en mathématiques et Mordell est associé à l'image de Manchester :

---

10. Cassels 1973 p.503.

11. Mordell (St John's), box 4, folder 41. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge. Nous avons trouvé cette photo dans les archives de Mordell à Cambridge et il est très probable que c'est celle qui est mentionnée par Cassels. Le catalogue de la bibliothèque indique qu'il s'agit d'une photo du personnel de Manchester en 1925. Mordell se trouve au premier rang en quatrième position en partant de la gauche. On peut reconnaître Davenport à la gauche de Mordell : c'est possible car en 1925 il était étudiant à Manchester. Ceci suggère qu'il doit y avoir sur cette photo à la fois des étudiants et des enseignants.

12. Lettre de Mordell à Hardy de 1931, Mordell (St John's), box 1, folder 8.

13. Lettre de Milne à Mordell du 10 septembre 1931, Mordell (St John's), box 2, folder 18.

Fig. 5.1 – Photo à Manchester en 1925

> « Hope all is well for you and the Manchester school[14]. »

D'ailleurs, c'est sur le terrain de la théorie des nombres, sujet préféré de Mordell, que Manchester acquiert sa réputation. Par exemple, alors qu'il postule pour obtenir le Bishop Harvey Goodwin Mathematical Scholarship pour l'année 1934-1935, Fritz John remarque

> « My special interests in the theory of numbers suggest that Manchester would be a suitable place for me to continue my work[15]. »

En 1938, nous avons un autre témoignage de la reconnaissance de Manchester comme centre important de recherches en théorie des nombres quand Salomon Lubelski demande à Mordell de faire parti du comité de rédaction de *Acta Arithmetica*

> « Jetzt, sehr verehrter Herr Professor, ist es mir sehr angenehm zu betonen, dass Ihre zahlentheoretische Schule in Mantchester (sic) heute zum grössten zahlentheoretischen Collegium geworden ist. Es wird also ganz natürlich sein, dass ich mich an Sie mit des Proposition wende, einzuwilligen dem engeren Redaktionskomitee anzugehören[16]. »

Dans la suite nous essayons de donner des détails sur le fonctionnement de ce groupe constitué autour de Mordell. D'abord en récoltant des indices sur la manière dont enseignement et recherche s'effectuent au sein du groupe, ensuite sur les contacts de Mordell à l'extérieur. Enfin, nous donnerons quelques éléments sur le travail administratif de Mordell.

5.2 Enseignement et recherche sous l'influence de Mordell

5.2.1 Enseignement à Manchester et Cambridge

Nous avons en fait assez peu de traces des activités d'enseignement de Mordell à Manchester. Il aurait donné entre 1923 et 1926 des cours d'analyse complexe qui aurait été suivis par Davenport[17] alors qu'il était étudiant. Nous avons aussi trouvé dans les archives de Mordell des listes d'élèves datées de l'été 1923 pour des cours sur les

[14] Lettre de Herbert W. Richmond à Mordell du 6 juillet 1943, Mordell (St John's), box 3, folder 25.

[15] Lettre de F. John à Mordell du 18 mai 1934, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

[16] « Maintenant, Monsieur le Professeur, il m'est très agréable de souligner que votre école arithmétique à Mantchester (sic) est devenue maintenant le plus grand Collegium de théorie des nombres. Il sera donc tout naturel que je me tourne vers vous avec la proposition que vous consentiez à faire partie du comité de rédaction restreint. », lettre de Lubelski à Mordell du 7 avril 1938, Mordell (St John's), box 2, folder 16.

[17] Rogers et al. 1971 p.159.

intégrales définies et la théorie analytique des nombres. Sur ces listes chaque étudiant indique son nom ainsi que son université et il s'agit exclusivement ici d'universités américaines. Ces cours ont donc été très certainement professés aux Etats Unis, il est cependant possible qu'il ait abordé les mêmes thèmes à Manchester. Un témoignage de John A. Todd atteste du bon niveau des étudiants de Manchester du début des années 1930. En 1931, Todd arrive à l'université de Manchester où il a obtenu un assistant lectureship. Il se voit accorder en 1933 un Rockefeller Fellowship pour aller à Princeton afin de travailler avec Lefchetz[18]. Le 26 octobre 1933, Todd écrit à Mordell pour lui donner de ses nouvelles, il juge alors le niveau des étudiants à Manchester meilleur qu'à Princeton

> « I [...] have made amazing discoveries (?) the calibre of certain members of his audience, to whom the notation "d^2s" is a mystery and who have the strangest idea on one parameter families of curves. Some of the questions asked in class would shame many Manchester audiences - and these are graduates[19] ! »

Les étudiants en mathématiques à Manchester de cette époque suivent un cursus *Honours in Mathematics*. La formation dure trois ans (Part I, II et III) et les étudiants assistent à environ six heures de cours de sciences par semaine. Nous donnons la liste de ces cours pour les années 1919-1920, 1929-1930 et 1939-1940 dans le tableau 5.1 [20].

Nous ne savons pas si Mordell est responsable du cours de théorie des nombres qui fait son apparition en 1939 ou encore s'il intègre dans ses cours la géométrie des nombres. Cependant, le 28 novembre 1945, Freeman Dyson écrit à Mordell :

> « I return with thanks your lecture on the geometry of numbers. It is certainly helpful in giving a better grasp of the present state of the subject as a whole than is to be got from the published papers[21]. »

La date de cette lettre laisse penser que ce cours sur la géométrie des nombres de Mordell a été donné alors qu'il se trouve encore à l'université de Manchester. À cette époque, aucun cours ou livre portant exclusivement sur la géométrie des nombres n'a encore été publié (à part ceux de Minkowski), ce qui explique la fin de la citation de Dyson car les articles sont la seule source pour étudier les développements récents de la théorie.
Davenport mentionne enfin un cours de Mordell à Cambridge pendant l'hiver 1933-1934 alors qu'il est encore à Manchester[22], cette invitation est aussi un signe de reconnais-

[18]Lettre de Mordell à Hardy du 1[er] mai 1933, MORDELL (St John's), box 1, folder 8.
[19]Lettre de Todd à Mordell du 26 octobre 1933, MORDELL (St John's), box 3, folder 32.
[20]Ces informations sont extraites de la base de données *Britmath* réalisée par June Barrow-Green.
[21]Lettre de Dyson à Mordell du 28 novembre 1945, MORDELL (St John's), box 3, folder 19.
[22]Lettre de Davenport à Mordell du 11 juillet 1933, MORDELL (St John's), box 1, folder 4.

Année 1919-1920	
Part I	algebra ; plane and spherical trigonometry ; elementary solid geometry ; analytical plane geometry ; infinitesimal calculus ; elementary mechanics (without calculus)
Part II	analytical plane and solid geometry ; differential and integral calculus ; ordinary differential equations ; statics and hydrostatics ; two-dimensional dynamics
Part III	differential equations ; functions of a complex variable ; statics and dynamics mainly 2 dimensional ; projective geometry ; higher plane curves ; differential solid geometry ; theory of infinite series ; definite integrals ; theory of functions ; statics and dynamics (3 dimensional) ; dynamics of material systems in general ; theory of vibrations ; attractions ; elementary hydrodynamics ; vibrations of strings ; bars and air columns
Année 1929-1930	
Part I	algebra ; plane and spherical trigonometry ; elementary pure and analytical geometry ; elementary infinitésimal calculus ; elementary statics ; dynamics and hydrostatics
Part II	pure and analytical (plane and solid) geometry ; infinitesimal calculus ; ordinary differential equations ; statics (2 and 3 dimensional) ; dynamics of a particle (2 and 3 dimensional) ; rigid dynamics
Part III	higher geometry ; theory of functions ; differential equations ; rigid dynamics (3 dimensional) ; theory of the potential (including gravitational and electrostatics) ; elasticity and elementary hydrostatics
Année 1939-1940	
Part I	elementary analysis comprising algebra, calculus, elementary differential equations ; elementary pure analytical and differential geometry ; elementary statics ; dynamics and hydrostatics
Part II	theory of functions of real and complex variables ; differential equations ; plane, solid and differential geometry ; statics and dynamics (2 and 3 dimensional) ; mathematical theory of electricity and magnetism
Part III	theory of functions ; theory of numbers ; higher geometry ; differential equations ; dynamics ; theory of vibrations and wave motions ; hydrodynamics ; electromagnetic theory

Tab. 5.1: Cours de mathématiques à Manchester

sance de son travail.

Il y a plus d'indices et de témoignages sur les activités d'enseignement de Mordell à Cambridge à partir de 1945. D'après Cassels, Mordell propose alors des cours sur les équations diophantiennes, les nombres algébriques et la géométrie des nombres. Ces cours s'adressent à des étudiants avancés, ceux qui préparent la troisième partie du Tripos, et sont aussi suivis par des Research Students[23]. Cela est confirmé par divers documents trouvés dans les archives de Mordell. Nous avons d'abord des notes de Mordell pour ce qui est certainement des questions pour des examens. Ces questions portent justement sur les trois thèmes évoqués par Cassels (voir les figures 5.2, 5.3 et 5.4 [24]).

Ensuite, nous avons retrouvé des notes de cours manuscrites concernant la géométrie des nombres. Ces notes ne sont pas datées mais la mention d'un résultat sur les formes linéaires publié en 1948 permet de dire que ce cours a été donné à Cambridge. Dans le même dossier contenant le cours sur la géométrie des nombres se trouvent aussi plusieurs listes d'étudiants ayant certainement suivi des cours de Mordell et en particulier celui sur la géométrie des nombres[25]. Il s'agit de listes manuscrites où chaque étudiant a inscrit lui-même son nom, le College auquel il est rattaché ainsi que son niveau d'étude (pour un exemple voir la figure 5.5 [26]).

Une de ces listes est datée de 1946, une autre de 1947-1948 et enfin une seule précise qu'il s'agit d'un cours sur les équations diophantiennes en 1951. Comme les mêmes noms reviennent sur toutes les autres listes, elles sont probablement toutes de la même époque.
Nous avons relevé tous les noms qui apparaissent au moins sur une des listes, nous les donnons par ordre alphabétique[27] :

1. A.J. Amin
2. A.O.L. Atkin
3. R.P. Bambah
4. E.S. Barnes
5. A.V. Boyd
6. M. Campbell
7. J.W.S. Cassels
8. J.H.H. Chalk
9. K.L. Chang
10. R.F. Churchhouse
11. L.E. Clarke
12. P.M. Cohn
13. C.S. Davis
14. G.A. Dirac
15. J.L. Dixon
16. M.P. Drazin
17. H.G. Eggleston
18. G.D. Findlay

[23]Cassels 1973 p.506.
[24]Mordell (St John's), box 7. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[25]Mordell (St John's), box 7. Des détails sur ce cours sont donnés dans le chapitre 6.
[26]Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[27]16 noms trop difficiles à lire n'ont pas été mentionnés.

FIG. 5.2 – Problèmes sur les équations diophantiennes

FIG. 5.3 – Problèmes sur les nombres algébriques

Fig. 5.4 – Problèmes sur la géométrie des nombres

FIG. 5.5 – Liste d'étudiants présents à un cours de Mordell

19. C.S. Fu
20. K.S. Gangadharan
21. F.W. Gehring
22. G. Gregory
23. J.S. Griffith
24. V.W.D. Hale
25. R. Harrop
26. C.B. Haselgrove
27. C.J. Heywood
28. H.E. Hogg
29. J. Hunter
30. D.R. Iaunt
31. O.S. Icen
32. H.A. Ihurston
33. A.J. Knight
34. M.J. Lighthill
35. G.B. Longden
36. G.S. Lowden
37. A.M. Macbeath
38. E.A. Mac Harg
39. G.F.M. Mayo
40. H. Meier
41. G.R. Morris
42. P. Matthews
43. P. Mullender
44. P.C. Parks
45. W.B. Pennington
46. A.J. Pillow
47. R.A. Rankin
48. K. Rogers
49. E. Rowland
50. P.A. Samet
51. D.B. Sawyer
52. E.S. Selmer
53. W.A.C. Smith
54. G.K. Stanley

55. P. Swinnerton-Dyer 56. J.C. Tanner 57. G. Vincent
58. F.J. Walker 59. E.G. Watson 60. D.J. Wheeler

Certains des étudiants précédents ont pu être identifiés en utilisant le site *Genealogy Project*[28] ce qui permet d'avoir une idée des sujets de recherche qu'ils choisissent par la suite. Quand ces informations sont disponibles, nous avons indiqué dans le tableau 5.2 l'année d'obtention et le titre de la thèse ainsi que l'université dans laquelle elle a été soutenue[29].

Nom	**Année/Univ.**	**Titre de la thèse donné sur le site**
Atkin A.O.L.	1952/Cambridge	*Two Problems of Additive Number Theory*
Bambah R.P.		
Barnes E.S.	1952/Cambridge	*Minimal Problems for Quadratic and Bilinear Forms*
Cassels J.W.S.	1949/Cambridge	
Chalk J.H.H.	1952/Cambridge	*Diophantine Inequalities*
Churchhouse R.F.	1952/Cambridge	*On the Geometry of Numbers in some non-convex Regions*
Clarke L.E.	1954/Cambridge	*Some Results in the Geometry of Numbers*
Cohn P.M.	1952/Cambridge	*Integral Modules, Lie Rings and Free Groups*
Davis S.D.	1949/Cambridge	*The Minimum of a binary Quartic Form*
Dirac G.A.	1952/Londres	*On the Colouring of Graphs : Combinatorial topology of Linear Complexes*
Drazin M.P.	1953/Cambridge	*Contributions to Abstract Algebra*
Findlay G.D.	1958/Cambridge	*A Class of Monomial Groups*
Gangadharan K.S.	1953/Cambridge	*Two Classical Lattice-Point Problems*
Gehring F.W.	1952/Cambridge	*A Study of the pth Power Variation*
Hale V.W.D.	1952/Cambridge	*Quasi-Groups and Loops associated with Steiner Systems*
		voir la suite page suivante

[28] L'adresse de ce site internet est `http://www.genealogy.ams.org/`.

[29] Ces informations sont cependant à prendre avec précaution. Il est par exemple étrange que le titre des thèses de Cassels et de Swinnerton-Dyer ne soit pas indiqué alors qu'ils sont parmi les mathématiciens les plus célèbres de cette liste.

Nom	Année/Univ.	Titre de la thèse donné sur le site
Harrop R.	1953/Cambridge	*An Investigation of the Propositional Calculus used in a Particular System of Logic*
Haselgrove C.B.	1956/Cambridge	*Some Theorems in the Analytic Theory of Numbers*
Higgins P.J.	1954/Cambridge	*Two Topics in Abstract Algebra*
Hunter J.	1953/Cambridge	*Minimum Discriminants of Algebraic Number Fields*
Icen O.S.	1955/Göttingen	*Eine Verallgemeinerung und Uebertragung der Schneider'schen Algebraizitaetskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen*
Lighthill M.J.		
Knight A.J.	1955/Cambridge	*Some New Contributions to the theory of Abelian Varieties with Applications*
Macbeath A.M.	1950/Princeton	*The Geometry of Non-Homogeneous Lattices*
Morris G.R.	1953/Cambridge	*Some Topics on the Theory of Non-Linear Vibrations*
Mullender P.	1945/Amsterdam	*Toepassingen van de meetkunde der getallen op ongelijkheden in* $K(1)$ *en* $K(i\sqrt{m})$
Pennington W.B.	1951/Cambridge	*Contributions to the Theory of Series and the Analytical Theory of Numbers*
Rankin R.A.	1940/Cambridge	
Rogers K.	1955/Cambridge	*Some Results in the Geometry of Numbers*
Samet P.A.	1953/Cambridge	*Algebraic Integers with Two Conjugates Outside the Unit Circle*
Swinnerton-Dyer P.		
Walker F.J.	1952/Cambridge	*A Problem in the Theory of Numbers*
Wheeler D.J.		

TAB. 5.2: Thèses des étudiants de Mordell trouvés sur le site *Genealogy Project*

La théorie des nombres apparaît donc comme un des premiers sujets de recherche pour plus de la moitié des mathématiciens de ce recensement. Neuf s'intéressent à la géométrie des nombres ou des thèmes que nous avons rencontrés en liaison avec la géométrie des nombres. Nous pouvons certainement voir là l'influence de Mordell dans le choix des sujets. C'est l'interprétation de Cassels qui remarque que Mordell attirait de nombreux "research students" à Cambridge dont la plupart travaillaient sur des problèmes liés à la géométrie des nombres[30].

Une dernière source permet de donner des informations sur les étudiants qui assistent aux cours de Mordell à Cambridge. Ce dernier devait demander que chacun d'entre eux remplisse une fiche indiquant quelle formation ils avaient en théorie des nombres (cours déjà suivis, lectures). Certaines de ces fiches retrouvées dans les papiers de Mordell permettent de se faire une idée sur les connaissances d'étudiants à Cambridge désirant se spécialiser en théorie des nombres[31]. Le cours d'introduction à la théorie des nombres d'Albert Ingham est cité à plusieurs reprises et le séminaire de Davenport une fois. Le livre qui apparaît comme un classique est celui de Hardy et Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, mentionné à plusieurs reprises. Les ouvrages suivants sont aussi cités dans ces fiches :

- Bachmann, *Zahlentheorie*,
- Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*,
- Hecke, *Algebraischen Zahlen*,
- Ingham, *Distribution of Prime Numbers*,
- Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie* et *Über einige neure Fortschritte der additiven Zahlentheorie*,
- Mathews, *Theory of Numbers*.

Les lectures de ces étudiants sont donc avant tout anglaises et ensuite allemandes. Nous avions déjà remarqué que les sources de Mordell sont surtout allemandes, cela donc semble être une caractéristique partagée dans le milieu des théoriciens des nombres de Cambridge de la fin des années 1940 et du début des années 1950.

Mordell attire donc de nombreux étudiants sur lesquels il semble exercer une influence pour le choix de leur sujet de recherche[32]. À notre connaissance, Mordell a très peu encadré de thèses dans le sens où nous l'entendons maintenant. Seuls Cassels et Davis (qui figurent dans le tableau précédent) ont obtenu un doctorat sous sa direction.

[30] Cassels 1973 p.505.

[31] Mordell (St John's), box 7.

[32] Pour confirmer que Mordell exerce bien ce type d'influence sur ses étudiants il serait utile de reconstituer plus précisément le parcours d'un nombre significatif d'entre eux. Il est en effet possible que le choix du sujet soit la raison de leur venue à Cambridge pour suivre les cours de Mordell. Ce dernier n'en serait alors pas directement responsable.

Mais cela n'est pas nécessairement un indicateur très fiable à propos de l'activité d'enseignement d'un chercheur à cette époque en Angleterre. Le PhD apparaît en Grande Bretagne à la fin de la Première Guerre Mondiale mais il ne commence à devenir un passage obligé pour les futurs chercheurs qu'après la Seconde[33]. De plus, ce système ne se met en place que progressivement. Cassels témoigne cependant de la manière dont Mordell intervenait dans la formation des jeunes chercheurs. Selon Cassels, Mordell était très peu dirigiste pour les choix de thèmes de recherche et préférait au contraire qu'ils trouvent eux-mêmes des problèmes à étudier[34].
Cassels raconte que Mordell avait surtout pour habitude de relire minutieusement les manuscrits des « research students » et leur demandait de les réécrire tant que chaque phrase n'était pas complètement claire : « The process continued until he could read right through[35]. » Cette manière de travailler a un impact sur l'exposition des recherches et Cassels reconnaît avoir beaucoup appris « about the art of exposition in this way, partly from explicit comments [...] but much more from observing his difficulties[36] ». La transmission entre le professeur et l'étudiant se passe ici lors d'entretiens privés au cours desquels l'apprentissage de la recherche se fait non seulement à travers la discussion mais aussi par l'observation du chercheur confirmé au travail.

Nous terminons ce paragraphe par deux anecdotes montrant que Mordell est perçu à cette époque comme un des mathématiciens à consulter pour faire de la théorie des nombres en Angleterre.
En 1943 alors qu'il est mobilisé par la guerre, Cassels rencontre Hardy et lui fait part de son intention de s'orienter vers la recherche en théorie des nombres après la guerre. Hardy contacte alors Mordell, il lui explique que Cassels a déjà lu Landau et le livre de Hardy et Wright et il lui demande de faire des suggestions car

> « He really wants some definite problem which he can think about it in his (scanty) spare time[37]. »

Grâce à la lettre de remerciements que Cassels adresse à Mordell le 3 octobre 1943, nous savons que Mordell lui a conseillé d'étudier un de ses articles (il ne précise pas lequel) et de lire Minkowski[38].
Un deuxième exemple où Mordell est sollicité pour conseiller un mathématicien débutant est celui de Peter Swinnerton-Dyer. En août 1942, Mordell reçoit une lettre de

[33]Voir le site `http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/PhD.htm` . Je remercie June Barrow-Green pour cette référence et pour les informations qu'elle m'a communiquées sur le PhD en Angleterre.
[34]Cassels 1973 p.506.
[35]Cassels 1973 p.506.
[36]Cassels 1973 p.506.
[37]Lettre de Hardy à Mordell du 25 août 1943, Mordell (St John's), box 1, folder 8. Hardy indique qu'il voulait d'abord consulté Davenport mais cela n'a finalement pas été possible.
[38]Lettre de Cassels à Mordell du 3 octobre 1943, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

Thomas Merton[39] dans laquelle il lui demande son avis à propos du travail sur l'équation diophantienne $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ qu'un ami de son fils lui a montré[40]. Cet ami, Swinnerton-Dyer alors âgé de 15 ans, a développé une nouvelle méthode pour résoudre l'équation précédente[41]. Mordell pense que la méthode est originale et se montre très élogieux envers ce travail

> « the boy must be congratulated on a very pretty piece of work which even an old (?) like myself would be pleased to have discovered.
> I think the method ought to be published and I am prepared to submit his effort to the Journal of the London Mathematical Society.[...]
> Can you tell me something about the boy and his attainments. I shall follow his career with great interest for he will probably be the youngest contributor to the publications of the London Math Soc[42]. »

Des lettres entre Mordell et Swinnerton-Dyer sont ensuite échangées pour discuter de la publication de cette méthode[43]. Mordell lui conseille aussi de lire Landau, Hardy et Wright, Ingham (sur les nombres premiers), Salmon (sur les coniques) et Mascheroni (sur la géométrie du compas). Pour la théorie des nombres, nous retrouvons la littérature classique de l'étudiant anglais de cette époque déjà mentionnée.

5.2.2 Des exemples de pratiques de recherche dans cette communauté de mathématiciens

Nous avons noté l'influence probable de Mordell dans le choix des thèmes de recherche des jeunes chercheurs. De plus, il apporte émulation et motivation dans le groupe en manifestant son intérêt pour le travail de chacun (voir la citation de Cassels à la page 343). Il s'agit maintenant de donner des éléments plus concrets pour comprendre comment s'exerce cette influence et à quelles occasions. Les contacts avec Mordell ne sont pas les seuls à avoir des conséquences sur la recherche mais toutes les interactions entre les membres peuvent avoir les mêmes effets.
Ces contacts peuvent prendre la forme d'échanges informels entre deux ou un petit groupe de personnes. Ce sont parfois des rencontres institutionnalisées pour favoriser les échanges entre les mathématiciens, le séminaire en est un exemple. Ces deux modes de communications sont aussi complémentaires, une discussion lors d'un séminaire peut

[39]Nous ne savons pas s'il s'agit d'un ami de Mordell, il indique seulement qu'il n'est pas mathématicien.
[40]Lettre de Merton à Mordell du 15 août 1942, Mordell (St John's), box 3, folder 31.
[41]Pour des éléments sur l'histoire de cette équation ainsi qu'une présentation de la méthode d'Euler voir Dickson 1920 p.644.
[42]Lettre de Mordell à Merton du 20 août 1942, Mordell (St John's), box 3, folder 31.
[43]Swinnerton-Dyer 1943.

susciter une collaboration entre deux mathématiciens sur un problème précis. Nous essaierons enfin de donner des exemples de ce qui est échangé et circule au sein de ce groupe de mathématiciens.

5.2.2.1 Les séminaires et les conférences comme lieux d'échanges officiels

En 1931 quand il envisage de quitter Manchester, Mordell met en avant l'importance du séminaire comme outil pour la recherche. Nous verrons dans la suite qu'il a fini par organiser un séminaire à Manchester au cours duquel certains de ses résultats sur la géométrie des nombres ont été présentés. Cassels mentionne la tenue d'un séminaire hebdomadaire alors qu'il se trouve à Cambridge[44].
Dans un de ces articles sur les formes linéaires publié en 1941[45], Mordell mentionne qu'il a présenté ce travail à son séminaire et que des suggestions lui ont été faites par Davenport et Patrick Du Val pour simplifier un point de la démonstration.
Lors du conférence à Oxford en juin 1945, Mordell aborde la question du minimum d'une forme quadratique de n variables et de la détermination de la constante γ_n telle que

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;\leq\; \gamma_n \sqrt[n]{D}\;,$$

où les x_i sont des entiers non tous nuls. Nous avons vu que cette constante a été calculée pour $2 \leq n \leq 8$. Suite à cette conférence, T. W. Chaundy propose une nouvelle méthode permettant de déterminer γ_n pour $3 \leq n \leq 10$ [46]. La publication de la preuve de Chaundy entraîne des réactions chez des mathématiciens intéressés par cette question. Alexander Oppenheim pense avoir trouvé un problème dans la démonstration de Chaundy, il consulte à ce sujet Davenport qui est d'accord avec ses critiques. Il écrit donc à Mordell pour lui demander son avis[47]. À travers cette anecdote, nous voyons comment une communication publique a pour conséquence une publication qui, à son tour, suscite des échanges cette fois dans la sphère privée. C'est ici à ce niveau qu'ils essaient de se mettre d'accord sur ce qui pose problème et éventuellement de trouver une solution.

Il serait trop restrictif de limiter notre étude au seul lieu géographique où se trouve Mordell pour rendre compte de l'activité en théorie des nombres et surtout en géométrie des nombres en Angleterre à cette époque. Même lorsqu'il quitte Manchester en 1941, Davenport maintient des contacts très étroits avec Mordell particulièrement au sujet de

[44] Cassels 1973 p.505.
[45] Mordell 1941d.
[46] Mordell 1946b p.66.
[47] Lettre de Oppenheim à Mordell du 8 novembre 1946, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

la géométrie des nombres. Il donne lui aussi des cours sur ce thème[48] et son Inaugural Lecture à Londres le 6 juin 1946 porte sur la géométrie des nombres[49]. Une bonne illustration de ces échanges est donnée par le séminaire que Davenport commence à organiser à son arrivée à Londres en 1945 et où la géométrie des nombres est un thème souvent abordé. D'autre part, Mordell vient assister parfois à ce séminaire et ses travaux y sont présentés et Davenport intervient au séminaire de Cambridge. Donnons des exemples de sujets traités lors du séminaire de Davenport à Londres ainsi que les intervenants[50] :

1. *Minkowski's Generalized Inequality*, par M. Woodger. Il s'agit d'une présentation du chapitre 5 de *Geometrie der Zahlen* dans lequel Minkowski démontre le théorème des minima successifs.
2. *Product of Three Homogeneous Linear Forms*, par J.H.H. Chalk[51]. La méthode de Davenport sur ce sujet est détaillée.
3. *Binary Cubic Forms*, par H. Davenport. C'est la méthode de Mordell qui est présentée.
4. *Product of non Homogeneous Linear Forms I*, par H. Davenport.
5. *Product of non Homogeneous Linear Forms II*, par H. Davenport. Les travaux de Remak et de Landau sont abordés.

La présence au premier exposé de Mordell et de Rogers (qui assistait régulièrement au séminaire[52]) est indiquée.

La preuve de Dyson de la conjecture de Minkowski sur le produit de quatre formes linéaires non homogènes est consécutive à une intervention sur le sujet à ce séminaire[53]. Davenport s'intéresse à cette conjecture depuis plusieurs années

> « I have not been successful with any research- have tried the 4 linear forms again but there is still a real difficulty[54]. »

Dans l'article où cette démonstration est publiée, Dyson remercie d'ailleurs Davenport pour lui avoir suggéré ce problème et signalé les travaux de Remak et Hofreiter sur le sujet[55].

Nous avons aussi une trace d'une intervention de Davenport au séminaire de Mordell

[48]Les archives contiennent des notes de cours dont le contenu indique qu'elles datent d'après 1943. D'autres notes donnent le plan d'un cours à University college of London en 1946 toujours sur la géométrie des nombres, Davenport (WL), C 167, C 179, C 180.

[49]Davenport (WL), A 59, C 164.

[50]Davenport (WL), C 167.

[51]Chalk qui est un des premiers étudiants de Davenport se rend ensuite à Cambridge pour travailler avec Mordell, Rogers et al. 1971 p.162.

[52]Rogers et al. 1971 p.162.

[53]Rogers et al. 1971 p.162. Il s'agit peut être d'un des exposés de Davenport sur le produit des formes non homogènes mentionnés dans la liste précédente.

[54]Lettre de Davenport à Mordell du 14 octobre 1941, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

[55]Dyson 1948 p.83.

à Cambridge sur la géométrie des nombres. Le 8 février 1946 il fait un exposé intitulé *Non homogeneous problems in the geometry of numbers*, il revient alors en particulier sur la question du produit de formes linéaires non homogènes[56].
Une autre anecdote racontée par Rogers sur le séminaire de Davenport concerne Klaus F. Roth. Ce dernier arrive à Londres en 1946 et suit alors des cours et le séminaire de Davenport. En 1954, Roth fait une conférence à Amsterdam « about his work on irregularities of distribution ». Davenport, peu satisfait de cette intervention, lui explique alors comment il aurait dû présenter son travail[57]. Consécutivement à cet épisode, Davenport met en place en 1954-1955 un « teaching seminar » dont un des objectifs est de travailler la qualité de l'exposition. Les participants à ce séminaire doivent étudier les travaux de Siegel et Dyson sur le théorème de Thue-Siegel pour les exposer ensuite aux autres. Une grande partie du travail est alors effectuée par Roth. C'est semble-t-il à cette occasion que Roth acquiert une très bonne connaissance de ce sujet, pour lequel il obtient la médaille Fields en 1958[58].

5.2.2.2 Des traces de contacts informels

Il est bien entendu plus difficile d'avoir des informations sur les échanges directs entre scientifiques qui se font en dehors des circuits académiques officiels. Mordell et Davenport en ont cependant laissé quelques indices particulièrement dans leurs publications.
Les collaborations entre ces mathématiciens sont de natures diverses. Elles peuvent être des relectures de manuscrits avant une publication. Ces relectures sont l'occasion de corriger des erreurs éventuelles, de suggérer une simplication ou encore d'apporter une précision sur un aspect de la preuve. Mordell mentionne des relectures de ses articles par exemple par Davenport, Richard Rado, Kurt Mahler ou Kathleen Ollerenshaw[59].
Parfois les collaborateurs apportent leur aide sur des points spécifiques dans l'élaboration de l'article destiné à être publié. Par exemple, Mordell remercie à plusieurs reprises Mahler pour avoir réalisé les dessins dans ses articles ou parfois des tables numériques[60]. Dans un article publié en 1945, Mordell remplace sa version d'une partie de la démonstration par une méthode due à Davenport car il la juge plus simple[61].
L'aide peut aussi intervenir avant le moment de la publication, quand la recherche est en train de se faire : Mordell remarque que les tables précédentes lui ont été utiles « in

[56] Davenport (WL), C 168.
[57] Roth raconte que peu de temps après sa discussion avec Davenport, Mordell l'a félicité pour son exposé qui lui a rappelé le style de Davenport.
[58] Rogers et al. 1971 p.163.
[59] Mordell 1936, 1945b, 1944a.
[60] Mordell 1945b, 1944a.
[61] Mordell 1945b p.372.

the first stages of this work[62] », Mahler est aussi remercié pour « a very useful model of the polyhedron[63] ».

Au cours d'échanges privés se règlent aussi des détails sur la forme des publications. Dans son article *On the geometry of numbers in some non-convex regions*, Mordell fait référence à un résultat d'analyse de George Neville Watson qu'il utilise dans son travail[64]. Watson écrit en fait cet article après une suggestion de Mordell et ils veulent que les deux articles soient publiés l'un après l'autre. Watson, alors éditeur des *Proceedings of the London Mathematical Society*, arrange cette question et ils discutent entre eux la manière de citer son travail dans l'article de Mordell[65]. Watson aborde aussi la question de l'insertion des figures dans l'article de Mordell (les dessins ont d'abord été égarés), problème auquel ce dernier semble attacher de l'importance.

Les références à des travaux non encore publiés sont un autre signe de collaboration. Les exemples chez Mordell sont assez nombreux. Dans le texte de la conférence faite à Oslo et publié en 1936 il cite des articles de George Szekeres et un article de Chao Ko[66] sur les réseaux, tous les deux publiés en 1937 dans le *Journal of the London Mathematical Society*[67]. Dans un article sur les formes linéaires homogènes, il fait référence à un résultat de G. Žilinskas publié dans le même volume et il remarque aussi

> « While this paper was being written, Davenport found better results for $n = 4, 5$ by a modification of his first method[68]. »

Tous ces éléments témoignent que plusieurs mathématiciens travaillent en même temps sur le même sujet, ici la géométrie des nombres, mais aussi qu'ils communiquent directement sur l'avancement de leurs travaux.
Il semble que Mordell soit particulièrement efficace pour s'entourer de collaborateurs de grandes qualités dont le travail commun et les échanges favorisent le développement des recherches de chacun d'eux

> « Es ist ja wirklich sehr schön, dass Sie jetzt in Manchester so tüchtige Mitarbeiter wie Davenport, Mahler, Erdös und Ko besitzen. Sie alle arbeiten in verwandten Gebieten, und so wird aus dieser Arbeitsgemeinschaft sicherlich viel Erspriessliches entstehen[69] ! »

[62] Mordell 1945b p.339.
[63] Mordell 1941d p.8.
[64] Mordell 1945b p.349.
[65] Lettres de Watson à Mordell du 18 avril 1942, du 4 octobre 1942 et du 26 septembre 1943, Mordell (St John's), box 4, folder 36.
[66] Herbert William Richmond perçoit Chao Ko comme un élève de Mordell. Lettre de Richmond à Mordell du 26 octobre 1936, Mordell (St John's), box 3, folder 25.
[67] Mordell 1936 p.238.
[68] Mordell 1941d p.5.
[69] « Il est vraiment très beau que vous ayez maintenant à Manchester de si bons collaborateurs

Les meilleurs exemples de ces échanges sont bien entendu ceux rencontrés entre Mordell et Davenport en particulier au sujet des formes cubiques binaires où parfois les simplications de la méthode de Mordell sont publiées avant la démonstration initiale. La question des formes cubiques fournit aussi une illustration des idées qui circulent entre les deux mathématiciens. Rappelons que la méthode de Mordell pour aborder le problème est de montrer l'existence d'un point d'un réseau dans un domaine non convexe. Pour cela, il détermine des parallélogrammes presque inclus dans les domaines étudiés et qui contiennent au moins un point du réseau. Après avoir ainsi déterminé plusieurs points du réseau il en construit un nouveau qui répond au problème en faisant une combinaison linéaire des précédents. Nous avons constaté que cette idée de Mordell passe dans le travail de Davenport où elle est exprimé sous une autre forme. Chez Davenport la preuve est rédigée uniquement avec des inégalités mais derrière ce changement de présentation nous avons détecté une méthode commune : la détermination de points du réseau dans différents parallélogrammes (en termes arithmétiques, des entiers qui vérifient des systèmes d'inégalités) afin de construire un point particulier permettant de conclure.

5.3 Les échanges internationaux

5.3.1 Voyages, cours et conférences à l'étranger

Le groupe constitué autour de Mordell a de très nombreux contacts internationaux, c'est attesté par exemple par les voyages faits par Mordell à l'étranger mais aussi comme nous le verrons plus tard par sa correspondance.
Au cours de sa carrière Mordell est intervenu (cours ou conférences) dans au moins 191 institutions différentes se trouvant dans 28 pays différents[70]. La région du monde où Mordell s'est le plus rendu est l'Amérique du Nord avec 79 interventions aux Etats Unis et 19 au Canada, vient ensuite l'Allemagne avec 17 institutions visitées. Nous retrouvons les rapports privilégiés avec l'Allemagne alors qu'à titre de comparaison il n'est venu que deux fois en France (à l'Institut Henri Poincaré les 5 et 6 juin 1963 et à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques le 7 juin 1963[71]).

Dans une lettre à Hardy certainement de 1923[72], Mordell annonce qu'il va donner

comme Davenport, Mahler, Erdös et Ko. Ils travaillent sur des domaines proches et de cette communauté de travail il adviendra sûrement beaucoup de choses productives ! », lettre de Walfisz à Mordell du 17 février 1938, Mordell (St John's), box 4, folder 35.

[70] *Institutions at which Professor L. J. Mordell has lectured up to May 11, 1971*, Mordell (St John's), box 5. Cette liste est reproduite en annexe.

[71] Mordell (St John's), box5.

[72] Il s'agit d'une lettre non datée.

des cours à l'université de Chicago

> « I shall be giving a course of lectures on the theory of numbers at Chicago University during the coming summer[73]. »

Dans une autre lettre envoyée de Chicago le 24 juillet, Mordell donne des précisions sur les cours qu'il propose. Il explique à Hardy que les étudiants ont des connaissances très hétérogènes donc

> « I am given them a course on the T. of N. starting from the beginning[74] ».

Les thèmes abordés sont par exemple le nombre de diviseurs d'un entier n, le problème des diviseurs de Dirichlet, les congruences, les lois de réciprocité, les sommes de Gauss, les formes quadratiques et la résolution d'équations comme $y^2 = x^3 + k$ ou $x^4 + y^4 = z^4$.

Mordell se rend aussi plusieurs fois à l'Institute for Advanced Study à Princeton. Le 4 janvier 1939, Hermann Weyl mentionne une visite de Mordell à l'automne prochain[75]. Quelques mois plus tard en novembre, Weyl annonce à Mordell que l'introduction de son séminaire sur la *current literature* qu'il a consacrée à la géométrie des nombres a été soumis pour publication dans les *Proceedings of the London Mathematical Society.* Il semble que cette séance du séminaire sur la géométrie des nombres aurait dû avoir lieu en présence de Mordell, mais ce dernier a été obligé d'écourter son séjour. Weyl demande si Mordell ou Davenport pourrait s'occuper de la relecture de l'article[76]. Cet article a bien été publié dans les *Proceedings* en 1942 et Weyl mentionne la relecture du manuscrit par Mordell qui lui a suggéré des références supplémentaires[77].
Nous avons la trace d'une autre invitation à Princeton cette fois de John Von Neumann en 1947. Il lui propose de faire un exposé sur le sujet de son choix tout en remarquant que le thème qu'il a abordé à son Inaugural Lecture à Cambridge serait parfait[78].

Au cours des années 1950-1960, Mordell est "Visiting Professeur" dans plusieurs universités nord américaines (voir la figure 5.6). En particulier, il est à l'université du Colorado en 1959-1960, puis à l'université d'Arizona de 1961 à 1964. Nous avons plusieurs sources précisant les activités de Mordell pendant ces périodes. D'abord, une proposition de programme de recherche datée du 20 décembre 1961 contient un court *curriculum vitae*, quelques publications ainsi qu'une description détaillée des thèmes

[73] Lettre de Mordell à Hardy du 14 novembre (1923), MORDELL (St John's), box 1, folder 8.

[74] Lettre de Mordell à Hardy du 24 juillet (1924), MORDELL (St John's), box 1, folder 8.

[75] Lettre de Weyl à Mordell du 4 janvier 1939, MORDELL (St John's), box 4, folder 39.

[76] Lettre de Weyl à Mordell du 16 novembre 1939, MORDELL (St John's), box 4, folder 39.

[77] WEYL 1942. Weyl ne précise pas la raison de cet intérêt pour la géométrie des nombres, peut être que c'est la venue de Mordell qui a motivé le choix de ce thème pour le séminaire. Weyl a publié deux autres articles en liaison avec la géométrie des nombres au début des années 1940 concernant la réduction des formes quadratiques.

[78] Lettre de J. Von Neumann à Mordell du 23 septembre 1947, MORDELL (St John's), box 3, folder 19.

mathématiques qu'il compte aborder[79]. Il est intéressant de noter que Mordell se présente comme le « Founder of the Modern British School in the Geometry of Numbers » (figure 5.6 [80]). Le titre de ce programme de recherche est *Diophantine Equations - L-Series, and Related Aspects of Analytic Number Theory.* Mordell propose d'approfondir ses recherches sur la finitude du nombre de points rationnels sur les courbes de genre plus grand que 2 (étude de cas particuliers de genre 2 et 3), l'estimation de sommes exponentielles

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p}(a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x)} ,$$

le nombre de solutions de congruences $f = 0 \pmod p$ et sur la distribution des résidus quadratiques.
De cette période date aussi une demande à la U.S. National Science Foundation du 15 juillet 1962 pour proposer l'organisation d'un symposium à l'occasion du 75$^{\text{ème}}$ anniversaire de Mordell[81]. Ce symposium, qui doit durer 3 jours en mars 1963 à l'université d'Arizona, a un double objectif, d'une part, promouvoir le développement du nouveau département de mathématiques de cette université et d'autre part,

> « to issue a mathematical volume to help perpetuate the legend of Mordell (which happens to be real, but which would still have been worth inventing for the purpose of morale and inspiration for future number theorists[82]). »

La fin de cette demande détaille tous les lieux de conférences de Mordell entre août 1961 et janvier 1964 et montre en particulier que le 5 et 6 juin 1963 il a fait des exposés à l'Institut Henri Poincaré à Paris et le 7 juin 1963 une intervention à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

Malgré les relations privilégiées que Mordell semble avoir avec son pays natal, une difficulté apparaît en 1953 quand son visa pour entrer aux Etats Unis est refusé. Mordell doit se rendre à l'université de Stanford pour y donner des cours pendant l'été 1953 et ensuite à partir de septembre 1953 à l'université du Colorado pour faire de la recherche. Il semble qu'au mois de mai 1953 Mordell commence à s'inquiéter de ne pas avoir de nouvelles pour son visa et les premières démarches entreprises pour obtenir des informations restent sans réponse, son cas étant « under consideration by the American Embassy at London[83] ». Malgré les multiples démarches pour débloquer la situation le visa est officiellement refusé le 12 octobre 1953 en vertu de la « section 212(a) of The

[79] Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[80] Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[81] Mordell (St John's), box 5.
[82] Cette citation est extraite d'un document intitulé « Preliminary Form of Proposal to the U.S. National Science Foundation for a SYMPOSIUM TO COMMEMORATE THE 75$^{\text{TH}}$ BIRTHDAY OF PROFESSOR LOUIS J. MORDELL AT THE UNIVERSITY OF ARIZONA ». Cette demande est signée par Harvey Cohn, « Head, Department of Mathematics », Mordell (St John's), box 5.
[83] Lettre de Maurice Mordell à Louis Mordell du 20 juin 1953, Mordell (St John's), box 4, folder 34.

FIG. 5.6 – Extrait du CV de Mordell pour le programme de recherche

Immigration and Nationality Act[84] ». En 1955 il apprend que c'est plus précisément le paragraphe 27 de la loi précédente qui a motivé le refus, ce paragraphe vise à empêcher l'entrée aux Etats Unis des étrangers

> « who the consular officer or the Attorney General knows or has reason to believe seek to enter the United States solely, principally, or incidentally to engage in activities which would be prejudicial to the public interest, or endanger the welfare, safety, or security of the United States[85] ».

Mordell et sa famille (ses frères sont encore à Philadelphie) essaient de comprendre les raisons d'une telle décision mais il semble qu'ils n'aient jamais eu d'explication officielle. Dans les correspondances plusieurs hypothèses sont cependant avancées. Ils évoquent la possibilité d'un homonyme mais aussi l'oubli de Mordell qui n'a pas signalé lors de sa première demande qu'il avait déjà été arrêté une fois[86]. Dans une lettre du 5 novembre 1953, son frère Albert suggère que le problème peut venir de l'abonnement qu'il a souscrit pour lui à un journal qui publie des articles anti-catholiques et dont certains collaborateurs sont communistes[87]. Avec son autre frère Maurice, Mordell discute du fait que ses conférences dans des pays de l'Est peuvent être la cause du refus

> « When I applied for a visa on March 16th, it was my visit in 1948 to Czechoslovakia and Hungary that seemed to create difficulty. One of the letters from Colorado in May referred to a security investigation about me ; but as I have already said, I have never had anything to do with communism or politics[88]. »

Mordell obtient finalement un visa pour entrer aux Etats Unis seulement en 1959[89].

Davenport s'est lui aussi rendu à plusieurs reprises aux Etats Unis, en particulier à l'université de Stanford au cours des années 1947 et 1948 puis en 1950. À Stanford, Davenport enseigne la théorie des groupes, la théorie des nombres pour les "undergraduate students" et les fractions continues, la géométrie des nombres, la théorie analytique des nombres pour les "graduate students[90]". Pendant l'année 1947-1948, il conduit le sémi-

[84] Lettre de Olive M. Jensen (American Vice Consul, American Ambassy, London) à Mordell du 12 octobre 1953, Mordell (St John's), box 4, folder 34.

[85] Mordell (St John's), box 4, folder 34.

[86] Nous ne connaissons pas ni la date ni les raisons de l'arrestation, son frère Albert fait allusion à une destruction de photo d'identité. Lettre de Albert Mordell à Louis Mordell du 21 janvier 1954, Mordell (St John's), box 1, folder 7.

[87] Lettre de Albert Mordell à Louis Mordell du 5 novembre 1953, Mordell (St John's), box 1, folder 7.

[88] Louis Mordell cité par son frère Maurice dans une lettre du 21 septembre 1953 adressée à George I. Bloom. Bloom est l'assistant d'un sénateur, Edward Martin, auquel ils auraient demandé de l'aide. Mordell (St John's), box 4, folder 34.

[89] Mordell n'a pas été le seul à avoir des problèmes de visa pour entrer aux Etats Unis dans les années 1950, voir par exemple le cas d'Hadamard dans Maz'ya et Shaposhnikova 1998 p.271.

[90] Royden 1989 p.255. D'après Royden, Davenport aurait eu des propositions pour obtenir un poste

naire du département avec Pólya sur le thème de l'approximation diophantienne et la théorie des nombres irrationnels[91]. De cette période nous avons aussi le résumé d'un cours ou d'une conférence sur la géométrie des nombres à Berkeley en avril 1948. Les thèmes abordés sont le produit de deux formes linéaires non homogènes, le théorème de Minkowski et les formes quadratiques[92].

Le deuxième pays avec lequel Mordell a de nombreux contacts est donc l'Allemagne, cependant nous avons moins de détails sur les séjours qu'il y effectue. Il se trouve en Allemagne au début de l'année 1932 pendant plusieurs mois. Il passe alors par Berlin[93], puis à la fin du mois de janvier il est à Göttingen. Mordell donne quelques informations sur ses activités dans des lettres à Davenport. À Göttingen, il discute avec Landau sur les problèmes de sommes exponentielles[94], il rencontre aussi Van der Waerden et Siegel. Il suit des cours d'Artin ainsi que des séances des séminaires de Noether sur la théorie du corps de classe et de Landau sur le « circle problem ». À la fin du mois de février 1932, il fait un exposé sur les congruences à Frankfort[95].
Le mathématicien allemand avec lequel les relations sont les plus importantes à la fin des années 1920 et au début des années 1930 est Helmut Hasse. Nous avons déjà mentionné les circonstances dans lesquelles Mordell recommande Davenport à Hasse pour aller travailler avec lui à Marbourg. Quand Mordell les met en contact en 1930, tous les deux notent qu'ils ont en fait peu d'intérêts mathématiques communs. Davenport s'inquiète que

> « There may be nobody at Marburg interested in the analytical theory of numbers[96]. »

Hasse ne semble pas penser que cela soit réellement un problème

> « Many thanks for your kind letter, particularly for your writing to Mr. Davenport. Three days ago I received a very kind letter from him. I think he will come, though I am not at all interested in lattice points and only a little in Zetafunction. But I think that is no pity. We can learn from another, each the interests of the other[97]. »

Effectivement comme le suggère Hasse, les thèmes de recherche ont circulé entre ces mathématiciens. L'intérêt de Mordell et Davenport pour l'estimation du nombre de

permanent à Stanford à cette époque. Le cours sur la géométrie des nombres de 1950 est conservé dans les archives de Davenport. Voir les commentaires sur ce cours dans le chapitre 6.

[91] Royden 1989 p.258.

[92] Davenport (WL), C165 et C 166.

[93] Lettre de Davenport à Mordell du 11 janvier 1932, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

[94] Lettre de Mordell à Davenport du 26 janvier 1932, Davenport (WL), G 211.

[95] Lettre de Mordell à Davenport du 3 mars 1932, Davenport (WL), G 211.

[96] Lettre de Davenport à Mordell du 30 novembre 1930, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

[97] Lettre de Hasse à Mordell du 10 décembre 1930, Mordell (St John's), box 2, folder 9.

solutions de certaines congruences a conduit Hasse à travailler sur l'hypothèse de Riemann pour les fonctions zeta associées aux courbes elliptiques[98]. La correspondance entre Davenport et Mordell témoigne de la collaboration entre Hasse et Davenport sur ce thème quand ce dernier est en Allemagne[99].

Mordell donne aussi une série de conférences dans plusieurs universités allemandes en 1951. Il répond en fait à une invitation du Foreign Office (German Section) :

« Dear Professor Mordell,

> Since the end of the war it has been our policy to exercise an influence on German educational and cultural life and to this end we have made arrangements for a number of British teachers, scholars and people distinguished in the political and cultural fields to give lectures to German audiences and to meet German leaders.
>
> Although the situation in the British Zone and the British Sector of Berlin has changed materially over the past two years the need for contact with the West is still a very real one, and we are anxious to continue our programme over the coming year.
>
> I am, therefore, writing to ask whether you would be able to help us in this work by going to Germany for a week or so at some time in the future convenient to you to give single lectures to German audiences and to meet individual Germans. Bonn University has already asked if you would be prepared to lecture at their University. If you can spare the time to go we could arrange for you to lecture at one or two other University towns as well as Bonn, and in addition I should be glad to know whether you would also be prepared to lecture at British Centres[100]. »

Mordell accepte cette proposition et son séjour est prévu du 27 juin au 11 juillet 1951. Il fait alors des conférences à Cologne, Bonn et Göttingen. Nous ne savons pas quels sont les thèmes finalement retenus pour ces exposés mais il semble que Mordell ait eu l'intention de parler de géométrie des nombres car il avait demandé des renseignements sur les connaissances du public des conférences à ce sujet

« I will make enquiries from Bonn and Cologne about the audiences' know-

[98] Roquette 2004.

[99] Voir par exemple les lettres de Davenport à Mordell du 9 avril 1933 et du 11 juillet 1933, Mordell (St John's), box 1, folder 4.

[100] Lettre de W. D. Rusbatch (from German Education and Information Department) à Mordell du 12 octobre 1950, Mordell (St John's), box 2, folder 14.

> ledge of the geometry of numbers and will let you know as soon as I possibly can[101]. »

Les contacts internationaux de Davenport sont aussi nombreux. Dans les années 1950 et 1960, citons par exemple ses collaborations avec D.J. Lewis et E. Bombieri qui sont l'occasion pour Davenport de se rendre à l'université du Michigan et à Milan[102].

Mordell et Davenport sont aussi intervenus lors de congrès internationaux et en particulier au sujet de la géométrie des nombres.
Le contenu de la conférence de Mordell en 1936 à Oslo dont le thème central est le produit de formes linéaires non homogènes[103] a déjà été discuté en détails. Nous avons mentionné comment cette communication publique (exposé oral et ensuite publication) entraîne des échanges à un autre niveau (correspondance) entre Mordell et Tschebotareff. Ce dernier dans ses lettres informe Mordell des résultats qu'il a démontrés ainsi que de la méthode employée[104]. En réaction à ces contacts privés, Mordell contribue à la diffusion du travail de Tschebotareff en y faisant référence dans un article[105].
Au congrès international de 1950 à Harvard, Davenport se propose de faire un bilan des dernières avancées en géométrie des nombres et particulièrement sur les conjectures discutées par Mordell dans son exposé de 1936 [106]. Davenport fait explicitement référence à Tschebotareff quand il aborde la question du produit des formes linéaires non homogènes et il mentionne le fait que la démonstration de l'estimation donnée par le mathématicien russe est reproduite dans la seconde édition du livre *Introduction to the Theory of Numbers* de Hardy et Wright[107]. Davenport renvoie à la seconde édition de 1945 et nous ne savons pas si le « théorème de Tschebotareff » faisait déjà partie de l'édition originale de 1938. Cela semble cependant peu probable car la première lettre de Tschebotareff à Mordell à ce sujet date de février 1938 mais cela montre qu'après l'intervention de Mordell, Tschebotareff est intégré dans l'histoire de ce problème.
Un deuxième aspect intéressant de cette conférence est que Davenport intègre dans sa présentation du sujet les transformations du domaine que nous avons déjà commen-

[101] Lettre de W. D. Rusbatch à Mordell du 24 avril 1951, Mordell (St John's), box 2, folder 14.
[102] Rogers et al. 1971 p.164.
[103] Mordell 1936.
[104] Lettres de Tschebotareff à Mordell du 24 février 1938 et 19 mars 1938, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[105] Mordell 1940b.
[106] Davenport 1950a.
[107] Ce livre aborde largement la géométrie des nombres et il est intéressant de noter que la forme du chapitre XXIV, *Geometry of Numbers*, doit beaucoup à l'intervention de Davenport, Rado et Heilbronn : « Dr. H. Davenport and Dr. R. Rado have also read parts of the book, and in particular the last chapter, which, after their suggestions and Dr. Heilbronn's, bears very little resemblance to the original draft », Hardy et Wright 1960. Ces trois mathématiciens font tous partie du cercle de Mordell et cela montre bien que la compétence de ce groupe en géométrie des nombres est reconnue.

tées. L'insistance est maintenant davantage mise sur la notion de réseau que sur celle de forme. Davenport revient sur une conjecture exprimée en 1936 par Mordell en termes d'inégalités sur des formes linéaires de la manière suivante :

> « The first conjecture concerns what we should now call *the critical lattices of an n-dimensional cube*[108]. »

De nombreux autres problèmes sont expliqués en utilisant les notions de déterminants critiques et de réseaux critiques. En particulier rétrospectivement il traduit dans ces termes son travail de la fin des années 1930 sur le produit de trois formes linéaires homogènes

> « In 1937 I found the critical determinant of another unbounded region, namely the three-dimensional region defined by $|xyz| \leq 1$; and this proved to be the starting point for a good deal of new work. The value of the critical determinant is 7, and the critical lattices are closely related (as indeed was expected) to a particular cubic field. This is the cubic field of least positive discriminant, 49, and is generated by the equation $\theta^3 + \theta^2 - 2\theta - 1 = 0$ [109]. »

Ces quelques exemples montrent que Mordell et Davenport[110] participent très largement à la diffusion de leur travail sur la géométrie des nombres.

5.3.2 L'accueil de visiteurs étrangers

Mordell attire à Manchester et à Cambridge des étudiants ou des jeunes chercheurs étrangers intéressés par la théorie des nombres.
Parmi les fiches d'étudiants avancés ayant suivi les cours de Mordell à Cambridge, nous avons celle d'un jeune docteur de l'université de Lausanne, G. Vincent, qui a eu connaissance des travaux de Mordell par François Châtelet[111] de Lyon[112].
En 1935, il semble que Mordell se prépare à recevoir un étudiant de Hambourg (Bünemann). Il reçoit à ce sujet une lettre de remerciements d'Artin le 17 octobre dans laquelle ce dernier précise les thèmes de recherche qui intéressent cet étudiant. Il vient à Manchester pour faire de la théorie des nombres et il s'est pour l'instant plus particulièrement consacré à la théorie du corps de classe[113].
Après la guerre, les universités tchèques qui ont été fermées pendant six ans essaient

[108] Davenport 1950a p.166.
[109] Davenport 1950a p.171.
[110] Rappelons aussi la conférence sur la géométrie des nombres faite par Davenport en 1946 à Bruxelles.
[111] Il s'agit du fils d'Albert Châtelet dont le cours au Collège de France en 1911 intègre des résultats de Minkowski sur la géométrie des nombres. Ce cours est présenté dans le chapitre 6.
[112] Mordell (St John's), box 7.
[113] Lettre de Artin à Mordell du 17 octobre 1935, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

de se réorganiser, Jarnik écrit à Mordell en septembre 1946 afin d'étudier la possibilité d'envoyer certains de leurs étudiants en Angleterre :

> « After a long standstill of our educational and scientific activity we stand before the task of raising the level of our young generation. For this purpose, it will be very useful to send our young talented mathematicians abroad.
> [...] Now, as England is one of the leading countries in many branches of the mathematical research-work, we were very happy if we could send our young scientific workers to your country.
> [...] I hope you will be so kind as to aid me in order that I may attain the aim explained above[114]. »

Cet épisode montre que Mordell fait partie des personnes qu'il est légitime de contacter en Angleterre pour réussir à placer des étudiants. Il possède à la fois le poids institutionnel pour trouver des solutions et la crédibilité en tant que chercheur pour que la venue d'étudiants puisse être bénéfique pour eux.

Mordell n'accueille pas seulement des étudiants mais aussi des chercheurs plus confirmés. D'après une lettre de remerciements qu'il envoie à Mordell en août 1939, G. Žilinskas fait partie de ces chercheurs. Il aurait passer environ deux ans à Manchester[115] et nous avons vu qu'il a publié sur la géométrie des nombres.
En mai 1946, Johannes G. Van Der Corput doit se rendre en Angleterre avec une délégation de scientifiques. Il veut en profiter pour rencontrer Mordell afin de parler

> « about your discoveries in the war years and to speak about the Mathematical Centre of the Netherlands, especially about the relations between English and Dutch mathematicians and about the relations between pure and applied Mathematics[116]. »

Van Der Corput apparaît ici s'intéresser à des questions administratives et d'organisation de la recherche et c'est peut être de l'expérience de Mordell sur ces sujets qu'il compte profiter.
Mordell reçoit deux visiteurs français pendant qu'il se trouve à Manchester. C'est Jacques Hadamard qui introduit André Weil auprès de Mordell. Dans une lettre datée du 5 janvier 1928, Hadamard explique que Weil s'intéresse maintenant aux points rationnels sur les courbes algébriques et que

> « His intention is precisely to take your own results as a starting point and try to extend them ; this is the reason why he would be especially desirous to see you[117]. »

[114]Lettre de Jarnik à Mordell du 21 septembre 1946, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[115]Lettre de Žilinskas à Mordell du 1er août 1939, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[116]Lettre de Van Der Corput à Mordell du 15 mars 1946, Mordell (St John's), box 3, folder 33.
[117]Lettre de Hadamard à Mordell du 5 janvier 1928, Mordell (St John's), box 4, folder 37.

Weil se rend à Manchester dès le mois de janvier 1928, il rapporte plus tard que Mordell se serait en fait peu intéressé à la généralisation de son théorème sur les points rationnels des courbes elliptiques sur laquelle Weil travaillait pour sa thèse[118]. Il fait d'ailleurs part à Mordell des difficultés rencontrées pour trouver quelqu'un qui accepte de rapporter sa thèse, Emile Picard a refusé (« because I spoke too much of ideals in it ») et finalement René Garnier a accepté[119]. Weil a fait d'autres séjours par la suite à Manchester, par exemple en juin 1932[120].
Enfin nous avons la trace de la venue à Manchester de Claude Chabauty en 1938 juste après la fin de sa thèse[121].

5.3.3 La correspondance de Mordell

La correspondance de Mordell témoigne de son appartenance à un large réseau de mathématiciens. Le nombre des correspondants différents de Mordell est important, environ 130. Parmi eux 40 ont au moins trois lettres adressées à Mordell conservées dans ses archives (voir le tableau 5.3 [122]).

Correspondants	**Nombre de lettres**	**première - dernière lettre**
DAVENPORT Harold	77	03/02/1929 - 17/08/1956
HARDY Godfrey Harold	60	09/02/1920 - 29/12/1949
ERDÖS Paul	48	12/12/1933 - 23/11/1960
MAHLER Kurt	41	03/05/1932 - 07/01/1957
HASSE Helmut	21	26/11/1928 - 21/01/1972
SIEGEL Carl Ludwig	19	24/03/1926 - 23/05/1967
HEILBRONN Hans Arnold	16	28/07/1933 - 05/10/1936
RICHMOND Herbert William	14	02/12/1929 - 30/12/1943
		voir la suite page suivante

[118] WEIL 1991.
[119] Lettre de Weil à Mordell du 25 février 1928, MORDELL (St John's), box 4, folder 37.
[120] Lettre de Weil à Mordell du 6 juin 1928, MORDELL (St John's), box 4, folder 37.
[121] Lettre de Chabauty à Mordell du 12 janvier 1938, MORDELL (St John's), box 3, folder 19. Plus tard Chabauty travaille aussi sur la géométrie des nombres.
[122] Dans ce tableau seules les correspondances avec des mathématiciens ont été indiquées, en particulier nous avons exclus la correspondance familiale. Parmi les mathématiciens en correspondance avec Mordell nous avons gardé ici ceux dont au moins trois lettres adressées à Mordell sont conservées dans les archives. La deuxième colonne donne donc le nombre de lettres adressées à Mordell et la dernière les dates de la première et la dernière de ces lettres.

Correspondants	**Nombre de lettres**	**première - dernière lettre**
MILNE Edward Arthur	12	29/01/1932 - 29/05/1941
RADO Richard	11	23/01/1934 - 01/01/1943
SWINNERTON DYER Peter	11	1942 - 1963
CHAPMAN Sydney	10	11/07/1925 - 27/06/1957
HECKE Erich	9	21/02/1924 - 01/04/1939
STUART T.	9	27/12/1934 - 1938
WATSON George Neville	9	12/05/1933 - 26/09/1943
LANDAU Edmund	8	22/11/1927 - 29/04/1937
WALFISZ Arnold	8	04/06/1934 - 17/02/1938
BAER Reinhold	7	27/07/1933 - 20/10/1953
HASSÉ Henry Ronald	7	01/12/1933 - 23/01/1935
LUBELSKI Salomon	7	27/10/1937 - 25/07/1939
WEIL André	6	25/02/1928 - 06/06/1932
WEYL Hermann	6	29/09/1936 - 16/11/1939
WHITTAKER Edmund Taylor	6	28/03/1924 - 11/04/1955
HILBERT David	5	05/02/1928 - 1931
NEWMAN Maxwell H. A.	5	12/05/1933 - 1945
REMAK Robert	5	23/09/1933 - 09/08/1939
SCHUR Issai	5	09/12/1931 - 10/05/1937
SEGRE Beniamino	5	24/06/1942 - 05/06/1949
TODD John Arthur	5	19/01/1933 - 17/04/1964
VAN DER CORPUT Johannes G.	5	06/03/1935 - 30/05/1947
WESTERN A. E.	5	10/02/1936 - 21/05/1938
BAKER Henry Frederick	4	19/04/1922 - 24/01/1945
LITTLEWOOD John Edensor	4	15/10/1929 - 1933
HUA Loo Keng	4	19/03/1939 - 15/01/1957
NAGELL Trygore	4	28/01/1923 - 16/11/1959

voir la suite page suivante

Correspondants	**Nombre de lettres**	**première - dernière lettre**
Snow Charles Percy	4	18/05/1962 - 23/09/1969
Tschebotareff Nikolay	4	14/05/1931 - 19/03/1938
Veblen Oswald	4	04/09/1934 - 31/07/1939
Brun Viggo	3	15/06/1949 - 03/01/1958
Ko Chao	3	02/07/1936 - 09/09/1939
Oppenheim Alexander	3	21/12/1930 - 08/11/1946

Tab. 5.3: Correspondants de Mordell (au moins 3 lettres)

Ces correspondances sont de natures diverses. Certaines ne traitent que de questions administratives, c'est le cas par exemple de celles de Whittaker, Lubelski. D'autres concernent exclusivement des problèmes de postes et de recrutement : Veblen, Remak, Hassé. Il y a aussi de brefs échanges sur un ou deux sujets mathématiques très précis : Oppenheim (les formes quadratiques), Nagell (des équations diophantiennes particulières), Tschebotareff (équations diophantiennes et produit de formes linéaires non homogènes), Western (équations diophantiennes), Hecke (théorie analytique des nombres, fonctions theta, fonctions zeta, fonctions modulaires). Les correspondances plus importantes abordent divers aspects des thèmes précédents. Un point commun qu'il est intéressant de noter est le type de discussions mathématiques que nous trouvons. Il n'y a pas de commentaires généraux sur une méthode, une démonstration, la bonne manière d'aborder un problème, l'heuristique etc… Quand il est question de mathématiques, il s'agit presque toujours de points très précis et le plus souvent assez technique. La correspondance avec Davenport, pourtant assez volumineuse, illustre bien cette observation.

Nous voulons revenir sur un épisode à propos de la correspondance déjà mentionné mais qui prend une autre signification dans le contexte de ce chapitre. En effet, il témoigne à nouveau du passage de communications dans la sphère privée à un travail publié. En 1937, Mordell fait part à Davenport d'une démonstration de Siegel qui prouve l'existence d'une constante qui ne dépend que de n et qui majore le minimum sur les entiers de la valeur absolue du produit de n formes linéaires non homogènes. Il s'agit alors du premier résultat général (pour n formes) au sujet de la conjecture de Minkowski. Siegel communique sa méthode à Mordell dans une longue lettre datée du 8 octobre 1937[123]. Davenport s'intéresse alors à ce problème et en reprenant les idées de Siegel il simplifie sa démonstration. Siegel réagit favorablement à ce travail de Davenport et donne son accord pour qu'il soit publié. Il note cependant que l'estimation obtenue est encore assez éloignée de la borne 2^{-n} de la conjecture de Minkowski[124]. L'article de Davenport est publié finalement dans le volume de 1937 de *Acta Arithmetica*[125], c'est sa première contribution à la géométrie des nombres publiée.

5.4 Quelques aspects du travail administratif et institutionnel de Mordell

5.4.1 Le recrutement à Manchester

Nous avons vu que lorsqu'il envisage de quitter Manchester en 1931, Mordell se plaint en particulier de ne pas pouvoir être en contact avec des étudiants se destinant à la recherche en mathématiques. Effectivement, seuls deux PhD et deux Masters of Sciences sont délivrés à l'université de Manchester avant 1940[126] :

- PhD.
  - E.J. Williams, *The scattering of X-rays and the quantum theory*, 1926
  - A. Porter, *The differential analyser and some applications*, 1936
- MSc.
  W. Smith, *An investigation of the torsional stresses in prisms of irregular cross section, by the soap film analogy*, 1935
  O. Buenemann[127], *A survey of the methods for the solution of non-linear oscillation equations*, 1938.

Aucun de ces travaux ne concerne la théorie des nombres, un paradoxe pour ce qui est perçu comme « the school of Manchester ».
En fait, comme nous avons commencer à le voir, l'intervention de Mordell auprès des jeunes chercheurs prend assez peu la forme de la direction de leurs recherches. Il exerce davantage son influence par ses conseils et la motivation qu'il apporte. Il semble que cette influence soit particulièrement importante pour les collaborateurs qu'il a fait venir pour travailler avec lui :

> « The years in Manchester were very fruitful ones, both in respect of Mordell's own researches and in respect of the influence that he exercised

[123]Lettre de Siegel à Mordell du 8 octobre 1937, Mordell (St John's), box 3, folder 28.
[124]Lettre de Siegel à Mordell du 7 novembre 1937, Mordell (St John's), box 3, folder 28.
[125]Davenport 1937.
[126]D'après la base de données *Britmath* de June Barrow-Green.
[127]Buenemann est l'étudiant de Hambourg recommandé par Artin. Le titre de son mémoire semble indiquer qu'il s'est finalement dirigé vers l'analyse.

> through his students and his younger colleagues. Many of these are now well-known mathematicians, established in various parts of the world. Among them may be mentioned R. Baer (Frankfurt), the late G. Billing (Stockholm), P. Erdös (Budapest), Chao Ko (China), K. Mahler (Canberra), B. Segre (Rome), J.A. Todd (Cambridge), P. Du Val (London), L.C. Young (Madison), and the present writer [...] Among those who came under his influence, in varying degrees, at Cambridge may be mentioned R.P. Bambah (Panjab), E.S. Barnes (Adelaide), B.J. Birch (Manchester), J.W.S. Cassels (Cambridge), J.H.H. Chalk (Toronto), R.F. Churchhouse (Atlas Computer Laboratory), C.S. Davis (Brisbane), S. Knapowski (Poznań), A.M. Macbeath (Birmingham), P. Mullender (Amsterdam), K. Rogers (Los Angeles), P.A. Samet (Southampton), E.S. Selmer (Bergen), H.P.F. Swinnerton-Dyer (Cambridge)[128]. »

Mordell a joué un rôle actif dans le recrutement d'un certain nombre des mathématiciens cités par Davenport. Davenport lui-même est recruté à Manchester par Mordell en 1937 et il y reste jusqu'en 1941.

Reinhold Baer arrive à Manchester en octobre 1933, grâce à Mordell il a obtenu un Fellowship qui doit durer deux ans. Mais Mordell ne se contente pas d'intervenir au niveau institutionnel pour qu'il ait ce poste, il le renseigne sur les questions financières, il effectue les démarches administratives auprès de l'université pour l'obtention d'un permis de séjour en Angleterre et il l'accueille chez lui avec toute sa famille pendant les premiers jours à Manchester[129]. Par la suite, il l'aide à trouver un nouveau poste : il le recommande à Horatio Scott Carslaw pour aller à Sydney et le conseille pour la constitution du dossier de candidature en particulier en ce qui concerne les références nécessaires[130].

Le cas de Hans Heilbronn est un peu différent. C'est Davenport qui rencontre Heilbronn alors qu'il se trouve à Göttingen et qui contacte Mordell pour lui demander s'il n'y aurait pas une possibilité pour le faire venir en Angleterre[131]. Un Fellowship temporaire pourrait être disponible pour lui à Manchester[132] mais au moment où Davenport doit revenir d'Allemagne rien n'est encore sûr. Heilbronn rentre quand même en Angleterre avec Davenport il reste quelques mois à Manchester avant de trouver un poste à Bristol en 1934. Heilbronn doit quitter Bristol en juin 1935 et à nouveau il fait appel à Mordell

[128] Davenport 1964 p.4.

[129] Lettres de Baer à Mordell du 27 juillet 1933, du 14 août 1933 et du 24 septembre 1933, Mordell (St John's), box 1, folder 2.

[130] Lettre de Baer à Mordell du 20 août 1934, Mordell (St John's), box 1, folder 2. Nous ne savons pas si Baer a finalement obtenu ce poste.

[131] Lettre de Davenport à Mordell du 11 juillet 1933 Mordell (St John's), box 1, folder 4.

[132] Lettre de Davenport à Mordell du 23 septembre 1933 Mordell (St John's), box 1, folder 4.

pour savoir s'il peut lui trouver quelque chose à Manchester[133]. Après des démarches pour trouver un financement Mordell réussit finalement à le faire revenir à Manchester. En 1934, c'est aussi Mordell qui recommande Paul Erdös pour qu'il obtienne le Bishop Harvey Goodman Scholarship à Manchester. Encore une fois il prend les choses en main : il lui envoie le dossier de candidature avec des recommandations pour la constitution de son dossier[134]. Erdös reste à Manchester entre 1934 et 1938.
En 1938, le Bishop Harvey Goodman Scholarship est ensuite attribué à G. Billing qui envoie une lettre de remerciements à Mordell pour la part active qu'il a pris dans son recrutement

> « I am very glad to get the opportunity to continue my mathematical studies under your eminent tutorship and to profit by the excellent mathematical milieu you have created at the Manchester university[135]. »

Les exemples où Mordell est sollicité pour trouver un poste pour quelqu'un sont nombreux : Richard Courant lui recommande Fritz John[136] qui postule finalement pour le Bishop Harvey Goodwin Mathematical Scholarship à Manchester[137], Beniamino Segre est recommandé par William Hodge et John G. Semple pour un Assistant Lectureship à Manchester[138], A.R. Richardson veut connaître les possibilité pour Rosenhead à Manchester[139], Philipp Furtwängler demande son aide pour F. Pollaczek[140]. On lui demande parfois son avis sur des recrutements hors de la théorie des nombres ou dans d'autres universités que Manchester : Douglas R. Hartree (un de ses collègues à Manchester) discute avec lui des candidatures de Hopf et Bhabha pour un poste d'Assistant Lecturer en 1938 [141], Thomas G. Cowling souhaite qu'il lui suggère des candidats pour un poste d'Assistant Lecturer of pure Mathematics à l'university College of North Wales[142].
Mordell est aussi contacté directement par les intéressés : Heinrich Grell lui demande son aide pour trouver un emploi[143], Kurt Mahler fait part à Mordell de son intérêt pour venir à Manchester dès le mois de mai 1932 [144] et il arrive en Angleterre en 1933.
Le cas de Mahler est exemplaire d'un réseau dans lequel Mordell est particulièrement

[133]Lettre de Heilbronn à Mordell du 19 décembre 1934 Mordell (St John's), box 2, folder 11.
[134]Lettres de Erdös à Mordell du 7 mars 1934 et du 22 mai 1934, Mordell (St John's), box 1, folder 6.
[135]Lettre de Billing à Mordell du 6 septembre 1938, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[136]Lettre de Courant à Mordell du 12 mai 1934, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[137]Lettre de John à Mordell du 18 mai 1934, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[138]Lettre de Hodge à Mordell du 19 août 1941, lettre de Semple à Mordell du 26 août 1942, Mordell (St John's), box 3, folder 27.
[139]Lettre de Richardson à Mordell du 13 juin 1933, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[140]Lettres de Furtwängler à Mordell du 10 novembre 1935 et du 29 décembre 1935, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[141]Lettre de Hartree à Mordell du 6 mai 1938, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[142]Lettre de Cowling à Mordell du 14 juin 1946, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[143]Lettre de Grell à Mordell du 14 décembre 1935, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[144]Lettre de Mahler à Mordell du 3 mai 1932, Mordell (St John's), box 2, folder 17.

actif : celui des mathématiciens juifs qui fuient les persécutions. Un grand nombre des mathématiciens cités précédemment sont dans ce cas et Mordell semble avoir joué un rôle important dans l'accueil des mathématiciens réfugiés[145].

5.4.2 Mordell et l'aide aux mathématiciens réfugiés

L'attitude de Mordell par rapport à la montée du nazisme et la Seconde Guerre Mondiale peut apparaître comme assez paradoxale. Nous avons pu observer que Mordell comme Davenport sont très productifs à la fin des années 1930 et pendant les années 1940, en particulier en ce qui concerne la géométrie des nombres. Leur rythme de publication ne faiblit pas et ils démontrent des résultats importants comme par exemple le théorème sur les formes cubiques binaires de Mordell. De plus, leurs contacts avec l'Allemagne continuent pendant plusieurs années après l'arrivée de Hitler au pouvoir. Dès le mois d'avril 1933 Davenport est à Marbourg avec Hasse et il reste en Allemagne jusqu'à la fin du mois de septembre 1933 [146]. En août 1934, il est en vacances avec Hasse à Partenkirche[147]. En mars 1935, c'est Hasse qui est à Cambridge avec Davenport[148] et au début de l'année 1936, Hasse essaie d'arranger une conférence à Manchester avec Mordell[149].
Parallèlement, Davenport étant en Allemagne au début de l'année 1933, ils sont très vite conscients des difficultés qui attendent les mathématiciens d'origine juive

> « Term has been postponed at all the Prussian Universities until May 1. I hope Landau, E. Noether, Heilbronn do not come to any harm[150]. »

> « The outlook among Göttingen mathematicians[151] is not very cheerful, but I have had some interesting talks with Heilbronn[152]. »

Mordell se retrouve alors intégré dans un réseau de solidarité envers les mathématiciens réfugiés[153] : il est mis à contribution pour trouver des postes, des financements etc...

[145]Pour des éléments sur l'organisation de la communauté universitaire britannique face à l'arrivée de mathématiciens réfugiés voir Fletcher 1986.
[146]Lettres de Davenport à Mordell d'avril 1933 et du 23 septembre 1933, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[147]Carte postale de Davenport à Mordell du 12 août 1934, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[148]Lettre de Hasse à Mordell du 10 mars 1935, Mordell (St John's), box 2, folder 9.
[149]Lettre de Hasse à Mordell du 10 mars 1935, Mordell (St John's), box 2, folder 9.
[150]Lettre de Davenport à Mordell « Good Friday » 1933, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[151]Sur la situation des mathématiciens à Göttingen pendant la période nazie voir Schappacher 1987.
[152]Lettre de Davenport à Mordell du 6 juin 1933, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[153]Pour des informations sur les mathématiciens réfugiés voir Siegmund-Schultze 1998.

Tout cela donne l'impression qu'ils séparent complètement leur travail mathématique et la situation politique de l'époque. En même temps, les activités de Mordell dans l'aide aux réfugiés ont aussi des conséquences sur la recherche à travers les recrutements effectués et les contacts qui se créent. Revenons sur le cas de Mahler qui est emblématique.

En 1932, Mahler apprend par l'intermédiaire de Siegel que la fondation Rockefeller lui a attribué un financement. Il semble qu'il ait été très intéressé par une conférence de Mordell à Zürich[154] sur la théorie des nombres (il ne précise pas sur quel sujet) et il voudrait donc profiter de ce financement pour venir à Manchester[155]. La situation politique en Allemagne vient cependant contrarier ce projet :

> « In the last time I tried in vain to "habilitate". The situation of today in my country makes it now impossible, because I am a Jew. It follows that I shall not be granted a fellowship of the Rockefeller-Foundation. But I should like to come Manchester and learn from you something of "Zahlentheorie" ; in Zurich your lecture was most interesting. Therefore I take the liberty to beg you if there is no other possibility to come to your university, perhaps by an English "Stipendium" ? Or when I come on my own expenses, will the living very dear ? Must I pay much as a foreigner for the permission to hear your lectures ? I should be glad if I could work as your assistent or hold lectures of my own, especially on the theory of Diophantine equations and transcendental numbers[156]. »

La suite de cette lettre donne une idée du thème de ses travaux mathématiques récents. Il vient de faire un rapport pour le *Jahrbuch* de l'article d'André Weil *L'arithmétique sur les courbes algébriques*. Il juge que ce travail a été difficile « because there are too many definitions » mais il reconnaît que cela a été l'occasion pour lui d'apprendre en particulier au sujet des fonctions algébriques. Il a aussi récemment terminer un article sur l'approximation des nombres algébriques qu'il envoie à Mordell.
Dans la citation précédente Mahler est très insistant sur son envie de venir à Manchester. Son désir de quitter l'Allemagne n'y est certainement pas étranger, mais en même temps il revient à plusieurs reprises dans sa correspondance sur son intérêt à venir apprendre de la théorie des nombres auprès de Mordell. Par exemple, lorsqu'il évoque l'éventualité de partir aux Etats Unis, il note

> « I should prefer to have been previously for a time in England in order to learn good English and from you as much as possible of the theory of

[154] D'après Coates et van der Poorten 1994 p.267, Mahler et Mordell se seraient aussi rencontrés à Göttingen. Peut-être lors de la visite de Mordell en 1932.
[155] Lettre de Mahler à Mordell du 3 mai 1932, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[156] Lettre de Mahler à Mordell du 4 avril 1933, Mordell (St John's), box 2, folder 17.

numbers[157]. »

Mordell obtient finalement pour lui le Bishop Harvey Godwin Fellowship pour l'année universitaire 1933-1934[158]. Dans ses lettres à Mordell de mai 1933 à octobre 1933, Mahler le tient au courant de ses recherches, lui donne quelques nouvelles de la situation en Allemagne (renvoie de Noether et Courant de Göttingen). Il discute enfin des derniers détails administratifs pour préparer son arrivée à Manchester en octobre : obtention d'un permis pour quitter l'Allemagne, problème pour faire sortir de l'argent de son pays.

Les années universitaires suivantes de 1934 à 1936, Mahler se trouve à Groningen aux Pays-bas pour un Fellowship arrangé par Van Der Corput grâce à une aide financière d'une association juive néerlandaise. Il revient ensuite à Manchester en 1937 où jusqu'en 1941 mais il n'a pas de situation stable. Il occupe deux postes temporaires d'assistant, il reçoit un peu d'argent d'un Fellowship et il vit pendant au moins deux ans sur ses propres économies[159]. Mordell joue un rôle important dans le retour de Mahler à Manchester et dans l'obtention de soutiens financiés pendant cette période. Comme son Fellowship à Groningen se termine en mai 1936, dès novembre 1935, Mahler cherche un nouveau poste. Il a postulé à Saratow en Russie mais n'est pas très optimiste à ce sujet, il demande donc à Mordell s'il peut le recommander auprès des mathématiciens de Birmingham car un fond vient d'y être débloqué pour la création d'un Fellowship temporaire destiné aux réfugiés[160]. Mordell contacte alors Watson à Birmingham[161] mais Mahler n'y obtient pas de poste. Quand ils se rencontrent au congrès international de 1936 à Oslo, Mordell fait part à Mahler de la possibilité de le faire revenir pour un nouveau Fellowship à Manchester[162]. En fait il semble que Mordell lance alors une collecte d'argent pour financer ce poste pour Mahler

> « I had not forgotten our conversation at Asgardstrand concerning the possibility of getting some money for getting a German refugee to Manchester for a time. I have talked it over with Heilbronn and we are each sending you £25 for the purpose. I hope it is not too small a sum to be of any use[163]. »

En plus de Davenport et Heilbronn, nous savons qu'Olga Taussky, alors à Cambridge, envoie aussi un chèque de £5[164].

Mordell a aussi sollicité Hermann Weyl au sujet de Mahler, ils en avaient déjà discuté à Oslo et le 29 septembre 1936, Weyl confirme à Mordell qu'il a contacté the German

[157]Lettre de Mahler à Mordell du 12 mai 1933, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[158]Coates et van der Poorten 1994 p.267.
[159]Coates et van der Poorten 1994 p.268.
[160]Lettre de Mahler à Mordell du 3 novembre 1935, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[161]Lettre de Mahler à Mordell du 8 novembre 1935, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[162]Lettre de Mahler à Mordell du 1er septembre 1936, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[163]Lettre de Davenport à Mordell du 29 septembre 1936, Mordell (St John's), box 1, folder 4.
[164]Lettre de Taussky à Mordell du 27 novembre 1936, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

Mathematicians' Relief Fund d'obtenir $350 pour Mahler[165]. Quand à la fin de l'année 1936, la création du Fellowship est confirmée, Mordell veut renvoyer cet argent à Weyl mais ce dernier refuse et il veut que Mahler le garde car

> « If he is under shelter now, he is certain to have to face rainy days again[166]. »

Cet argent a certainement été utile car comme nous l'avons dit Mahler n'a pas de poste permanent avant 1941. Une lettre d'Erdös à Mordell de mars 1939 indique qu'il essayé d'obtenir un Fellowship à Princeton mais cela n'aboutit pas[167]. Le début de la guerre en 1939 l'aurait aussi obligé à renoncer à un poste à l'université de Szechuan en Chine où il devait rejoindre Chao Ko[168].
Au cours de l'année 1940, il est interné dans un camp pour réfugiés (voir la figure 5.7 [169]). Dans des lettres, Mahler décrit à Mordell les conditions de vie difficiles dans ce camp et lui demande d'essayer de faire des démarches pour le faire sortir[170].
En particulier, il voit dans une invitation de Chao Ko pour se rendre en Chine le moyen de sortir du camp. Il demande à Mordell d'essayer d'organiser pour lui ce voyage, il pense que cette conférence pourrait être un bon motif pour que les autorités britanniques lui permettent de sortir

> « Since my lectures at Omei will be given in English and so will propagate English culture, it can only be in the interest of the British Government to help me[171]. »

La situation se stabilise pour Mahler en 1941 quand il succède à Davenport comme Assistant Lecturer à Manchester. Il reste par la suite à Manchester où il occupe successivement les postes de Lecturer (en 1944), Senior Lecturer (en 1947), Reader (en 1949) et en 1952 « the first personal chair in the history of the University[172] ». Mahler continue cependant à demander conseil à Mordell à propos de sa carrière. En 1946, un poste plus avantageux financièrement lui est proposé en Afrique du Sud à Cape Town[173]. Il semble que Mahler, qui préférerait rester à Manchester, suive alors les indications de Mordell pour négocier une promotion. Mahler passe Senior Lecturer en 1947 et remercie Mordell pour ses conseils

[165] Lettre de Weyl à Mordell du 29 septembre 1936, Mordell (St John's), box 4, folder 39.
[166] Lettre de Weyl à Mordell du 27 octobre 1937, Mordell (St John's), box 4, folder 39.
[167] Lettre de Erdös à Mordell du 18 mars 1939, Mordell (St John's), box 1, folder 6.
[168] Coates et van der Poorten 1994 p.268.
[169] Carte de Mahler à Mordell du 18 juillet 1940, Mordell (St John's), box 2, folder 17. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[170] Lettres de Mahler à Mordell du 18 juillet 1940 et du 21 août 1940, Mordell (St John's), box 2, folder 17. Une de ces lettres est reproduite en annexe.
[171] Lettre de Mahler à Mordell du 12 septembre 1940, Mordell (St John's), box 2, folder 17. Nous ne savons pas si Mahler s'est finalement rendu en Chine pour faire cette conférence.
[172] Coates et van der Poorten 1994 p.268.
[173] Lettre de Mahler à Mordell du 11 mai 1946, Mordell (St John's), box 2, folder 17.

FIG. 5.7 – Carte de Mahler du camp d'internement du 18 juillet 1940

> « Thanking you for your excellent lesson in departmental strategy[174] ».

L'exemple de la solidarité de Mordell à l'égard de Mahler est aussi intéressant car les nouvelles relations qui se tissent entre ces deux mathématiciens pourraient être à l'origine du travail de Mahler sur la géométrie des nombres. Il n'y a pas de déclaration explicite qui le confirme dans les lettres de Mahler à Mordell mais des coincidences de dates entre le début des contacts entre Mordell et Mahler et l'apparition de nouveaux thèmes de recherches sont frappantes.
D'après Coates et Van Der Pooten, Mahler commence à s'intéresser à la géométrie des nombres alors qu'il se trouve aux Pays-Bas entre 1934 et 1936 [175] juste après le premier séjour de Mahler à Manchester et que les contacts avec Mordell se soient intensifiés. La correspondance permet de préciser cette affirmation. Dans une lettre à Mordell du 12 avril 1936, il indique qu'il vient de commencer à étudier la géométrie des nombres

> « At present I am studying the Minkowski theorem on the successive minima of a convex body, about which I intend to lecture after my return to Groningen next week. His proof is very clear, but he has not represented it so very well in the Geometrie der Zahlen, since he is too anxious to prove every small particularity[176]. »

De plus, Mahler est à Manchester entre 1937 et 1941 alors que Mordell et Davenport s'y trouve tous les deux. C'est la période pendant laquelle ils travaillent sur le produit de trois formes linéaires homogènes et où Mordell commence à s'intéresser aux formes cubiques binaires. Rappelons qu'ils voient ces résultats comme la première étape vers une théorie de la géométrie des nombres pour des domaines non convexes. Une lettre de Mahler à Mordell de 1941 montre que Mahler est intégré aux échanges sur ces thèmes[177] et au début des années 1940 il commence lui aussi à publier sur ces questions

> « Mahler developed a geometry of numbers of general sets in n-dimensional space[178] ».

Effectivement, ces premiers articles sur les domaines étoilés sont publiés dans le *Journal of the London Mathematical Society* en 1942 et 1943. Entre 1942 et 1946, sur les 20 articles qu'il publie, 14 ont pour thème central la géométrie des nombres.

B. Segre, F. John, F. Pollaczek, H. Grell que nous avons cités sont tous des exemples de mathématiciens qui cherchent à quitter leur pays pour des raisons politiques et pour lesquels Mordell est sollicité. À cette liste nous pouvons aussi ajouter Otto Szász[179] et

[174] Lettre de Mahler à Mordell du 13 mai 1946, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[175] Coates et van der Poorten 1994 p.268.
[176] Lettre de Mahler à Mordell du 12 avril 1936, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[177] Lettre de Mahler à Mordell du 9 août 1941, Mordell (St John's), box 2, folder 17.
[178] Coates et van der Poorten 1994 p.268.
[179] Lettre de Hannah Remak à Mordell du 22 juillet 1933, Mordell (St John's), box 3, folder 19.

Robert Remak. Entre septembre 1933 et août 1939 plusieurs lettres, de Remak lui-même, de sa femme Hertha Remak et de Hans Freudenthal, informent Mordell de la situation de Remak[180]. Nous avons mentionné le travail de Remak en géométrie des nombres et en particulier sur les produits de formes linéaires, il a donc des intérêts mathématiques communs avec Mordell. Mais contrairement à ce que nous avons observé avec Mahler, les échanges entre les deux mathématiciens ne sont pas l'occasion de communiquer sur leurs travaux mathématiques.

Le cas de Heilbronn illustre les difficultés à recueillir des fonds afin d'accueillir tous ces réfugiés ainsi que les réseaux qui sont mobilisés pour y parvenir. Après que Davenport ait demandé à Mordell d'essayer de trouver un poste à Heilbronn, que Landau[181] lui ait aussi envoyé une recommandation à son sujet, Mordell pense le faire venir à Manchester. D'ailleurs, en août 1933, c'est la solution qui paraît se dessiner et Heilbronn exprime sa satisfaction de venir à Manchester

> « Of course I would be very happy to stay at Manchester and to work with you, since I am specially interested in analytic theory of numbers[182]. »

Pour financer la venue de Heilbronn, Mordell commence par s'adresser au *Central British Fund for German Jewry* qui lui indique qu'il doit contacter l'*Academic Assistance Committee*[183]. Mais à nouveau, Mordell est orienté sur une autre association mieux adaptée à la situation de Heilbronn

> « the assistance given by the Academic Assistance Council and, to a great extent, by this Committee, is being confined to people who have had high academic standing in their country.
> The case of students and people who have just completed their studies is being dealt with by another Jewish Committee, which has just been formed, and other organisations, such as the International Student Service, are interesting themselves in this part of the work[184]. »

Mordell finit par trouver les bons interlocuteurs et le *Committee of Assistance to Foreign Scholars*[185] accepte de mettre Heilbronn sur la liste des réfugiés susceptibles d'être

[180]En particulier Mordell reçoit une lettre de Hertha Remak le 18 novembre 1938 pour lui demander son aide pour quitter l'Allemagne, soit 9 jours après la nuit de cristal au cours de laquelle Remak aurait été arrêté. MORDELL (St John's), box 3, folder 24. Nous ne savons pas si Mordell a effectué des démarches pour Remak.

[181]Lettre de Landau à Mordell du 26 août 1933, MORDELL (St John's), box 2, folder 13. Il semble que Landau ait aussi demandé le soutien de Littlewood.

[182]Lettre de Heilbronn à Mordell du 26 août 1933, MORDELL (St John's), box 2, folder 13.

[183]Lettre du *Central British Fund for German Jewry* à Mordell du 24 septembre 1933, MORDELL (St John's), box 2, folder 11.

[184]Lettre du Joint Foreign Committee à Mordell du 27 septembre 1933, MORDELL (St John's), box 2, folder 11.

[185]Il s'agit d'un comité de l'université de Manchester.

assistés sous réserve que l'*Academic Assistance Council* trouve les fonds nécessaires[186]. Mais Mordell ne réussit pas à réunir suffisamment d'argent pour accueillir Heilbronn à Manchester. Mordell prend alors contact avec Henry Ronald Hassé de Bristol. Ce dernier avait engagé des démarches pour trouver différentes sources de financement (en particulier auprès de la communauté juive locale) pour faire venir un mathématicien juif d'Allemagne. Il suggère donc que Heilbronn pourrait venir à Bristol quitte à organiser pour lui la possibilité de s'absenter pendant plusieurs semaines pour travailler à Manchester où les mathématiciens ont des intérêts scientifiques plus proches des siens[187]. Le poste de Heilbronn pour 1934-1935 est finalement arrangé mais dès décembre 1934 la correspondance entre Mordell et Hassé reprend pour trouver de nouveaux financements en prévision de la fin du Fellowship à Bristol en juin 1935. Mordell obtient en 1935 un scholarship pour Heilbronn à Manchester.
Dans les années 1930, Heilbronn commence une longue collaboration avec Davenport. Des articles écrits en collaboration sont encore publiés en 1969 et 1971 alors que Davenport décède en 1969.

L'exemple de Heilbronn montre que plusieurs associations semblent avoir été constituées pour l'aide aux réfugiés. Beaucoup sont liées à la communauté juive et nous pouvons penser que Mordell, qui est d'origine juive, est bien implanté dans cette communauté[188].
Dès août 1933, Mordell s'adresse aussi à la fondation Rockefeller pour demander une aide pour K. Mahler, R. Baer, H. Heilbronn, B. Neumann et F. Behrend. Le règlement de la fondation exige que les mathématiciens bénéficiant d'un de ses financements puissent ensuite revenir en poste dans leur pays d'origine[189]. Ce point de règlement est évidement impossible à satisfaire pour les réfugiés et Mordell demande s'il serait possible de faire des exceptions. Mais la fondation ne suit pas Mordell sur cette question et l'informe que les mathématiciens qu'il a proposés ne pourront pas être aidés car ils ne sont pas « mature enough to fall within the group of eminent deposed scholars whom the officers in Paris are authorized to assist through the Special Research Aid Fund appropriated from New York[190]. »
L'activisme de Mordell en ce qui concerne l'assistance aux mathématiciens réfugiés semble reconnu. Il est invité en septembre 1933 à participer à une réunion de l'*Academic*

[186] Lettre du Vice Chancellor de l'université de Manchester à Mordell du 19 octobre 1933, Mordell (St John's), box 2, folder 11.
[187] Lettre de Hassé à Mordell du 1er décembre 1933 Mordell (St John's), box 2, folder 11.
[188] Nous avons la trace d'un don de Mordell aux *Amis de l'université juive de Jérusalem* en 1943, Mordell (St John's), box 3, folder 19.
[189] Pour les différents critères requis pour obtenir un financement de la Fondation Rockefeller voir Siegmund-Schultze 2001 p.79-81.
[190] Lettre de Lauder W. Jones à Mordell du 13 septembre 1933, Mordell (St John's), box 3, folder 23.

Assistance Council :

> « Lord Rutherford, Sir Austen Chamberlain, Lord Hugh Cecil, Miss Maude Royden and Professor Einstein have kindly agreed to speak at a meeting in the Royal Albert Hall on Tuesday, October 3rd., at 8 p.m., organised under the auspices of the Academic Assistance Council, International Student Service, Germany Committee of the Society of Friends, and the Refugee Professionals Committee.
>
> The meeting - which is entirely non-political - is called to consider plans for assisting the professional and academic workers displaced in Germany[191]. »

Plusieurs correspondants de Mordell témoignent de l'épuisement rapide des fonds de ces différentes associations et de la difficulté pour les mathématiciens d'obtenir des financements de leur part. John C. Burkill s'adresse directement à Mordell pour recommander Willy Feller car il sait que « Manchester has done a good deal for refugees » et qu'il y a peu de chance qu'il obtienne de l'argent de l'*Academic Assistance Council* qui manque de fonds[192]. Richard Rado, qui avait demandé en 1934 à Mordell de le recommander auprès de l'*Academic Assistance Council*[193], ironise en septembre 1936 sur les problèmes que semblent rencontrer plus particulièrement les mathématiciens pour trouver des postes (voir la figure 5.8 [194]).

Le travail effectué par Mordell pour aider les réfugiés pendant cette période est reconnu très rapidement. En août 1933, Selig Brodetsky profite de l'expérience de Mordell et veut savoir comment la création d'un poste s'organise à Manchester car il voudrait aussi inviter un mathématicien réfugié à l'université de Leeds[195] sur le même modèle[196].
Il est aussi intéressant de remarquer que Mordell est contacté en 1942 par le ministère de l'information pour obtenir des illustrations du travail des juifs pendant la guerre

> « We have received a request from the British Press Service in New York for a series of photographs illustrating the activities in war time of a number of distinguished Jews in this country, and particular reference is made to

[191] Lettre de Walter Adams à Mordell du 28 septembre 1933, MORDELL (St John's), box 3, folder 23.
[192] Lettre de Burkill à Mordell du 28 juin 1934, MORDELL (St John's), box 3, folder 23. Voir aussi à ce sujet la lettre de Mahler à Mordell du 3 novembre 1935, box 2, folder 17.
[193] Lettre de Rado à Mordell du 13 septembre 1934, MORDELL (St John's), box 3, folder 21.
[194] Lettre de Rado à Mordell du 6 septembre 1936, MORDELL (St John's), box 3, folder 21. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[195] Il est possible que l'idée initiale vienne de Mordell.
[196] Lettre de Brodetsky à Mordell du 5 août 1933, MORDELL (St John's), box 3, folder 19. Il semble qu'un des candidats proposés par Mordell, B. Kaufmann, ait été recruté.

FIG. 5.8 – Lettre de Richard Rado à Mordell du 6 septembre 1936

yourself[197]. »

Dans les archives de Mordell est conservée une liste d'universités avec pour chacune des informations sur le devenir de mathématiciens qui y étaient en poste. Ces informations ont été réunies par Franz Rellich certainement après la guerre, nous ne savons pas comment elles ont été transmises à Mordell (voir les figures 5.9 et 5.10 [198]).

Conclusion

L'insistance qui est mise sur « Die Schule in Manchester um Mordell[199] » par plusieurs mathématiciens est intéressante car elle permet de voir que les acteurs identifient un moment important qui influence les développements ultérieurs de la discipline pour ce qui est de la géométrie des nombres ; et qui peut-être plus largement a un impact sur la théorie des nombres telle qu'elle est pratiquée en Angleterre (choix des thèmes, méthodes privilégiées etc. . .). Cependant la notion d'« école » comme catégorie d'analyse, telle que historiens et sociologues ont essayé de la définir en reprenant cette catégorie des acteurs, ne semble pas correspondre complètement à ce que nous avons décrit précédemment.

Deux aspects cruciaux de la définition d'une école de recherche sont l'existence d'un lieu dans lequel sont réunis les membres du groupe et d'un leader dont le rôle est lui aussi très spécifique. Les commentaires laissent penser que ces conditions sont remplies dans le cas qui nous occupent avec l'association constante qui est faite entre Manchester et Mordell. Nous pensons néanmoins que ce que nous avons vu du fonctionnement de cette communauté de mathématiciens révèle une organisation différente de celle d'un leader qui organise la recherche dans un lieu unique.
La question géographique apparaît en fait déjà problématique si nous revenons sur certains commentaires. Certes Manchester est le plus souvent mis en avant mais parfois le nom de Mordell est aussi associé à Cambridge où il se trouve à partir de 1945. Cassels qui est peut être le plus connu en tant qu'élève de Mordell n'a jamais été à Manchester en tant qu'étudiant. De plus, si nous nous limitons à Manchester, nous perdons de vue la majeure partie de la collaboration entre Mordell et Davenport qui joue un rôle dynamique important dans leur propre recherche mais aussi dans celle des mathématiciens de leur entourage. L'influence de cette collaboration se voit par exemple dans

[197] Lettre de H.A. Goodman (Religion Division, Ministry of Information) à Mordell du 9 avril 1942, Mordell (St John's), box 3, folder 23.
[198] Mordell (St John's), box 4, folder 41. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.
[199] Hlawka 1980 p.398.

Fig. 5.9 – Devenir de mathématiciens après la guerre (première partie)

FIG. 5.10 – Devenir de mathématiciens après la guerre (fin)

les échanges très nombreux entre leurs séminaires respectifs qui se tiennent d'ailleurs à Cambridge et à Londres. En fait, la période pendant laquelle Mordell et Davenport sont tous les deux à Manchester s'étend seulement de 1937 à 1941 [200], pourtant leur collaboration commence bien plus tôt et dure jusqu'à la mort de Davenport en 1969.
La place occupée par Davenport au côté de Mordell est un premier indice du fait que Mordell ne remplit pas les conditions attendues pour le leader d'une école de recherche. Il est vrai qu'il joue un rôle de guide pour Davenport au début de sa carrière. Mais les définitions de la notion d'« école » insiste sur un rapport hiérarchique fort entre un leader et ses élèves ou collaborateurs qui ne nous semble pas exister dans le cas de Mordell.
D'un point de vue institutionnel, Mordell ne montre pas réellement l'ambition de créer un centre de recherche en mathématiques. À titre de comparaison, nous pouvons regarder quelques caractéristiques données par David Rowe sur ce qui s'est passé sous l'ère de Klein et Hilbert à Göttingen[201]. Il y a en particulier chez Klein un volontarisme politique fort pour implanter à Göttingen un centre de recherche en mathématiques. Mais il poursuit un projet plus général en permettant le développement des mathématiques appliquées, en créant des instituts de recherche dans d'autres domaines comme la physique ou la mécanique, en tissant des liens avec l'industrie ou encore en lançant des grands projets comme celui de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Un des moyens utilisés par Klein est de faire venir à Göttingen parmi les scientifiques les plus prestigieux dans différentes spécialités. Mordell ne suit pas un projet aussi ambitieux, la dynamique qu'il créée est limitée

[200] Nous ne parlons pas ici de l'époque où Davenport est étudiant à Manchester.
[201] ROWE 1989.

à la théorie des nombres et à des thèmes mathématiques proches de ses intérêts. Ses interventions dans des recrutements apparaissent plus comme des réactions au cas par cas selon les opportunités qui se présentent. Les premiers contacts avec Mahler ou Heilbronn sont la conséquence de la situation politique en Allemagne, ce ne sont pas encore à cette époque des mathématiciens reconnus mais leurs thèmes de recherche sont liés à ceux de Davenport et Mordell. Ce dernier s'investit alors très fortement pour leur venue en Angleterre.

Mordell n'impose pas un programme de recherche précis à ses collaborateurs, il intervient de manière moins directive. Il sensibilise les étudiants aux sujets qui l'intéressent dans ses cours et au cours de séminaires. Pour les jeunes chercheurs, il est une figure qui encourage, motive et conseille. Son influence est peu transmise par des relations du type étudiant/directeur comme Della Fenster le décrit au sujet de Leonard Eugene Dickson. Pour rendre compte de l'influence de Dickson auprès de ses étudiants elle reprend la distinction entre le mentor (qui désigne « older people in an organization or profession who take younger colleagues under their wings and encourage and support their career progress until they reach mid-life » ou quelqu'un « higher in the institution or organization who coaches, teaches, advises, provides support and guidance, and help mentee achieve his or her goals[202] ») et le modèle (qui « possesses skills and displays techniques which the student lacks ... and from whom, by observation and comparison with his own performance the student can learn[203] »). Si la transmission avec Dickson passe par l'exemple qu'il donne à ses étudiants[204], Mordell présente lui davantage les caratéristiques du mentor.

Le rôle social de Mordell prend diverses formes. Au sein du groupe il intervient avec l'organisation de séminaires et le recrutement. Il est aussi un intermédiaire important dans les relations à l'extérieur du groupe. Son réseau de contact est international et il entretient ces échanges par sa correspondance, ses voyages et en faisant venir de nombreux chercheurs étrangers.

Au cours des échanges au sein du groupe ou avec l'extérieur ce qui circule peut être très concret comme de l'argent, des informations sur des postes, des problèmes liés à des publications ou l'organisation de cours et de séminaires. Mais il circule aussi parfois un intérêt pour un nouveau thème de recherche, de nouvelles démonstrations, de nouveaux résultats, des méthodes ou des idées pour aborder un problème dont nous pouvons voir la trace par la suite dans les publications.

La catégorie « école » apparaît donc trop rigide pour décrire ce qui se passe autour de Mordell et de Davenport[205]. Nous avons un type de socialisation qui n'est pas organisé

[202] Fenster 1997 p.9.
[203] Fenster 1997 p.9.
[204] Fenster 1997 p.16.
[205] L'étude précédente se focalise sur la personnalité de Mordell mais le même travail sur Davenport montrerait certainement aussi qu'il exerce une grande influence sur la théorie des nombres en

autour d'une personnalité unique et d'un lieu unique, mais dont les caractéristiques se rapprochent davantage de ce que Diana Crane a appelé un « groupe de solidarité[206] ». Il s'agit d'un groupe de collaborateurs réunis autour d'un ou plusieurs professeurs influents qui recrutent et socialisent de nouveaux membres, définissent les problèmes importants dans leurs spécialités et qui communiquent avec d'autres groupes. Le rôle directif des leaders du groupe, bien que moins fort avec cette notion, est peut être encore trop grand. Nous n'avons pas trouvé de déclaration de Mordell sur ce que sont les questions les plus importantes, au contraire nous avons noté qu'il laissait le choix de leurs thèmes de recherche à ses étudiants. Malgré cela nous avons pu remarquer les liens entre le travail de Mordell et les thèmes choisis par beaucoup de ses collaborateurs, l'influence de Mordell se passe certainement à un autre niveau, à travers les cours, les séminaires ou bien des relations personnelles.

Nous constatons donc avec Mordell et Davenport une conception disciplinaire de la géométrie des nombres qui est complètement différente de celle de Minkowski. Avec Minkowski, la géométrie des nombres se définit bien par des caractéristiques internes et Minkowski est le seul à participer à son développement. Le chapitre précédent a montré qu'il est beaucoup plus difficile de caractériser la géométrie des nombres de Mordell et Davenport comme discipline à l'aide de critères purement intellectuels à cause de la variété des objets étudiés et des méthodes utilisées. Par contre, avec eux, il est pertinent d'envisager la discipline comme une entreprise collective. La communauté est soudée par l'étude de problèmes comme celui du produit de formes linéaires non homogènes. Cette question est enseignée (voir le cours de Mordell dans le chapitre suivant), elle est le sujet d'interventions lors de séminaires (voir celles de Davenport page 361), plusieurs mathématiciens liés à ce groupe publient sur ce sujet (Mordell, Davenport, Dyson, D.B. Sawyer, A.M. Macbeath, E.S. Barnes, L.E. Clarke, P.A. Samet etc). Nous voyons là comment un énoncé mathématique peut jouer un rôle social qui n'est pas sans rappeler celui attribué au microscope par Bruno Strasser[207]. Il s'agit d'un objet intellectuel qui organise une variété de pratiques collectives. C'est dans ce sens que la géométrie des nombres de Mordell et Davenport peut être caractérisée comme un champ disciplinaire[208]. Pour appuyer cette idée, rappelons l'importance accordée à

Angleterre, qu'il possède un vaste réseau de relations etc...

[206] Crane 1972 p.35.

[207] Strasser 2002. Voir les commentaires sur cet article dans l'introduction à la page 20.

[208] Pour un autre exemple en histoire des mathématiques voir Goldstein et Schappacher 2007a où l'ensemble des travaux liés aux *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss est caractérisé comme un champ de recherche. Le rôle d'un ou plusieurs objets intellectuels dans l'organisation du champ apparaît aussi dans cet exemple : « It [the *Disquisitiones Arithmeticae*] provided the field with technical tools, and a stock of proofs to scrutinize and adapt. It also provided concrete examples of the very links between different branches of mathematics that created the field, often articulated around richly textured objects and formulae, such as the cyclotomic equation or Gauss sums. », Goldstein et Schappacher 2007a p.58.

l'histoire dans la définition de la notion de « champ » (voir l'introduction page 24). Les nombreuses interventions de Mordell dans la construction d'une histoire collective de la géométrie des nombres peuvent être interprétées dans ce cadre : ses articles comportent souvent de brefs historiques des questions qu'il traite et il défend Minkowski quand le journal anglais *The Engineer* conteste le Grand Prix de l'Académie des Sciences qui lui a été attribué (voir le commentaire à ce sujet page 42).

Chapitre 6

Les cours : retour sur les aspects pédagogiques de la discipline

Sommaire

Il a été indiqué dans l'introduction que certains historiens percevaient le rôle de l'enseignement comme fondamental dans la définition d'une discipline. Les cours spécialisés sur un sujet ont pour fonction de former de nouveaux scientifiques susceptibles de participer à son développement. De plus, ce qui est transmis dans ces cours influence les pratiques de recherche adoptées par ces nouveaux entrants dans la discipline.
L'objectif de ce chapitre est donc de donner un aperçu de la géométrie des nombres à travers la manière dont elle est enseignée. Nous essayons de voir si la pédagogie mise en oeuvre dans les cours montre une organisation différente de la géométrie des nombres par rapport à ce qui a été observé dans le travail de recherche des mathématiciens.
Nous examinons pour cela des cours tous professés après la mort de Minkowski. Nous avons retrouvé cinq cours donnés par Albert Châtelet, Hans Frederik Blichfeldt, Carl Ludwig Siegel, Louis Mordell et Harold Davenport. Deux de ces cours ont été publiés (Châtelet et Siegel), les trois autres sont des notes manuscrites ou dactylographiées non publiées.
Pour comparer ces cours, nous reprenons certains critères proposés par Ralf Haubrich que nous avons déjà mentionnés dans l'introduction. Nous relèverons dans chaque cas quels sont les objets étudiés, quels sont les concepts ou les résultats clés, quelles sont les méthodes employées et enfin s'il se dégage de l'organisation des cours une systématisation de la discipline.

6.1 Présentation des cours

6.1.1 Les *Leçons sur la théorie des nombres* d'Albert Châtelet

Le travail d'Albert Châtelet (1883-1962) est perçu comme singulier en France. Il est en effet vu comme l'un des rares mathématiciens français du début du XX^e siècle à s'intéresser à la théorie des nombres. Plusieurs témoignages de cette époque vont dans ce sens. Emile Picard écrit dans son rapport sur la soutenance de thèse de Châtelet

> « La thèse de M. Châtelet me paraît d'un très réel intérêt ; elle marquera dans la théorie des nombres, théorie trop peu cultivée en France[1]. »

Gaston Julia, qui assiste aux cours de Châtelet, souligne

> « À ton cours tu voyais défiler de jeunes camarades, empressés à connaître ce phénomène qui pratiquait l'*Arithmétique*, quand tout le monde en France s'adonnait à l'*Analyse* ou à la *Géométrie*[2]. »

Châtelet est chargé du cours de la Fondation Péccot au Collège de France au deuxième semestre 1911-1912 et c'est ce cours qui est publié en 1913 sous le titre *Leçons sur la théorie des nombres*[3]. L'objectif de Châtelet est de donner une introduction aux développements de la théorie des nombres de la seconde moitié du XIX^e siècle. Ces développements sont présentés sous un point de vue personnel, celui de la théorie des tableaux[4]. Il aborde ainsi par exemple la théorie des nombres algébriques et la méthode de réduction continuelle d'Hermite.
Ce cours a un statut un peu différent de ceux que nous regarderons ensuite : il n'est pas consacré exclusivement à la géométrie des nombres. Cependant c'est le premier cours qui présente le travail de Minkowski de manière intégrée au reste de la théorie des nombres. Les références au travail de Minkowski sont très nombreuses tout au long du texte, des aspects de la géométrie des nombres sont présentés dans plusieurs chapitres, en particulier les théorèmes de Minkowski sur les parties convexes. D'autre part, l'interprétation en termes géométriques de beaucoup de problèmes est utilisée de manière importante et à nouveau Minkowski est explicitement cité à ce sujet. Nous reviendrons un peu plus précisément sur la manière dont la géométrie des nombres prend sa place dans l'ensemble de la théorie des nombres dans le cours.

Ce travail de Châtelet est l'occasion de dire un mot sur la réception en France de la géométrie des nombres. La réception immédiate de cette théorie par les mathématiciens français semble très positive. Très rapidemment des travaux de Minkowski sont publiés

[1] Gispert 1991 p.410.
[2] Julia 1963.
[3] Châtelet 1913.
[4] Pour des précisions sur cet aspect du travail de Châtelet voir Brechenmacher 2006.

en français : les lettres de Minkowski à Hermite et le texte de la conférence de Minkowski à Chicago. Nous avons aussi vu la réaction enthousiaste d'Hermite au travail de Minkowski, Julia accueille favorablement le point de vue géométrique de Minkowski ainsi il remarque à propos de la théorie des nombres

> « À l'exemple de Minkowski, je l'ai toujours envisagée en liaison avec la Géométrie[5]. »

Ce cours donné par Châtelet dès 1911 témoigne lui aussi de cette réception favorable des idées de Minkowski.
Cependant, malgré ces premières réactions, la géométrie des nombres n'a pas été reprise par la suite en France et il faut attendre la fin des années 1940 avec le travail de Claude Chabauty pour voir ce sujet redémarrer.

6.1.2 Un cours de Blichfeldt à Stanford

Dans un article sur le produit de deux formes linéaires non homogènes publié en 1943, Mordell fait référence à un cours de Blichfeldt donné en 1932 à l'université de Stanford[6]. Mordell a très certainement eu connaissance de ce cours grâce à l'article de Seale de 1935 sur le même sujet qui mentionne[7]

> « a syllabus which Professor Blichfeldt distributed to a class in geometry of numbers at Stanford University, winter and spring quarters, 1932. »

Seale obtient un PhD de l'université de Stanford en 1935 intitulé *A simple proof of Minkowski's theorem on the product of two linear forms*, il est donc probable qu'il est suivi ce cours de Blichfeldt[8]. Des notes de cours de Blichfeldt, qui contiennent le résultat auquel Mordell et Seale font référence, sont conservées à Stanford[9]. Ces notes de cours ne sont pas datées mais le catalogue de la bibliothèque de l'université de Stanford indique que le cours a été donné entre 1930 et 1932, c'est donc très certainement le cours de 1932.
Ces notes, intitulées *Geometry of Numbers. Diophantine Approximations*, se composent de 65 pages dont les 49 premières sont manuscrites et les autres dactylographiées. Nous ne savons pas à quels étudiants ce cours était destiné.
Nous en donnons maintenant le plan. La numérotation est celle de Blichfeldt, mais tous les paragraphes n'ont pas de titre nous avons donc indiqué entre crochets le thème de ces parties.

[5]Julia 1933.
[6]Mordell 1943d p.218.
[7]Seale 1935 p.419.
[8]Ce PhD est recensé dans la base de données *Dissertation Abstracts* qui est consultable en ligne `http://proquest.umi.com/login`.
[9]Blichfeldt 1932.

TABLE DES MATIÈRES.

FIG. 6.1 – Table des matières du cours de Châtelet

Plan du cours de Blichfeldt :

1. Introductory remarks
2. Equation of the first degree in two unknowns
3. Equation of the first degree in three unknowns
4. Minkowski's standard surface

Space of n dimensions R_n and lattice points

5. [Examples of a Minkowski's standard surface]
7. [Théorème de Minkowski]
8. [Application du théorème à un parallélogramme]
9. [Produit de deux formes linéaires de deux variables]
10. [Application du théorème à un parallélépipède]
11. [Application du théorème à un octaèdre]
12. Note
13. [Produit de trois formes linéaires homogènes ternaires]

Certain non-homogeneous forms

14. [Théorème sur le produit de deux formes linéaires non-homogènes]
15. [Preuve du théorème (partie 1)]
16. [Preuve du théorème (partie 2)]
17. [Preuve du théorème (partie 3)]
18. [Preuve du théorème (partie 4)]
19. [Produit de n formes linéaires homogènes]

A new geometrical principle

20. [Théorème de Blichfeldt dans le plan]
21. [Preuve du théorème de Minkowski avec celui de Blichfeldt. Enoncé du théorème de Blichfeldt en dimension n]
22. [Généralisation du théorème de Minkowski]

Linear Transformations

23. [Transformations linéaires de deux variables. Remarques]
24. [Transformations inverses]
25. [Propriétés des transformations linéaires]
25. [Transformations linéaires de n variables]

Quadratic Forms

26. [Formes quadratiques binaires : décomposition en somme de carrés]
27. [Application du théorème de Minkowski aux formes quadratiques binaires]

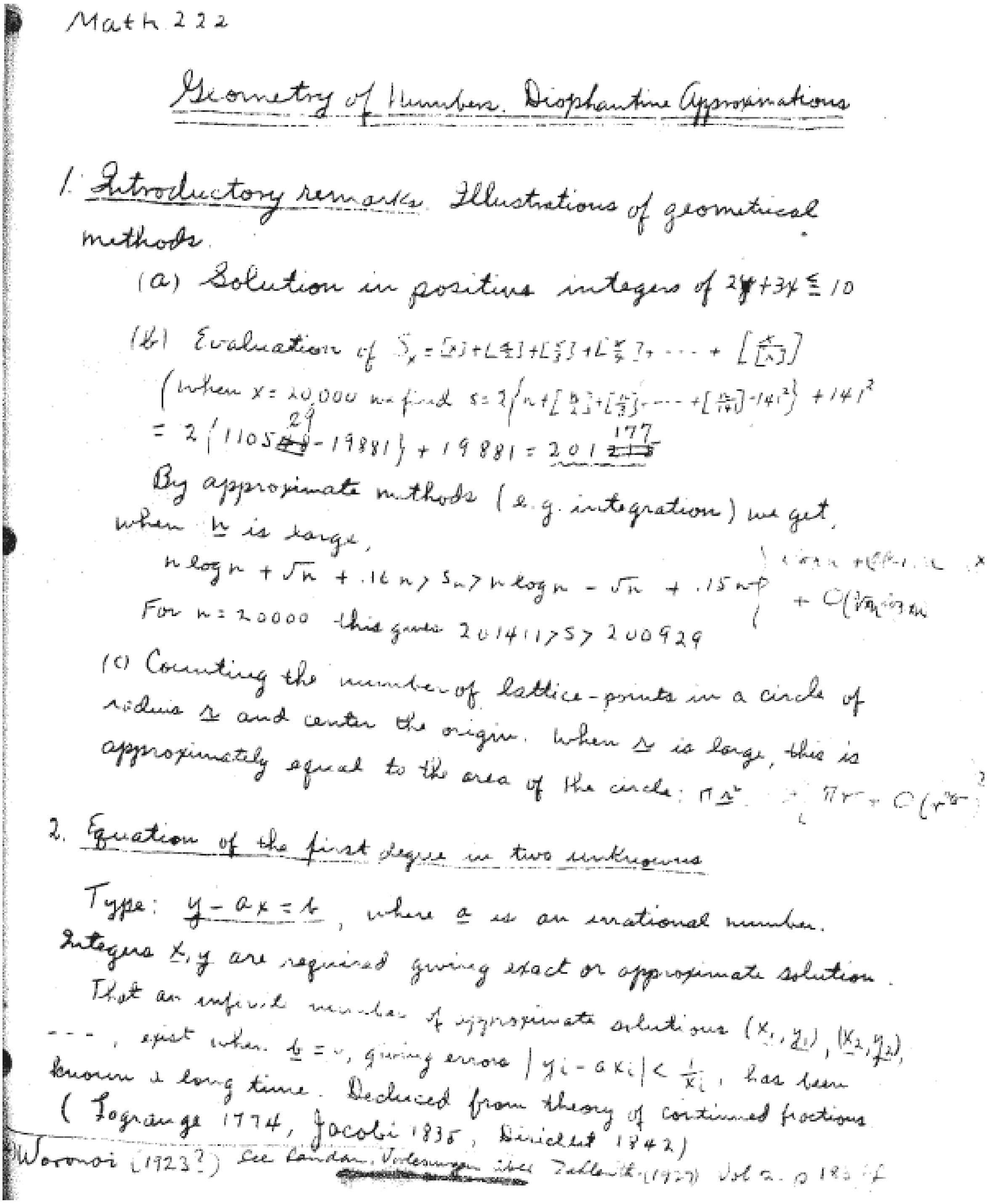
28. [Calcul de γ_2 par la méthode de Korkine et Zolotareff]
29. [La méthode de développement d'une forme quadratique par rapport à ses minima d'après Korkine et Zolotareff]
30. [Théorème de Minkowski sur les formes quadratiques de n variables]
31. [Inégalités de Korkine et Zolotareff sur les coefficients des formes quadratiques]
32. [Calcul de γ_3, γ_4 et γ_5]
33. [Estimation de Minkowski pour γ_n]
34. [Méthode de Blichfeldt pour améliorer l'estimation de Minkowski de γ_n]

6.1.3 Le cours de Siegel

Les *Lectures on the Geometry of Numbers* de Siegel ont été professées à l'université de New York pendant l'année 1945-1946. Il s'agit d'un cours publié en 1989 d'après des notes de Bernard Friedman[10]. Les notes de cours ayant été réécrites pour la publication sous forme de livre, nous avons un document de nature assez différente de celui de Blichfeldt : rédaction plus soignée, plan plus précis etc... Nous reproduisons ici la table des matières de ce livre.

Table des matières des *Lectures on the Geometry of Numbers* de Siegel :

[10] SIEGEL 1989.



Math 222

Geometry of Numbers. Diophantine Approximations

1. Introductory remarks. Illustrations of geometrical methods.

(a) Solution in positive integers of $2x + 3y \leqq 10$

(b) Evaluation of $S_x = [x] + [\frac{x}{2}] + [\frac{x}{3}] + [\frac{x}{4}] + \cdots + [\frac{x}{[x]}]$

(when $x = 20,000$ we find $s = 2\{n + [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{3}] + \cdots + [\frac{n}{141}] - 141^2\} + 141^2$

$= 2\{1105\cancel{..}^{29} - 19881\} + 19881 = 201\cancel{..}^{177}$

By approximate methods (e.g. integration) we get, when n is large,

$n \log n + \sqrt{n} + .16n > S_n > n \log n - \sqrt{n} + .15n$ [illegible] $+ O(\sqrt{n}$ [illegible]$)$

For $n = 20000$ this gives $201411 > S > 200929$

(c) Counting the number of lattice-points in a circle of radius r and center the origin. When r is large, this is approximately equal to the area of the circle: πr^2 [illegible] $\pi r + O(r^{\,\cdots})$

2. Equation of the first degree in two unknowns

Type: $y - ax = b$, where a is an irrational number. Integers x, y are required giving exact or approximate solution.

That an infinite number of approximate solutions $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$, exist when $b = 0$, giving errors $|y_i - ax_i| < \frac{1}{x_i}$, has been known a long time. Deduced from theory of continued fractions (Lagrange 1774, Jacobi 1835, Dirichlet 1842)

Woronoi (1923?) See Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie (1927) Vol 2. p 183 f

Fig. 6.2 – Première page du cours de Blichfeldt

4. Blichfeldt's method

Lecture XIII
1. The Second Finiteness Theorem
2. An inequality for positive-definite symmetric matrices
3. The space $\mathcal{P}_K$
4. Images of $\mathcal{R}$

Lecture XIV
1. Boundary points
2. Non-overlapping of images
3. Space defined by a finite number of conditions
4. The Second Finiteness Theorem
5. Fundamental region of the space of all matrices

Lecture XV
1. Volume of a fundamental region
2. Outline of the proof
3. Change of variable
4. A new fundamental region
5. Integrals over fundamental regions are equal
6. Evaluation of the integral
7. Generalizations of Minkowski's First Theorem
8. A lower bound for the packing of spheres

6.1.4 Un cours de Mordell à Cambridge

Nous avons retrouvé dans les archives de Mordell à Cambridge un dossier intitulé *Geometry of Numbers*[11]. Ce dossier contient des notes manuscrites de Mordell sur des thèmes variés : formes quadratiques, formes cubiques, produit de formes linéaires, « Lattice points in astroidal region »... Certaines des listes d'étudiants données au chapitre précédent se trouvent aussi dans ce dossier. Malheureusement les papiers dans ce dossier sont dans le désordre et parfois visiblement incomplets. Nous avons cependant reconstitué ce qui doit être des notes pour un cours sur la géométrie des nombres. Il s'agit d'environ 110 pages manuscrites numérotées (à peu près) continûment, quelques pages sont quand même manquantes alors que d'autres sont en plusieurs exemplaires

[11]Le titre est écrit de la main de Mordell ce qui permet de penser qu'il a lui même réuni les notes contenues dans ce dossier. MORDELL (St John's), box 7.

avec parfois des modifications.
Ces notes de cours ne sont pas datées mais plusieurs indices montrent qu'elles ont été écrites après 1946 et probablement avant 1949. D'abord, Mordell donne la référence d'un article de Davenport publié en 1946 et il cite Dyson sur le produit de quatre formes linéaires non homogènes. Ce travail de Dyson, qui est publié en 1948 mais dont la preuve est élaborée dès 1946, semble être le résultat le plus récent cité par Mordell. Ensuite une des listes d'étudiants se trouvant dans le même dossier est datée de 1947-1948.
Cette liste permet aussi de dire que le cours de Mordell était destiné à des étudiants avancés. Ce sont des « Research students » ainsi que des étudiants préparant la « Part III » du Mathematical Tripos.

Nous donnons maintenant le plan du cours, les titres sont ceux indiqués par Mordell seule la numérotation a été ajoutée.

Plan du cours de Mordell à Cambridge :

1. Linear substitutions
2. Minimum of a binary quadratic form
3. Min. of a binary cubic form
4. Lattice points
5. Regions
6. Linear Forms
7. Non convex regions
8. Improvement of Minkowski's theorem
9. Improved results for some non-convex regions R
10. Simultaneous approximations
11. Properties of two dimensional lattices
12. Best possible results
13. Binary cubic forms
14. Product of three ternary linear forms
15. Product of two non-homogeneous forms
16. The product of n non-homogeneous linear forms
17. The product of n homogeneous forms
18. Analytical methods. Poisson's summation formula

19. Successive minima for quadratic forms
20. Successive minima of a bounded star body
21. Product of n homogeneous linear forms continued
22. Related n dimensional problems

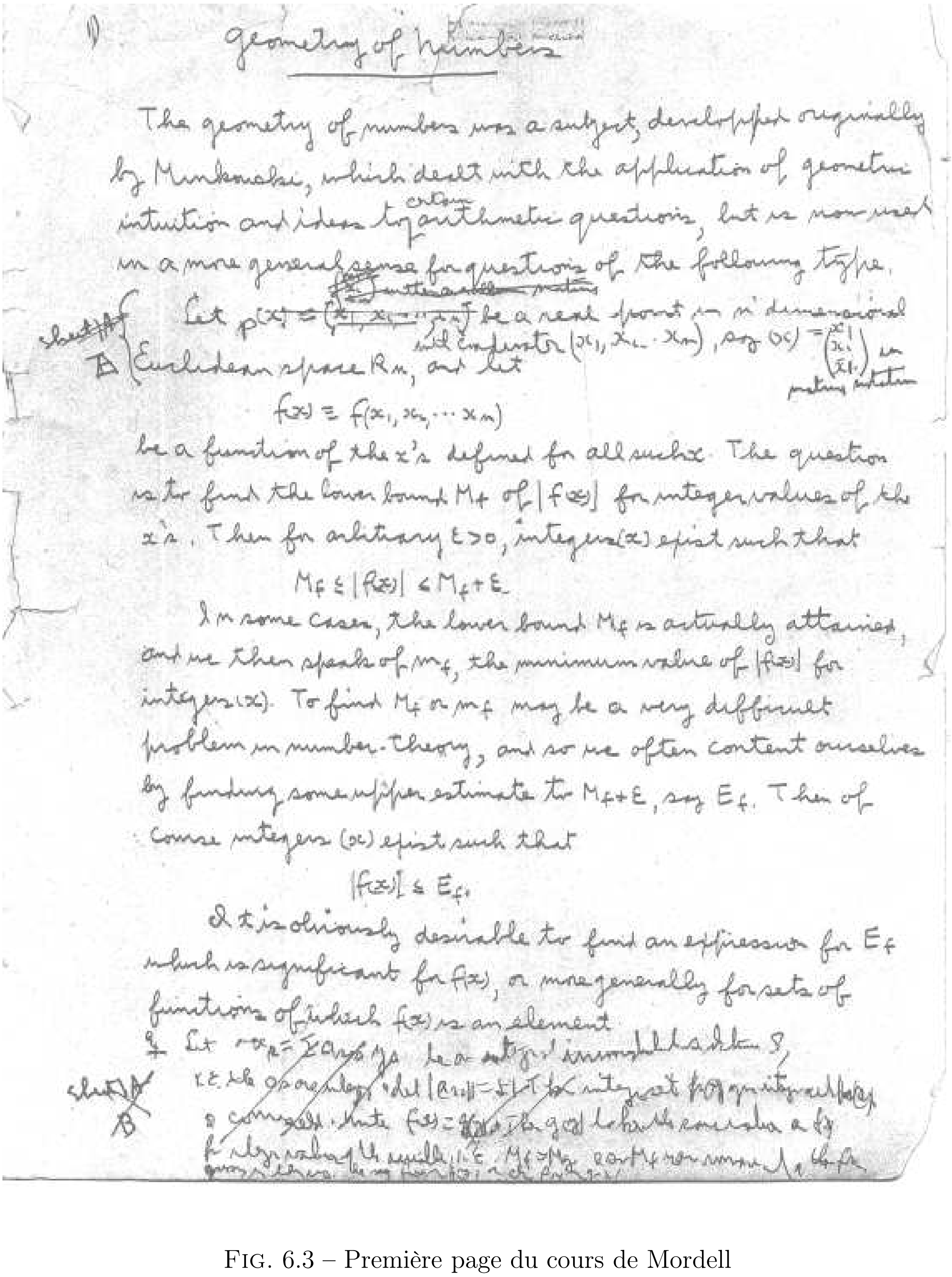
6.1.5 Le cours de Davenport à Stanford en 1950

À partir de la fin des années 1940, Davenport est invité à plusieurs reprises à l'université de Stanford. D'après Royden, il y donne des cours, en particulier un cours pour les *graduates* sur la géométrie des nombres[12]. Une version de ce cours est conservée dans les archives de Davenport à Cambridge[13]. Il s'agit de 67 pages dactylographiées datées de 1950.

Plan du cours de Davenport à Stanford :

1. Introduction
2. Minkowski's fundamental theorem
3. Lattices
4. Applications of Minkowski's Theorem to particular bodies
   (a) The Sphere
   (b) The box
   (c) The octahedron
   (d) A more general body
5. The closest packing of convex bodies
6. The closest packing of spheres
7. The theorem of Minkowski and Hlawka
8. Non-convex bodies
9. The regions $|xy| \leq 1$ and $|xyz| \leq 1$
10. Further developments

[12]Royden 1989 p.255.
[13]Davenport 1950b.



Geometry of Numbers

The geometry of numbers was a subject, developed originally by Minkowski, which dealt with the application of geometric intuition and ideas to certain arithmetic questions, but is now used in a more general sense for questions of the following type.

Let $p(x)$ be a real point in n dimensional Euclidean space R_n, with coordinates $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, say (x) in matrix notation, and let

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

be a function of the x's defined for all such x. The question is to find the lower bound M_f of $|f(x)|$ for integer values of the x's. Then for arbitrary $\varepsilon>0$, integers (x) exist such that

$$M_f \leq |f(x)| < M_f+\varepsilon$$

In some cases, the lower bound M_f is actually attained, and we then speak of m_f, the minimum value of $|f(x)|$ for integers (x). To find M_f or m_f may be a very difficult problem in number-theory, and so we often content ourselves by finding some upper estimate to $M_f+\varepsilon$, say E_f. Then of course integers (x) exist such that

$$|f(x)| \leq E_f.$$

It is obviously desirable to find an expression for E_f which is significant for $f(x)$, or more generally for sets of functions of which $f(x)$ is an element.

FIG. 6.3 – Première page du cours de Mordell

Selected topics in the Geometry of Numbers

1. Introduction

The geometry of numbers is a branch of the theory of numbers which originated with the work of Minkowski (1864-1909). It is concerned with the problem of determining whether or not inequalities of various kinds are soluble in integers, and with other problems that have arisen naturally out of this. Some general theorems on the solubility of inequalities in integers were found already by Hermite (1822-1892), and the most important of these was given by Hermite in the letters which he addressed to Jacobi in about 1845.

Suppose we have a quadratic form

$$Q(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_i\, u_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

with real coefficients a_{ij}, which is positive definite, that is, all its values are strictly positive, except when the variables are all zero. Let

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

be the determinant of the form, which is necessarily positive. Then Hermite's theorem is that there exist integers $u_1, \ldots, u_n$, not all zero, for which

FIG. 6.4 – Première page du cours de Davenport

6.2 La géométrie des nombres comme discipline à travers les cours

6.2.1 Les objets fondamentaux

Nous avons déjà mentionné certains des objets qui sont étudiés dans le cours de Châtelet. D'abord, interviennent ce qu'il appelle les tableaux qui correspondent à la notion actuelle de matrice carrée. Leurs propriétés sont introduites afin que les tableaux soient appliqués à différentes situations. Les autres objets fondamentaux dans le cours de Châtelet sont les « modules de points[14] » dont les réseaux sont un cas particulier, les nombres et les entiers algébriques et les « distances généralisées ». Les distances généralisées de Châtelet correspondent aux distances radiales, réversibles et concordantes de Minkowski.
Les objets mis en avant dans le cours de Blichfeldt sont les réseaux, ce qu'il nomme les « Minkowski's standard surfaces » qui sont des domaines convexes et surtout les formes : linéaires ou bien quadratiques.
Nous retrouvons chez Siegel les réseaux ainsi que les domaines convexes mais les formes occupent une place beaucoup plus marginale. Siegel utilise aussi l'interprétation des domaines convexes avec la notion de distance qu'il appelle la « gauge function of a convex body ».
Les mêmes objets sont présents dans le cours de Mordell : les formes (linéaires, quadratiques, cubiques), les réseaux et les domaines mais qui ne sont plus nécessairement convexes. Cependant l'importance qui leur est accordée est différente, l'accent chez Mordell est mis davantage sur les formes.
Enfin, avec Davenport, les formes disparaissent à nouveau pour laisser la place centrale aux corps convexes dans la première partie du cours puis à des corps plus généraux dans la seconde partie. Les réseaux ont eux aussi un rôle fondamental dans ce cours.

6.2.2 Les concepts et les résultats clés

Le théorème de Minkowski sur les points d'un réseau dans un domaine convexe est énoncé et démontré dans tous les cours. Parfois le théorème sur les minima successifs qui le généralise est également donné. Chaque cours contient des paragraphes dont la fonction essentielle est de préparer le terrain pour la démonstration de ces théorèmes. Parmi ces thèmes préliminaires nous avons les réseaux, les domaines convexes ou encore parfois les substitutions linéaires. Ces sujets ne sont pas traités de la même façon et avec la même importance selon les auteurs. Pour certains ils sont présentés seulement

[14] Il s'agit en termes modernes de groupes additifs.

parce qu'ils apparaissent dans le théorème de Minkowski, pour d'autres ils prennent un statut plus fondamental dans le cours. Par exemple, les réseaux sont fondamentaux dans le cours de Siegel alors que Blichfeldt se contente d'une définition.
La preuve et l'énoncé du théorème ne sont pas non plus toujours identiques.

Châtelet énonce le théorème de Minkowski de la manière suivante[15] :

> « Théorème I : Etant donné un module type de dimension n, de base T et formé par les points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on a
>
> $$[\text{minimum } f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^n \leq \frac{2^n\,|\Delta(T)|}{J} ,$$
>
> J étant une constante qui ne dépend que de la fonction f. »

Pour Châtelet, un module type de dimension n correspond à la notion de réseau. Il appelle alors base du module un tableau T inversible, de taille n et qui vérifie la propriété : un point $(p_1, \ldots, p_n)$ appartient au module si et seulement si

$$\|p_1 \ \ldots \ p_n\| = \|x_1 \ \ldots \ x_n\| \times T ,$$

où les x_i sont des nombres entiers[16]. $\Delta(T)$ désigne le déterminant du tableau T et f est une « distance généralisée », notion qu'il a définie dans le premier chapitre du livre[17] :

> « on appelle *distance généralisée* de deux points A, B, une fonction des différences des coordonnées des points
>
> $$S(AB) = f(\alpha_i - \beta_i) ,$$
>
> cette fonction étant *réelle, définie pour deux points quelconques de l'espace considéré* et telle que
>
> $$\begin{cases} (1) & \begin{cases} f(u_i) \geq 0 , \\ f = 0 \text{ entraînant } u_i = 0 , \end{cases} \\ (2) & f(\lambda u_i) = |\lambda|\, f(u_i) \qquad (\lambda \text{ réel}) , \\ (3) & f(u_i + v_i) \ \leq \ f(u_i) + f(v_i) \ . \text{ »} \end{cases}$$

[15] Châtelet 1913 p.108. La preuve de Châtelet est présentée en annexe.
[16] En termes modernes, les lignes de T sont donc les coordonnées des vecteurs d'une base du réseau dans la base canonique. Remarquons que les conventions de Châtelet dans l'écriture des tableaux ne sont pas celles qu'il est l'usage d'utiliser maintenant : les coordonnées des vecteurs sont notés en ligne chez Châtelet.
[17] Châtelet 1913 p.17.

La démonstration du théorème proposée par Châtelet est celle donnée par Minkowski dans le texte de la conférence de Chicago. La seule différence est que Châtelet exprime les calculs de volumes avec des intégrales.
En reprenant lui aussi la preuve de Minkowski, Blichfeldt démontre uniquement le théorème dans le cas de la dimension 2 :

> « A $M-$ curve of area 4 or more, having a center at the origin, must contain on (or inside) its boundary one or more lattice points in addition to $(0,0)$[18]. »

Il donne l'énoncé en dimension n sous cette forme mais sans preuve. Plus loin dans le cours, Blichfeldt montre le théorème de Minkowski en utilisant son théorème démontré en 1914.
Ce dernier point de vue est aussi celui adopté par Siegel. Ce dernier commence par donner trois preuves du lemme

> « Let $\mathcal{M}$ be a bounded open set in $\mathbb{R}^n$, with volume greater than 1. Then $\mathcal{M}$ contains two distinct points x and y, such that
>
> $$x_i - y_i = \text{an integer} \qquad (\text{for } i = 1, \dots, n),$$
>
> where x_i and y_i are the coordinates of the points x and y respectively[19]. »

Avec ce lemme, qui nous l'avons dit est une version plus faible du théorème de Blichfeldt, Siegel démontre ensuite le théorème de Minkowski. Notons que Siegel donne le théorème de Minkowski sous sa forme géométrique et analytique.
Mordell propose aussi les deux formes du théorème ainsi que plusieurs démonstrations. D'abord une preuve où le théorème de Minkowski est vu comme un cas particulier du résultat qu'il a montré en 1935[20] :

> « Let R be any region and S the region derived from R by taking the set of points
>
> $$\left(\frac{x-y}{k}\right) = \left(\frac{x_1 - y_1}{k_1}, \dots, \frac{x_n - y_n}{k_n}\right),$$
>
> where (x), (y) are any two points of R and (k) is a set of positive numbers. Then if $V = V(R)$ is the content of R and Λ is a lattice of determinant $\Delta > 0$ and if
>
> $$V > k_1 k_2 \dots k_n \Delta,$$
>
> the region S contains a point of Λ other than O[21]. »

[18] Blichfeldt 1932 p.18.
[19] Siegel 1989 p.13.
[20] Mordell 1935.
[21] Mordell (St John's), box 7.

L'autre preuve donnée par Mordell est analytique et utilise les séries de Fourier.
Enfin, Davenport introduit le théorème de Minkowski de manière progressive. Il commence par le montrer dans le cas de l'ellipsoïde et pour le réseau des nombres entiers. Puis il remarque que seules les propriétés de convexité et de symétrie par rapport à l'origine sont utiles, ce qui le conduit à l'énoncé du théorème pour n'importe quel domaine convexe et symétrique par rapport à un point. Enfin, après avoir défini la notion de réseau, le théorème est donné sous sa forme générale.

Les autres résultats importants dans le cours de Châtelet sont ceux qui concernent les tableaux car ils sont appliqués dans divers problèmes, en particulier

> « Pour avancer plus loin dans cette théorie des entiers des corps algébriques et des idéaux, il est utile et même nécessaire d'étudier d'un peu plus près les systèmes de tableaux[22] ».

Cet examen plus approfondi des propriétés des systèmes de tableaux conduit Châtelet à développer une autre notion cruciale de son cours qui est la réduction. La méthode de réduction qu'il présente est la réduction continuelle d'Hermite[23] qu'il expose dans le cadre de sa théorie des tableaux.
La question de la réduction est aussi fondamentale dans le cours de Siegel : c'est le titre d'un des trois chapitres. Siegel s'intéresse au problème de la réduction des formes quadratiques définies positives ainsi qu'à la construction de bases réduites pour un réseau.
La réduction de certaines formes est aussi abordée par Mordell mais elle est traitée dans le cadre d'une problématique plus générale qui est celle de la résolution d'inégalités. À l'exception de celui Châtelet, les problèmes sur les inégalités jouent un rôle fondamental dans tous les cours tout en étant déclinés sous des formes diverses. Avec Blichfeldt, les inégalités apparaissent d'abord dans des questions d'approximations diophantiennes, puis à la fin de son cours au sujet de l'estimation des minima pour des valeurs entières des variables des formes quadratiques. Pour Siegel, l'objectif de son chapitre sur les inégalités linéaires est de « résoudre approximativement des équations linéaires au moyen d'entiers[24] ».
Les inégalités sont au coeur des conceptions de la géométrie des nombres de Mordell et Davenport, c'est dans ce cadre qu'ils décrivent la théorie et ses développements :

> « It [the geometry of numbers] is concerned with the problem of determining whether or not inequalities of various kinds are soluble in integers, and with other problems that have arisen naturally out of this[25]. »

[22] Châtelet 1913 p.91.
[23] Goldstein 2007 p.394.
[24] Siegel 1989 p.43.
[25] Davenport 1950b p.1.

Parmi les problèmes dans lesquels les inégalités interviennent, figure l'estimation de minima que Davenport aborde pour les formes quadratiques mais que Mordell envisage de façon plus générale

> « The geometry of numbers was a subject, developed originally by Minkowski, which dealt with the application of geometric intuition and ideas to certain arithmetic questions, but is now used in a more general sense for questions of the following type. Let P with coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be a real point in n dimensional Euclidean space R_n, and let
>
> $$f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
>
> be a function of the x's defined for all such x. The question is to find the lower bound M_f of $|f(x)|$ for integer values of the x's[26]. »

Dans la suite du cours, Mordell étudie les minima de différents types de fonctions f : formes quadratiques, formes cubiques binaires, produits de formes linéaires homogènes ou non homogènes. Davenport traduit plus systématiquement que Mordell ce problème géométriquement. Les inégalités $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$ définissent un domaine et il s'agit de savoir si ce domaine contient des points d'un réseau. Pour un domaine fixé, les résultats recherchés sont la détermination du déterminant critique et des réseaux critiques[27].
Un dernier ensemble de résultats qui occupe une place importante dans les cours de Siegel et de Davenport concerne le problème de l'empilement de corps convexes. Les deux mathématiciens s'intéressent plus particulièrement au cas des sphères pour lequel ils exposent la méthode de Blichfeldt consistant à utiliser des sphères matérielles[28].

6.2.3 Les méthodes utilisées

Les méthodes employées, les points de vue adoptés d'un cours à l'autre sont aussi variés. Nous trouvons des approches arithmétiques, algébriques, analytiques et géométriques qui se mélangent mais jamais de la même façon.
Avec sa théorie des tableaux, la démarche de Châtelet peut être caractérisée comme algébrique, son premier chapitre est d'ailleurs une « introduction algébrique ». L'algèbre cohabite avec un « langage géométrique » que Châtelet introduit dans le début de son cours. Châtelet parle donc de points, de droites, de plans, de distances... Châ-

[26] Mordell (St John's), box 7.

[27] Si K est un domaine, un réseau est admissible pour K s'il ne contient pas un point du réseau autre que l'origine dans son intérieur. La borne inférieure du déterminant des réseaux admissibles pour K est le déterminant critique de K noté $\Delta(K)$ par Davenport (par convention s'il n'y a pas de réseau admissible pour K, $\Delta(K) = \infty$). Un réseau critique pour K est alors un réseau admissible de déterminant $\Delta(K)$.

[28] Cette méthode est présentée dans le chapitre 3.

telet favorise des méthodes effectives. Par exemple, dans les parties où il s'intéresse aux idéaux, il choisit des bases explicites pour travailler[29].
Blichfeldt alterne des méthodes géométriques et arithmétiques. Quand il présente le théorème sur les corps convexes et ses applications, il reprend l'exposition géométrique de Minkowski. En revanche, il propose une preuve arithmétique pour le théorème sur le produit de deux formes linéaires non homogènes. De même, dans la fin de son cours consacrée aux formes quadratiques, Blichfeldt donne les méthodes arithmétiques de Korkine et Zolotareff pour calculer les constantes γ_2, γ_3, γ_4 et γ_5.
Siegel présente le théorème de Minkowski géométriquement, mais il en donne plusieurs preuves dont une qui est analytique. L'analyse intervient aussi dans des calculs d'intégrales et dans la méthode de Blichfeldt pour l'empilement des sphères. Enfin, des méthodes arithmétiques sont développées à propos de la réduction des formes quadratiques.
Nous retrouvons arithmétique, géométrie et analyse chez Mordell. Ce dernier semble attacher une importance toute particulière à montrer différentes approches possibles pour un même problème. Par exemple, il présente son théorème sur le minimum des formes cubiques binaires avec le point de vue géométrique qu'il avait lui-même adopté, mais il donne aussi l'approche arithmétique par la théorie de la réduction élaborée par Davenport. Il étudie les produits de formes linéaires homogènes par des méthodes géométriques mais aussi en reprenant son travail sur la formule sommatoire de Poisson. Il reprend le théorème de Minkowski avec la méthode arithmétique de son article de 1935 mais il propose en plus une preuve analytique utilisant des séries de Fourier.
S'il ne semble pas y avoir de point de vue dominant chez Mordell, la situation est un peu différente dans le cours de Davenport. En effet, s'il présente sa démonstration arithmétique du théorème sur le produit de trois formes linéaires homogènes, s'il utilise un peu d'analyse dans la preuve du théorème de Minkowski-Hlawka et la méthode de Blichfeldt sur l'empilement des sphères, ce qui domine quand même dans ce cours c'est la géométrie. Davenport met au centre les notions de corps convexes ou de corps étoilés ce qui l'amène à privilégier l'approche géométrique. Cela est bien illustré par la table des matières du cours dans laquelle le vocabulaire géométrique domine (voir page 408).

6.2.4 Systématisation de la géométrie des nombres

Nous comparons maintenant l'organisation des cours pour essayer de voir s'il se dégage une présentation standard de la géométrie des nombres.
Le travail de Minkowski est réparti dans l'ensemble du cours de Châtelet, la géomé-

[29]Voir en particulier la note II dans laquelle Châtelet traite un exemple de corps algébrique, Châtelet 1913 p.138.

trie des nombres est complètement intégrée aux autres thèmes traités. Dans le premier chapitre, ce que Châtelet appelle le « langage géométrique » est introduit grâce aux distances généralisées. Le deuxième chapitre sur les modules de points contient les propriétés sur les réseaux nécessaires pour l'énoncé des théorèmes de Minkowski sur les parties convexes. Châtelet expose ensuite les bases de la théorie des nombres et entiers algébriques. Les théorèmes de Minkowski figurent ensuite dans un chapitre avec la réduction continuelle car ils sont vus comme un complément à cette théorie. Dans ce même chapitre, Châtelet donne une application immédiate à l'approximation simultanée de réels par des rationnels. Dans le dernier chapitre, le théorème de Minkowski est utilisé pour démontrer des propriétés plus fines des corps de nombres algébriques : propriétés des unités, du discriminant, finitude du nombre de classes d'idéaux.

Le cours de Blichfeldt progresse de problèmes du premier degré à des problèmes du second degré. Plus précisément, Blichfeldt commence par quelques remarques sur les équations du premier degré en liaison avec l'approximation diophantienne. Ensuite, il présente le théorème de Minkowski qui est dans un premier temps appliqué aux formes linéaires, à leur somme ou à leur produit. Après une parenthèse dans laquelle il donne son théorème généralisant celui de Minkowski, Blichfeldt s'intéresse aux formes quadratiques.

Le cours de Siegel est structuré autour de problèmes ou résultats clés qui fournissent le thème de chacun des trois chapitres : les théorèmes de Minkowski, les inégalités linéaires et la réduction. Des résultats du chapitre I sont utilisés dans les deux derniers chapitres qui sont quant à eux indépendants.

Avec Mordell, nous avons encore affaire un autre type d'organisation. Cette fois le cours se présente comme une succession de problèmes à résoudre[30]. Les différentes parties ne s'enchaînent pas nécessairement, elles sont le plus souvent indépendantes. Mordell revient parfois à plusieurs reprises sur le même sujet qu'il aborde alors avec un nouveau point de vue (les formes cubiques binaires, produit de n formes linéaires homogènes).

Enfin, le cours de Davenport se développe en partant de questions qui portent sur des domaines convexes pour aller vers des problèmes non convexes. Il s'intéresse alors essentiellement à des corps étoilés. Dans la première partie, il applique le théorème de Minkowski à différents exemples de corps convexes, il étudie aussi l'empilement de corps convexes et en particulier de sphères. Dans la fin du cours, l'objectif est de déterminer le déterminant critique et les réseaux critiques de domaines fixés. Davenport interprète alors les théorèmes qu'il avait obtenu avec Mordell sur les formes cubiques binaires et le produit de trois formes linéaires dans ce cadre. Par exemple, le théorème de Davenport sur le produit de trois formes linéaires homogènes réelles est équivalent au fait que le déterminant critique du domaine défini par l'inégalité $|x_1x_2x_3| \leq 1$ est

[30] Il est intéressant de noter que c'est la critique que fait Serge Lang au sujet du livre de Mordell sur les équations diophantiennes. Voir Lang 1983 p.349-358.

7. Les réseaux critiques sont alors donnés par les cas d'égalités du théorèmes de Davenport. Ce cours illustre donc bien l'évolution de la géométrie des nombres que nous avions déjà mentionnée à propos de ses travaux de recherche.

Conclusion

La description des cours montre donc une grande diversité dans la façon dont la géométrie des nombres est enseignée. Les objets étudiés, les méthodes utilisées, les résultats présentés changent dans tous ces cours. Lorsque nous trouvons des points communs, un examen plus précis fait ressortir des différences de traitements, un agencement différent de l'ensemble de la discipline… Nous l'avons constaté par exemple à propos du théorème de Minkowski qui n'est jamais présenté de la même manière et qui semble avoir des statuts divers dans ces cours. Les formes sont juste parfois un champ d'application possible du théorème de Minkowski (Siegel) ou elles sont aux centre de presque tous les problèmes dont s'occupe la géométrie des nombres (Mordell).
À travers ces cours, nous constatatons aussi qu'aucun consensus sur la manière dont la géométrie des nombres doit être exposée ne semble avoir émergé dans la période que nous regardons. En présentant une géométrie des nombres intégrée à la théorie des nombres, le cours de Châtelet est celui qui reflète le mieux l'ambition qu'avait Minkowski pour cette théorie. Elle apparaît en effet comme un cadre général permettant d'unifier différentes disciplines arithmétiques. Avec Siegel, bien que les théorèmes de Minkowski soient encore appliqués à plusieurs problèmes, nous perdons l'imbrication de la géométrie des nombres aux questions qu'elle permet d'aborder. L'exposé des théorèmes de Minkowski au début du cours comme préliminaires et de façon indépendante véhicule l'image d'une discipline au service de la résolution d'autres problèmes. La géométrie des nombres du cours de Mordell est organisée en une succession de problèmes qu'il s'agit d'étudier par des méthodes variées. Ces problèmes sont reliés par une question générale d'estimation de minimum pour des fonctions, mais la géométrie des nombres apparaît quand même comme une discipline constituée de plusieurs sujets qui sont traités indépendamment. Enfin, la géométrie des nombres dans le cours de Davenport est structurée par les propriétés géométriques des domaines associés aux questions étudiées (convexes, étoilés). Cette observation est paradoxale pour Davenport qui est davantage considéré comme un analyste et qui semble plutôt favoriser une approche arithmétique dans son travail sur la géométrie des nombres. Cela suggère chez Davenport des pratiques pédagogique et de recherche de la géométrie des nombres qui sont différentes.
Du point de vue de la recherche, nous avons qualifié la géométrie des nombres de Mor-

dell et Davenport de champ disciplinaire, soulignant ainsi l'effort de travail collectif effectué sur ce sujet. Mais ce chapitre montre que dans l'enseignement cela ne se traduit pas par une manière unifiée de faire cours.
Cette absence de systématisation de la géométrie des nombres dans les cours traduit des conceptions variées de la discipline ce qui est très proche de ce qui a été constaté pour la géométrie des nombres comme activité de recherche.

Conclusion

La géométrie des nombres apparaît au départ comme une discipline des mathématiques qui surgit subitement du travail de Minkowski. Dans le début des années 1890, les premiers résultats sont démontrés, Minkowski baptise lui-même la discipline qu'il est en train de construire *Geometrie der Zahlen* et pendant une vingtaine d'années il prend en charge seul son développement. La situation est par exemple complètement différente pour un sujet de recherche comme les nombres algébriques. Ils sont étudiés dès le XIX^{e}, les approches du sujet sont profondément modifiées en particulier à travers le *Zahlbericht* de Hilbert, mais l'expression *théorie algébrique des nombres* qui désigne encore cette discipline actuellement n'est utilisée que dans les années 1920 [31]. L'élaboration progressive mais aussi collective d'une discipline *théorie algébrique des nombres* contraste donc avec ce qui a été observé pour les débuts de la géométrie des nombres. Minkowski accompagne la création de son sujet d'une conception disciplinaire forte. Il organise la géométrie des nombres autour d'un résultat fondamental, d'objets fondamentaux ; il met en avant une approche méthodologique (l'utilisation de la géométrie) ; il définit un certain nombre de champs d'applications importants. Minkowski semble aussi avoir une grande ambition sur la place que doit occuper la géométrie des nombres dans l'ensemble des mathématiques. Il l'envisage comme une discipline intégrée au reste des mathématiques mais aussi comme un modèle pour unifier l'ensemble des domaines des mathématiques. De plus, à la fin du XIX^{e} siècle où du point de vue des fondements se développe un mouvement d'« arithmétisation des mathématiques », un mathématicien comme Klein présente la géométrie des nombres et la géométrisation comme une alternative crédible.

Une telle origine pour la géométrie des nombres laisse penser que faire l'histoire de cette discipline est un exercice bien balisé : il suffit de suivre ce que les mathématiciens appellent géométrie des nombres pour en comprendre les développements, travail d'autant plus facile qu'il existe à cette époque des journaux qui recensent tous les travaux mathématiques classés par disciplines. Mais la thèse a montré que si la discipline *géométrie des nombres* perdure après Minkowski, les conceptions disciplinaires qui lui sont associées changent. Ce qui est plus paradoxal encore, c'est que le moment qui

[31] Voir Goldstein et Schappacher 2007b p.91.

est perçu comme un redémarrage du sujet avec Mordell et Davenport est aussi celui où la discipline apparaît comme la plus dispersée avec un travail organisé autour de différents problèmes plus ou moins isolés.
Une première tentation serait d'essayer d'expliquer ces différences en intégrant des facteurs nationaux et d'opposer des organisations disciplinaires allemandes et britanniques. Mais les liens forts entretenus par Mordell et Davenport avec l'Allemagne, ainsi que leurs nombreuses collaborations avec des mathématiciens de nationalités variées suggèrent que ce n'est pas complètement satisfaisant.

La prise en compte de différentes échelles d'analyse a alors permis de mieux comprendre ces deux conceptions disciplinaires. En particulier, le changement d'échelles a montré que les facteurs sociaux y sont plus ou moins déterminants mais surtout opèrent à des niveaux différents. La conception disciplinaire de Minkowski est typique du milieu dans lequel il évolue (Klein, Hilbert), mais le collectif semble jouer un rôle moins apparent dans l'élaboration conceptuelle de la géométrie des nombres, Minkowski en assurant seul le développement. À l'inverse avec Mordell et Davenport, la géométrie des nombres fait l'objet d'un effort de recherches en commun. Des problèmes, comme celui du produit de formes linéaires, se trouvent alors au centre du travail de plusieurs mathématiciens : ce sont des sujets abordés lors de séminaires, des publications leur sont consacrées, ils sont enseignés...
Les deux conceptions disciplinaires se différencient aussi par plusieurs aspects du développement interne de la géométrie des nombres.
D'abord, pour Minkowski, la géométrie des nombres est un terrain important d'innovation conceptuelle, en particulier en ce qui concerne la géométrie. Son travail sur la convexité avec l'introduction du point de vue des fonctions distances est jugé *a posteriori* comme fondamental

> « the geometry he [Minkowski] developed in the book [Geometrie der Zahlen] laid the foundation for an analytical theory of convexity[32] » ;

tout comme l'étude conjointe des corps convexes et des réseaux. L'impact du travail de Minkowski sur ces domaines de recherche est illustré par la place importante qui lui est accordée dans l'introduction historique du livre *Handbook of Convex Geometry*[33]. Au cours de son travail sur la géométrie des nombres, Mordell n'introduit pas de nouveaux objets. Ses contributions à la discipline consistent davantage à proposer de nouvelles méthodes ou en adapter d'anciennes à de nouvelles situations. Beaucoup de démonstrations n'utilisent que des notions assez élémentaires et n'intègrent pas d'éléments issus de développement théoriques récents (en particulier en ce qui concerne la géométrie),

[32] Kjeldsen 2002 p.480.
[33] Voir Gruber et Wills 1993.

mais elles sont le plus souvent extrêmement élaborées.

À l'échelle des commentaires des mathématiciens, la géométrie des nombres est le plus souvent caractérisée par l'application de la géométrie à la théorie des nombres. Mais les exemples étudiés dans la thèse ont montré que cela ne peut pas la caractériser sur la longue durée. D'ailleurs, *a posteriori*, certains travaux sur la géométrie des nombres sont perçus comme laissant une moindre place à la géométrie :

> « At present, the geometry of numbers appears to be much more geometric than it was between 1920 and 1960[34]. »

Dans les commentaires les disciplines arithmétique, géométrie, analyse sont utilisées spontanément par les mathématiciens. Mais dans le cadre de la géométrie des nombres le sens qui leur est donné est moins clair, il change. Si l'utilisation de la géométrie dans un contexte arithmétique se traduit par l'opposition entre continu et discret chez Minkowski, avec Mordell et Davenport il s'agit davantage d'interpréter la résolution d'inégalités diophantiennes comme la recherche de points d'un réseau dans un domaine. Il y a aussi ce que géométrie désigne dans l'expression *géométrie des nombres* et là ce que Minkowski visait lorsqu'il a baptisé ainsi la discipline, c'est très certainement la géométrie dans sa dimension intuitive.

Des différences apparaîssent ensuite dans les emplois qui sont faits de la géométrie, l'arithmétique et l'analyse. Alors que Minkowski privilégie l'un ou l'autre de ces points de vue dans des situations précises, leur utilisation ne semble pas systématisée de la même manière chez Mordell et Davenport. La géométrie dans le travail de Minkowski a un statut fondamental, c'est par la géométrisation que doit passer l'unité des mathématiques. Mordell et Davenport n'expriment pas une ambition aussi grande pour la géométrie. Cependant, des commentaires dispersés et ponctuels montrent qu'eux aussi lui attribuent certaines spécificités. C'est particulièrement frappant avec Davenport qui utilise la géométrie à des fins heuristiques, qui lui laisse la place la plus importante dans son cours, qui semble la considérer comme plus générale mais qui par contre la fait disparaître de ses publications.

Les éléments perçus sur la géométrie des nombres ont dû être dégagés à partir de courtes remarques faites le plus souvent au milieu d'un article de mathématiques, ou encore dans le cas de Davenport en comparant les contenus de ses publications avec des cours et des notes non publiés. Cette observation sur la géométrie des nombres est en fait caractéristique et amène à un commentaire méthodologique plus général. Mordell et Davenport sont des mathématiciens qui ont laissé principalement des textes

[34] Gruber 1993b p.9.

mathématiques et ils sont nombreux dans leur cas. Ils n'ont pas produit de métadiscours sur leur travail ou sur les mathématiques en général. Tout ce que nous trouvons, ce sont de brefs commentaires, souvent peu explicites, qui peuvent parfois apparaître banals et par conséquent difficiles à interpréter de manière isolée. Cela peut expliquer en partie pourquoi Mordell et Davenport, et plus généralement ce type de mathématiciens, ont été peu étudiés. Pourtant, comme l'a montré en particulier le chapitre sur « l'école de Mordell », ce sont des figures incontournables de la théorie des nombres en Angleterre au milieu du XX^e siècle, il est donc nécessaire de développer des approches méthodologiques pour rendre compte de leur travail ; d'autant plus que cette façon de faire des mathématiques est certainement la plus représentative de cette communauté, en particulier pour l'époque contemporaine. Faire varier les échelles d'analyse est la méthode qui a été employée ici. Par exemple, l'examen à une échelle fine de certains articles de Davenport a montré l'origine géométrique de certaines démonstrations jugées arithmétiques dans leurs commentaires, ce qui a permis d'avancer des hypothèses sur sa conception de l'intervention de la géométrie. À une autre échelle, de la lecture de nombreux articles et de la répétition de petites remarques au milieu de leur travail mathématique se dégage parfois un point de vue cohérent sur une question précise.
Les différences de conception disciplinaire décrites expliquent aussi en partie pourquoi certaines généalogies oublient Mordell dans l'histoire de la géométrie des nombres. Le développement des mathématiques structurales au cours du XX^e siècle fait que Minkowski est plus facilement mobilisé comme repère historique car sa conception de la géométrie des nombres est mieux adaptée à cette vision des mathématiques. Quand il est cité, Mordell apparaît lui pour des contributions ponctuelles ou des points techniques.

Du point de vue de la question des disciplines scientifiques comme catégorie historique, les variations d'échelles montrent que, pour la géométrie des nombres, le problème n'est pas de savoir si la caractérisation de la notion de discipline doit laisser une plus grande place au social ou aux critères internes. La comparaison entre les conceptions de Minkowski et Mordell montrent que ces deux types de facteurs font l'objet de redéfinition et que le problème est de savoir à quels niveaux ils opèrent et comment ils s'articulent. Ainsi la question n'est pas de déterminer si la géométrie des nombres est une discipline car le sens que cela prend concrètement dans la pratique des mathématiciens bouge. Il s'agit dans chaque cas de trouver les indicateurs pertinents et de comprendre leur agencement pour rendre compte de la dynamique de la recherche tant sur le plan social qu'intellectuel.

L'angle adopté ici est celui de l'histoire d'une discipline. Cette histoire croise des notions et des théorèmes mathématiques qui auraient pu être choisis comme thème

central. Mais faire l'histoire d'une notion ou d'un théorème aurait conduit à une autre contextualisation, à mobiliser un autre corpus et donc à faire apparaître des phénomènes et des protagonistes différents[35]. Par exemple, une histoire de la notion de réseaux aurait certainement amené à s'intéresser à la cristallographie et à Poincaré ; une histoire du théorème sur les formes cubiques binaires serait passée par les travaux de Eisenstein, Hermite, Arndt et une étude plus précise de la théorie arithmétique des formes ; alors que s'intéresser à la question de la convexité dans la géométrie des nombres replacerait le travail de Minkowski dans le contexte de la géométrie au XIX^e siècle et par suite à prendre en compte des textes nouveaux. L'écriture de ces histoires et leur articulation avec celle entamée ici permettrait une compréhension plus complète de la géométrie des nombres.
C'est bien sûr à quoi invite ce travail...

[35]Pour un exemple des effets de nouvelles contextualisations voir Ritter 2004.

ANNEXES

Annexe A

La polémique sur le Grand Prix de l'Académie de Minkowski

Nous reproduisons les documents à propos de la polémique entre Mordell et le journal *The Engineer* au sujet du Grand Prix de l'Académie des Sciences attribué à Minkowski. Ces documents sont des copies conservées par Mordell des articles publiés par ce journal[1].

[1] MORDELL (St John's), box 1, folder 5. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

Annexe B

Deux lettres de Mordell à Davenport

Nous reproduisons ici deux lettres écrites par Mordell et adressées à Davenport.

La première est datée du 3 mars 1932 [1]. Mordell se trouve alors en Allemagne et il rend compte en particulier de ses contacts avec plusieurs mathématiciens allemands (Landau, Siegel, Artin, Noether etc).

Dans la seconde du 25 septembre 1933 [2], Mordell présente à Davenport certaines des idées de son article dans lequel il propose une démonstration arithmétique du théorème de Minkowski sur les domaines convexes.

[1] Davenport (WL), G 211.
[2] Davenport (WL), G 211.

Annexe C

Une lettre de Siegel à Mordell

Nous reproduisons ici la lettre de Siegel à Mordell du 8 octobre 1937 qui concerne le produit de n formes linéaires non homogènes[1]. Il s'agit de la lettre qui a inspiré le premier article de Davenport sur la géométrie des nombres.
La lettre est retranscrite après le document original.

[1]MORDELL (St John's), box 3, folder 28. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

Annexe D

Une lettre de Tschebotareff à Mordell

Nous reproduisons maintenant la lettre de Tschebotareff à Mordell du 24 février 1938 à propos du produit de n formes linéaires non homogènes[1]. Suite à la conférence de Mordell à Oslo en 1936 où il n'avait pas été cité, Tschebotareff lui fait part de ses travaux sur ce sujet qui avaient été uniquement publiés en russe.

[1] MORDELL (St John's), box 3, folder 19. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

Annexe E

Une lettre de Mahler à Mordell

Lettre de Mahler à Mordell du 21 août 1940 alors que Mahler se trouve dans un camp d'internement[1].
La lettre est retranscrite après le document original.

[1]Mordell (St John's), box 2, folder 17. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

Annexe F

Institutions visitées par Mordell

Liste des institutions où Mordell a fait des conférences[1].

[1] MORDELL (St John's), box 5. Reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

Annexe G

Les théorèmes de Minkowski d'après Albert Châtelet

Dans son cours mentionné dans le dernier chapitre[1], Albert Châtelet énonce et démontre les deux théorèmes de Minkowski sur les domaines convexes. Il s'agit à notre connaissance du premier mathématicien à présenter les preuves de ces résultats après Minkowski. Châtelet reprend en fait très largement les idées utilisées par Minkowski dans ses démonstrations. Cependant, Châtelet les présente en employant la notion de tableaux développée dans le début de son cours.

G.1 Définitions et notations préliminaires

Châtelet consacre le chapitre II de son cours à la *Théorie des modules de points*, c'est-à-dire en termes actuels aux groupes additifs. Comme cas particulier de ces modules de points, il étudie les modules types de dimension n dans un espace de dimension n qui correspondent à la notion de réseau. Châtelet appelle base d'un tel module un tableau A inversible et de taille n tel qu'un point $(p_1, \ldots, p_n)$ est dans le module si et seulement si

$$\|p_1, \ldots, p_n\| = \|x_1 \ldots x_n\| \times A\,,$$

où les x_i sont des entiers. Deux bases A et B du module sont équivalentes[2], c'est-à-dire que $A = \Sigma \times B$ où Σ est un tableau unimodulaire[3] (tableau à coefficients entiers et de déterminant ± 1).

Châtelet reprend aussi la notion de distance de Minkowski. Il définit la *distance géné-*

[1] Châtelet 1913.
[2] Châtelet 1913 p.36.
[3] Châtelet 1913 p.12.

ralisée[4] entre deux points $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $B(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ par

$$S(AB) = f(\alpha_i - \beta_i)\,,$$

avec f une fonction réelle qui vérifie :
(1) $f(u_i) \geq 0$ et $f = 0$ entraîne $u_i = 0$,
(2) pour tout λ réel, $f(\lambda u_i) = |\lambda|\, f(u_i)$,
(3) $f(u_i + v_i) \;\leq\; f(u_i) + f(v_i)$.

Pour une distance généralisée S et $\mathcal{T}$ un module type de dimension n, Châtelet démontre en particulier le résultat suivant[5]

> « Dans tout module type de dimension n, il existe toujours un nombre fini (non nul) de tableaux V, $\Delta(V) \neq 0$, formés de points $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tels que[6]
>
> $$\begin{cases} S(OA) \geq S(OA_1) & (A \text{ quelconque de } \mathcal{T}) \\ S(OA) \geq S(OA_2) & (A \text{ quelconque de } \mathcal{T} \text{ et non de } OA_1) \\ S(OA) \geq S(OA_3) & (A \text{ quelconque de } \mathcal{T} \text{ et non de } OA_1A_2) \\ ... & \end{cases}$$
>
> en particulier $S(OA_1) \leq S(OA_2) \leq \cdots \leq S(OA_n)$. »

Les tableaux V avec cette propriété sont appelés par Châtelet *tableaux minima* et $S(OA_1)$, $S(OA_2)$, …, $S(OA_n)$ est un *système de distances minima*.

Un tableau est sous forme réduite d'Hermite[7] s'il s'écrit

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{Vmatrix}\,,$$

[4] CHÂTELET 1913 p.17.
[5] CHÂTELET 1913 p.92.
[6] C'est-à-dire que les lignes de V sont les coordonnées des points A_i. $\Delta(V)$ désigne le déterminant de V.
[7] CHÂTELET 1913 p.46-47.

avec des coefficients qui vérifient $a_i^i > 0$ et

$$\begin{array}{rrrr} 0 \le a_2^1 < a_1^1\,, & 0 \le a_3^1 < a_1^1\,, & \ldots & ,\; 0 \le a_n^1 < a_1^1 \\ & 0 \le a_3^2 < a_2^2\,, & \ldots & ,\; 0 \le a_n^2 < a_2^2 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \le a_n^{n-1} < a_{n-1}^{n-1}\,. \end{array}$$

Pour $\mathcal{T}$ un module type de dimension n et V un tableau minimum, Châtelet démontre qu'il existe une unique base U de $\mathcal{T}$ telle que

$$U = S \times V\,,$$

où S est à coefficients rationnels sous forme réduite[8]. Ces tableaux U sont les tableaux réduits du système de distances minima.

G.2 Le premier théorème de Minkowski

Soit S une distance généralisée dans un espace de dimension n et f la fonction de n variables qui lui est associée comme dans le paragraphe précédent. Châtelet démontre le premier théorème de Minkowski sur les convexes sous la forme suivante[9] :

« Théorème I. — Etant donné un module type de dimension n, de base T et formé par les points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on a

$$[\text{minimum } f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^n \;\le\; \frac{2^n\,|\Delta(T)|}{J}\,,$$

J étant une constante qui ne dépend que de la fonction f. »

Châtelet commence par remarquer que pour deux points du module A et A', le point $A - A'$ est aussi un point du module et $S(AA') = S(O(A - A'))$, où O est l'origine du module. Il en déduit que si m désigne le minimum de f pris sur les points du module, l'inégalité $S(AA') < m$ est impossible quand A et A' sont distincts. Il considère ensuite les corps $\Gamma_{\frac{m}{2}}(A)$ qui sont définis par l'inégalité

$$S(AM) \;\le\; \frac{m}{2}\,.$$

Pour deux points quelconques du module A et A', les corps $\Gamma_{\frac{m}{2}}(A)$ et $\Gamma_{\frac{m}{2}}(A')$ ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière. Sinon un point M vérifierait les deux inégalités

[8] Châtelet 1913 p.93.
[9] Châtelet 1913 p.108.

$S(AM) < \frac{m}{2}$, $S(A'M) < \frac{m}{2}$ et par suite

$$S(AA') \;\leq\; S(AM) + S(A'M) \;<\; m\,.$$

Soient maintenant les points E du module dont les coordonnées e_i dans la base définie par T vérifient $|e_i| \leq \omega$, où ω est un entier naturel non nul. Pour chacun de ces $(2\omega+1)^n$ points E, Châtelet considère $\Gamma_{\frac{m}{2}}(E)$ et Ω le domaine formé par tous ces corps. Le volume de Ω est donc

$$(2\omega+1)^n \left(\frac{m}{2}\right)^n J\,,$$

où J est le volume de $\Gamma_1(O)$. Si $(y_1,\ldots,y_n)$ désigne les coordonnées dans la base T, Châtelet note ε une limite supérieure des $|y_i|$ pour les points $(y_1,\ldots,y_n)$ de $\Gamma_{\frac{m}{2}}(O)$, ainsi pour n'importe quel point $(y_1,\ldots,y_n)$ de Ω,

$$|y_1 - e_1| \leq \varepsilon\,, \quad |y_2 - e_2| \leq \varepsilon\,, \quad \ldots\,, \quad |y_n - e_n| \leq \varepsilon\,,$$

c'est-à-dire

$$|y_1| \leq \omega + \varepsilon\,, \quad |y_2| \leq \omega + \varepsilon\,, \quad \ldots\,, \quad |y_n| \leq \omega + \varepsilon\,.$$

Ces dernières inégalités définissent un corps qui contient Ω et dont le volume est donné par

$$\begin{aligned}
\int\ldots\int dx_1\ldots dx_n &= |\Delta(T)| \int\ldots\int dy_1\ldots dy_n \\
&= |\Delta(T)| \int_{-\omega-\epsilon}^{\omega+\epsilon} dy_1 \int_{-\omega-\epsilon}^{\omega+\epsilon} dy_2 \ldots \int_{-\omega-\epsilon}^{\omega+\epsilon} dy_n \\
&= |\Delta(T)|\,(2\omega+2\epsilon)^n\,.
\end{aligned}$$

En comparant ce volume avec celui de Ω, Châtelet obtient

$$\begin{aligned}
(2\omega+1)^n \left(\frac{m}{2}\right)^n J &\leq |\Delta(T)|\,(2\omega+2\epsilon)^n \\
\text{ou encore :}\qquad m^n &\leq \frac{|\Delta(T)|}{J}\;2^n\left(\frac{2\omega+2\epsilon}{2\omega+1}\right)^n.
\end{aligned}$$

Quand ω tend vers $+\infty$, cette inégalité conduit bien à

$$m^n \;\leq\; \frac{2^n\,|\Delta(T)|}{J}\,.$$

G.3 Le second théorème de Minkowski

Châtelet utilise les mêmes notations dans l'énoncé du deuxième théorème de Minkowski sur les corps convexes[10] :

« Théorème II. — Si dans un module type de base T (tableau d'ordre n) on considère un système de distances minima,

$$S(OA_1) = m_1\,, \quad S(OA_2) = m_2\,, \quad \ldots\,, \quad S(OA_n) = m_n\,,$$

on a

$$m_1\,m_2\,\ldots\,m_n \;\le\; \frac{2^n\,|\Delta(T)|}{J}\;. \text{ »}$$

Pour démontrer ce résultat Châtelet choisit comme base du module le tableau réduit U déduit du tableau minimum V donné par le système de distances minima de l'énoncé (voir le paragraphe G.1). Il considère ensuite les corps

$$\Gamma_{\frac{m_1}{2}}(E) = \Gamma^1(E), \quad \Gamma_{\frac{m_2}{2}}(E) = \Gamma^2(E), \quad \ldots, \Gamma_{\frac{m_n}{2}}(E) = \Gamma^n(E),$$

où les coordonnées de E vérifient $|e_i| \le \omega$ avec ω un entier naturel non nul. Dans la suite Ω_i désigne la réunion sur les points tels que $|e_i| \le \omega$ des corps $\Gamma^i(E)$ et ν_i le volume de Ω_i. Dans la preuve du théorème I, Châtelet a déjà obtenu

$$\nu_1 = (2\omega+1)^n \left(\frac{m_1}{2}\right)^n J\,.$$

D'autre part, si ε' est une limite supérieure de $|y_i|$ pour les points $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\Gamma^n(O)$, le même raisonnement que pour le théorème I montre que

$$\nu_n \;\le\; |\Delta(U)|\,(2\omega + 2\varepsilon')^n\,.$$

En particulier, comme $\Gamma^1(O) = \frac{m_1}{m_n}\,\Gamma^n(O)$, Châtelet remarque que $\varepsilon' = \frac{m_n}{m_1}\,\varepsilon$, où ε a été défini dans le paragraphe précédent.
L'étape suivante consiste à déterminer des inégalités sur le rapport entre ν_k et ν_{k-1}.

Par définition de m_k, pour un point A du module l'inégalité $S(OA) < m_k$ implique que A appartient à $OA_1 \ldots A_{k-1}$ et donc que les $(n-k+1)$ dernières coordonnées de A dans la base définie par U sont nulles. En effet, par définition de U, le sous-espace engendré par les $k-1$ premières lignes de U est le même que celui engendré par les $k-1$ premières lignes de V.
Châtelet répartit ensuite les corps $\Gamma^k(E)$ de chaque Ω_k en $(2\omega+1)^{n-k+1}$ groupes de $(2\omega+1)^{k-1}$ corps, chaque groupe étant composé des corps dont les centres ont les

[10] Châtelet 1913 p.110.

mêmes $(n-k+1)$ dernières coordonnées. Deux corps $\Gamma^k(E)$ pris dans deux de ces groupes ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière. En effet, si un point M est intérieur à $\Gamma^k(E_1)$ et à $\Gamma^k(E_2)$ alors

$$S(E_1E_2) \ \leq \ S(E_1M) + S(E_2M) \ < \ m_k\,.$$

Or $S(E_1E_2) = S(O(E_1-E_2))$ ce qui implique que les $(n-k+1)$ dernières coordonnées de E_1 et E_2 sont les mêmes et contredit le choix de $\Gamma^k(E_1)$ et $\Gamma^k(E_2)$ dans deux groupes distincts. Châtelet déduit de cette dernière remarque que le volume de Ω_k, noté ν_k, est égal à la somme des volumes de chacun des groupes qui le compose. Comme les volumes de ces groupes sont tous égaux, il vient

$$\nu_k = (2\omega+1)^{n-k+1}\, w_k\,,$$

où w_k est le volume d'un des groupes. En choisissant le groupe pour lequel les $(n-k+1)$ dernières coordonnées sont nulles, w_k s'écrit

$$w_k = \int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n\ ,$$

où l'intégration porte sur les points $(x_1,\ldots,x_n)$ qui vérifient

$$f(x_1-e_1,\ldots,x_{k-1}-e_{k-1},x_k,\ldots,x_n) \ \leq \ \frac{m_k}{2}\ ,$$

avec e_i des entiers tels que $|e_i| \leq \omega$. Châtelet évalue l'intégrale précédente « en deux étapes » en intégrant d'abord par rapport aux $(k-1)$ premières variables, ainsi

$$w_k = \int \ldots \int S\ dt_k \ldots dt_n\ ,$$

où S désigne l'intégrale $\displaystyle\int \ldots \int dx_1 \ldots dx_{k-1}$ sur le domaine

$$f(x_1-e_1,\ldots,x_{k-1}-e_{k-1},t_k,\ldots,t_n) \ \leq \ \frac{m_k}{2}\ .$$

En répartissant de la même manière les corps du domaine Ω_{k-1} en $(2\omega+1)^{n-k+1}$ groupes qui ne se rencontrent pas (car $m_{k-1} \leq m_k$), Châtelet obtient

$$\left\{\begin{array}{c} \nu_{k-1} = (2\omega+1)^{n-k+1}\ w'_k \\ w'_k = \displaystyle\int \ldots \int S_1\ dt'_k \ldots dt'_n \\ S_1 = \displaystyle\int \ldots \int dx'_1 \ldots dx'_{k-1} \\ f(x'_1-e_1,..,x'_{k-1}-e_{k-1},t'_k,\ldots,t'_n) \leq \dfrac{m_{k-1}}{2}\ . \end{array}\right.$$

Pour comparer ce volume au précédent, Châtelet pose $\theta = \frac{m_k}{m_{k-1}}$ et il multiplie la dernière condition par θ, d'où

$$f\left[\theta(x'_1 - e_1), .., \theta(x'_{k-1} - e_{k-1}), \theta t'_k, \ldots, \theta t'_n\right] \leq \frac{m_k}{2} \, .$$

Il effectue alors le changement de variables $\theta t'_i = t_i$, donc

$$\begin{cases} w'_k = \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{n-k+1} \displaystyle\int \ldots \int S_1 \, dt_k \ldots dt_n \\ S_1 = \displaystyle\int \ldots \int dx'_1 \ldots dx'_{k-1} \\ f\left[\theta(x'_1 - e_1), .., \theta(x'_{k-1} - e_{k-1}), t_k, \ldots, t_n\right] \leq \dfrac{m_k}{2} \, . \end{cases}$$

Pour comparer les volumes w_k et w'_k, Châtelet compare S et S_1 pour un système de valeurs de $t_k, \ldots, t_n$ fixé. Les conditions $f(x_1 - e_1, \ldots, x_{k-1} - e_{k-1}, t_k, \ldots, t_n) \leq \frac{m_k}{2}$ et $f\left[\theta(x'_1 - e_1), .., \theta(x'_{k-1} - e_{k-1}), t_k, \ldots, t_n\right] \leq \frac{m_k}{2}$ définissent des domaines (respectivement notés $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$) dans le sous-espace de dimension $k-1$ défini par les $n-k+1$ équations $x_i = t_i$, $k \leq i \leq n$. Pour comparer les volumes de ces deux domaines, Châtelet translate $\mathcal{D}_1$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{k-1})$ vérifiant $f(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{k-1}, t_k, ..t_n) \leq \frac{m_k}{2}$, il effectue dans S le changement de variables $x_i = x'_i + \frac{\theta-1}{\theta}\,\alpha_i$, alors

$$S = \int \ldots \int dx'_1 \ldots dx'_{k-1}$$

où l'intégrale est calculée sur le domaine $\mathcal{D}_3$ défini par

$$f\left[(x'_1 - e_1) + \frac{\theta-1}{\theta}\,\alpha_1, \ldots, (x'_{k-1} - e_{k-1}) + \frac{\theta-1}{\theta}\,\alpha_{k-1}, t_k, \ldots, t_n\right] \;\leq\; \frac{m_k}{2} \, .$$

Mais le domaine $\mathcal{D}_2$ est inclus dans $\mathcal{D}_3$. En effet, la condition qui définit le domaine $\mathcal{D}_2$ signifie que le point $(\theta(x'_1 - e_1), .., \theta(x'_{k-1} - e_{k-1}), t_k, \ldots, t_n)$ appartient à $\Gamma^k(O)$. Or $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{k-1}, t_k, ..t_n)$ est aussi un point de $\Gamma^k(O)$, donc par convexité

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\theta(x'_1 - e_1) + (\theta-1)\alpha_1}{\theta}, \ldots, \frac{\theta(x'_{k-1} - e_{k-1}) + (\theta-1)\alpha_{k-1}}{\theta}, t_k, \ldots, t_n\right) \\ &\qquad = \left((x'_1 - e_1) + \frac{\theta-1}{\theta}\,\alpha_1, \ldots, (x'_{k-1} - e_{k-1}) + \frac{\theta-1}{\theta}\,\alpha_{k-1}, t_k, \ldots, t_n\right) \in \Gamma^k(O) \, . \end{aligned}$$

Châtelet en déduit donc que S_1 est inférieure ou égale à S, par suite $\theta^{n-k+1} w'_k \;\leq\; w_k$, puis $\theta^{n-k+1}\nu_{k-1} \;\leq\; \nu_k$. Cette dernière inégalité s'écrit finalement

$$\frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \;\geq\; \left(\frac{m_k}{m_{k-1}}\right)^{n-k+1} \qquad\qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n),$$

ce qui implique

$$\frac{\nu_n}{\nu_1} \;\geq\; \frac{m_2\, m_3\, \ldots\, m_n}{m_1^{n-1}}\,.$$

Comme $\nu_1 = (2\omega+1)^n \left(\frac{m_1}{2}\right)^n J$ et $\nu_n \leq |\Delta(U)|\,(2\omega+2\varepsilon')^n$, il vient

$$\frac{m_2\, \ldots\, m_n}{m_1^{n-1}}\,(2\omega+1)^n \left(\frac{m_1}{2}\right)^n\, J \;\leq\; |\Delta(U)|\,(2\omega+2\epsilon')^n$$

et donc

$$m_1\, m_2\, \ldots\, m_n \;\leq\; \frac{2^n\,|\Delta(U)|}{J}\, \left(\frac{2\omega+2\epsilon'}{2\omega+1}\right)^n.$$

Par passage à la limite, pour ω qui tend vers $+\infty$, Châtelet obtient finalement l'estimation cherchée

$$m_1\, m_2\, \ldots\, m_n \;\leq\; \frac{2^n\,|\Delta(U)|}{J}\,.$$

Bibliographie

ARNDT Peter Friedrich, 1851a, «Ein Satz über binäre Formen von beliebigem Grade und Anwendung desselben auf biquadratische Formen». *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 17, p. 409–420.

ARNDT Peter Friedrich, 1851b, «Versuch einer Theorie der homogenen Funktionen des dritten Grades mit zwei Variabeln». *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 17, p. 1–53.

ARNDT Peter Friedrich, 1852, «Untersuchungen über die Anzahl der kubischen Klassen, welche zu einer determinirenden quadratischen Klasse gehören». *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 19, p. 408–418.

ARNDT Peter Friedrich, 1857, «Zur Theorie der binären kubischen Formen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 53, p. 309–321.

ARNDT Peter Friedrich, 1858, «Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Klassification derselben für alle successiven negativen Determinanten $(-D)$ von $D = 3$ bis $D = 2000$». *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 31, p. 335–448.

ARNHEIM Rudolf, 1976, *La pensée visuelle*. Flammarion. Traduction de *Visual Thinking*, 1969.

ARTIN Emil, 1964, *Gamma Function*. New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London : Holt, Rinehart and Winston. Traduction par Michael Butler de *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, 1931.

BACON Harold, JACOBSEN Lydik et WEBSTER David L., N.D., «Hans Frederik Blichfeldt (1873-1945)». Stanford University Faculty Memorials (en ligne), page mise à jour le 15 mars 2007, <`http ://histsoc.stanford.edu/alpha_list.shtml`> (consultée le 15 mars 2007).

BARROW-GREEN June, 1999, «A Corrective to the Spirit of too Exclusively Pure Mathematics' : Robert Smith (1689-1768) and his Prizes at Cambridge University». *Annals of Science*, vol. 56, p. 271–316.

Barrow-Green June et Gray Jeremy, 2006, «Geometry at Cambridge, 1863-1940». *Historia Mathematica*, vol. 33, p. 315–356.

Bayer-Fluckiger Eva, 2006a, «Hermann Minkowski, Grand Prix de l'Académie à 18 ans». *Tangente*, vol. 111, p. 28–31.

Bayer-Fluckiger Eva, 2006b, «Upper Bounds for Euclidean Minima of Algebraic Number Fields». *Journal of Number Theory*, vol. 121, p. 305–323.

Bayer-Fluckiger Eva et Suarez Ivan, 2006, «Ideal Lattices over Totally Real Number Fields and Euclidean Minima». *Archiv der Mathematik*, vol. 86, p. 217–225.

Bell Eric Temple, 1951, «Hans Frederik Blichfeldt 1873-1945». *Biographical Memoirs of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 26, p. 180–189.

Bensa Alban, 1996, «De la micro-histoire vers une anthropologie critique». Dans Revel 1996a, p. 37–70.

Bergé Anne-Marie et Martinet Jacques, 1985-1986, «Sur la constante d'Hermite». *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*. Exposé n°8.

Berger Marcel, 2006, *Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà : de la puissance et de la complexité d'une notion simple*, vol. 1. Paris : Ellipses.

Blichfeldt Hans Frederik, 1913, «On the Arithmetic Value of Quadratic Forms». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 19, p. 518.

Blichfeldt Hans Frederik, 1914, «A New Principle in the Geometry of Numbers, with Some Applications». *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 15, p. 227–235.

Blichfeldt Hans Frederik, 1919, «Report on the Theory of the Geometry of Numbers». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 25, p. 449–453.

Blichfeldt Hans Frederik, 1921, «On the Approximate Solutions in Integers of a Set of Linear Equations». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 7, p. 317–319.

Blichfeldt Hans Frederik, 1929, «The Minimum Value of Quadratic Forms, and the Closest Packing of Spheres». *Mathematische Annalen*, vol. 101, p. 605–608.

Blichfeldt Hans Frederik, 1932, «Geometry of Numbers». Lectures delivered at Stanford University, 1930-1932. Stanford Auxiliary Library.

BLICHFELDT Hans Frederik, 1935, «The Minimum Values of Positive Quadratic Forms in Six, Seven and Eight Variables». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, p. 1–15.

BLICHFELDT Hans Frederik, 1936, «A New Upper Bound to the Minimum Value of the Sum of Linear Homogeneous Forms». *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 43, p. 410–414.

BLICHFELDT Hans Frederik, 1939, «Note on the Minimum Value of the Discriminant of an Algebraic Field». *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 48, p. 531–533.

BONIFACE Jacqueline, 2004, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Paris : Vrin.

BOURDIEU Pierre, 1976, «Quelques propriétés des champs». Dans *Questions de sociologie*, Exposé à l'ENS, novembre 1976, Paris, 2002 : Les Editions de minuit, p. 113–120.

BOURDIEU Pierre, 2001, *Science de la science et réflexivité*. Paris : Raisons d'agir.

BRECHENMACHER Frédéric, 2006, *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930). Formes de représentations et méthodes de décompositions.* Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

BULLYNCK Maarten, 2006, *Vom Zeitalter der Formalen Wissenschaften. Anleitung zur Verarbeitung von Erkenntnissen anno 1800, vermittelst einer parallelen Geschichte.* Thèse de doctorat, Université de Gand.

BURMA John Harmon, 1956, «Some Cultural Aspects of Immigration : its Impact, especially on our Arts and Sciences». *Law and Contemporary Problems*, vol. 21, p. 284–298.

CAHEN Eugène, 1897, «Compte rendu de *Geometrie der Zahlen* de H. Minkowski». *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 21, 2e série, p. 25–30.

CAHEN Eugène et VAHLEN Karl Theodor, 1908, «Théorie arithmétique des formes». *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées,* tome I, vol. 3, p. 76–214.

CAMBROSIO Alberto et KEATING Peter, 1983, «The Disciplinary Stake : The Case of Chronobiology». *Social Studies of Science*, vol. 13, p. 323–353.

CASSELS John William Scott, 1959, *An Introduction to the Geometry of Numbers.* Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2e édition. 1971.

CASSELS John William Scott, 1973, «Louis Joel Mordell 1888-1972». *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, vol. 19, p. 493–510.

CASSELS John William Scott, 1986, «Mordell's finite basis theorem revisited». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 100, p. 31–41.

CHÂTELET Albert, 1913, *Leçons sur la théorie des nombres.* Paris : Gauthier-Villars.

COATES John Henry et VAN DER POORTEN Alfred Jacobus, 1994, «Kurt Mahler». *Biographical Memoirs of the Fellows of the Royal Society*, vol. 39, p. 264–279.

COHN Steven F., 1986, «The Effects of Funding Changes upon the Rate of Knowledge Growth in Algebraic and Differential Topology, 1955-75». *Social Studies of Science*, vol. 16, p. 23–59.

CORRY Leo, 1997, «Hermann Minkowski and the Postulate of Relativity». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 51, p. 281–314.

CORRY Leo, 2000, «The Empiricist Roots of Hilbert's Axiomatic Method». Dans HENDRICKS Vincent F., PEDERSEN Stig Andur et JØRGENSEN Klaus Frovin (eds), *Proof Theory : History and Philosophical Signifiance*, Dordrecht : Kluwer, p. 35–54.

CORRY Leo, 2002, «David Hilbert y su Filosofia Empirista de la Geometria». *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. 9, p. 27–44.

CORRY Leo, 2006, «Axiomatics, Empirism, and Anschauung in Hilbert's Conception of Geometry : between Arithmetic and General Relativity». Dans GRAY Jeremy et FERREIRÓS José (eds), *The Architecture of Modern Mathematics : Essays in History and Philosophy*, Oxford : Oxford University Press, p. 155–176.

CRANE Diana, 1972, *Invisible Colleges. Diffusion of Knowledge in Scientific Communities.* Chicago-London : University of Chicago Press.

DAVENPORT Harold, 1937, «Note on a Result of Siegel». *Acta Arithmetica*, vol. 2, p. 262–265.

DAVENPORT Harold, 1938a, «On the Product of Three Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 13, p. 139–145.

DAVENPORT Harold, 1938b, «On the Product of Three Homogeneous Linear Forms (II)». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 44, p. 412–431.

DAVENPORT Harold, 1939a, «Minkowski's Inequality for the Minima Associated with a Convex Body». *The Quaterly Journal of Mathematics*, vol. 10, p. 119–121.

DAVENPORT Harold, 1939b, «On the Product of Three Homogeneous Linear Forms (III)». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 45, p. 98–125.

DAVENPORT Harold, 1939c, «A Simple Proof of Remak's Theorem on the Product of Three Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 14, p. 47–51.

DAVENPORT Harold, 1941a, «Note on the Product of Three Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 98–101.

DAVENPORT Harold, 1941b, «On a Conjecture of Mordell Concerning Binary Cubic Forms». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 37, p. 325–330.

DAVENPORT Harold, 1943a, «The Minimum of a Binary Cubic Form». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 18, p. 168–176.

DAVENPORT Harold, 1943b, «On the Product of Three Homogeneous Linear Forms». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 39, p. 1–21.

DAVENPORT Harold, 1945a, «The Reduction of a Binary Cubic Form (I)». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 20, p. 14–22.

DAVENPORT Harold, 1945b, «The Reduction of a Binary Cubic Form (II)». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 20, p. 139–147.

DAVENPORT Harold, 1946a. Inaugural lecture at the University College, London, le 6 juin 1946. DAVENPORT (WL), A 59 et C 164.

DAVENPORT Harold, 1946b, «La géométrie des nombres». Conférence faite à Bruxelles. DAVENPORT (WL), C 130.

DAVENPORT Harold, 1947a, «The Geometry of Numbers». *Nature*, vol. 159, p. 104–105.

DAVENPORT Harold, 1947b, «The Geometry of Numbers». *The Mathematical Gazette*, vol. 31, p. 206–210.

DAVENPORT Harold, 1948. Résumé d'un cours à Berkeley de janvier 1948. DAVENPORT (WL), C 165.

DAVENPORT Harold, 1949, «Sur les corps cubiques à discriminants négatifs». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 228, p. 883–885.

DAVENPORT Harold, 1950a, «Recent Progress in the Geometry of Numbers». Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Harvard, Cambridge USA, p. 166–174.

DAVENPORT Harold, 1950b, «Selected Topics in the Geometry of Numbers». Cours donné à l'université de Stanford pendant le semestre d'été 1950, notes de G. Hedrick. DAVENPORT (WL), C 104.

DAVENPORT Harold, 1952, *The Higher Arithmetic : an Introduction to the Theory of Numbers*. London-New York : Hutchinson's University Library. 7e édition, Cambridge University Press, 1999.

DAVENPORT Harold, 1964, «L.J. Mordell». *Acta Arithmetica*, vol. 9, p. 3–12.

DAVENPORT Harold, 1967, *Multiplicative Number Theory*. Chicago : Markham Publishing Company, 1re édition.

DAVENPORT Harold, 1977, *The Collected Works of Harold Davenport*, vol. I. London - New York - San Francisco : Academic Press.

DAVENPORT Harold, (WL). *Personal Papers of Harold Davenport*, Wren Library, Trinity College, Cambridge.

DICKSON Leonard Eugene, 1919a, «Applications of the Geometry of Numbers to Algebraic Numbers». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 25, p. 453–455.

DICKSON Leonard Eugene, 1919b, «Mathematics in War Perspective». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 25, p. 289–311.

DICKSON Leonard Eugene, 1920, *History of the Theory of Numbers - Diophantine Analysis*, vol. II. New York : Chelsea Publishing Company. Réimpression de 1971.

DICKSON Leonard Eugene, 1923, *History of the Theory of Numbers - Quadratic and Higher Forms*, vol. III. New York : Chelsea Publishing Company. Réimpression de 1992.

DICKSON Leonard Eugene, 1947, «Hans Frederik Blichfeldt 1873-1945». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 53, p. 382.

DIEUDONNÉ Jean, 1974, «MINKOWSKI Hermann». Dans GILLISPIE Charles Coulston (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. IX, New York : American Council of Learned Societies, p. 411–414.

DUVERNEY Daniel, 1998, *Théorie des nombres*. Paris : Dunod.

DYSON Freeman, 1948, «On the Product of Four Non-Homogeneous Linear Forms». *Annals of Mathematics*, vol. 49, 2e série, p. 82–109.

EDWARDS Harold M., 2007, «Composition of Binary Quadratic Forms and the Foundations of Mathematics». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre II.2, Berlin : Springer, p. 129–144.

EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max, 1844, «Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln». *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 27, p. 89–104.

EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max, 1847, «Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés». *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 35, p. 368.

ENGEL Peter, 1993, «Geometric Crystallography». Dans GRUBER P.M. et WILLS J.M. (eds), *Handbook of Convex Geometry*, vol. B, chapitre 3.7, Amsterdam : Elsevier Science, p. 989–1043.

FENSTER Della D., 1997, «Role Modeling in Mathematics : The Case of Leonard Eugene Dickson (1874-1954)». *Historia Mathematica*, vol. 24, p. 7–24.

FENSTER Della D. et SCHWERMER Joachim, 2007, «Composition of Quadratic Forms : An Algebraic Perspective». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre II.3, Berlin : Springer, p. 145–158.

FISHER Charles S., 1966-1967, «The Death of a Mathematical Theory : a Study in the Sociology of Knowledge». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 3, p. 137–159.

FLETCHER Colin R., 1986, «Refugee Mathematicians : A German Crisis and a British Response, 1933-1936». *Historia Mathematica*, vol. 13, p. 13–27.

FOUCAULT Michel, 1969, *L'Archéologie du savoir*. Paris : Gallimard.

FOUCAULT Michel, 1975, *Surveiller et punir*. Paris : Gallimard.

FOUCAULT Michel, 2003, *Le Pouvoir psychiatrique*. Paris : Seuil/Gallimard. Cours au Collège de France, 1973-1974.

FULLER Steve, 2000, «Discipline». Dans HESSENBRUCH Arne (ed.), *Reader's Guide to the History of Science*, London-Chicago : Fitzroy Dearborn Publishers, p. 176–177.

FURTWÄNGLER Philipp, 1917, «Über Kriterien für die algebraischen Zahlen». *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, vol. 126, p. 299–309.

GALISON Peter Louis, 1979, «Minkowski's Space-Time : From Visual Thinking to the Absolute World». *Historical Studies in the Physical Sciences*, vol. 10, p. 85–121.

GAUSS Carl Friedrich, 1807, *Recherches Arithmétiques*. Courcier, Paris. Traduction française par A.C.M Poullet-Delisle des *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.

GAUSS Carl Friedrich, 1827, «Fragments Posthumes». *Werke*, vol. III, p. 477–478. Publié en 1876.

GAUSS Carl Friedrich, 1831, «Compte rendu de *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen* von Ludwig August Seeber». *Göttingische gelehrte Anzeigen*. Reproduit dans *Werke*, vol. II, 1863, p.188-196.

GEISON Gerald L., 1981, «Scientific Change, Emerging Specialties, and Research Schools». *History of Science*, vol. 19, p. 20–40.

GISPERT Hélène, 1991, *La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914)*. Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques et Société mathématique de France.

GISPERT Hélène, 1999, «Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk». *Historia Mathematica*, vol. 26, p. 344–360.

GLAISHER James Whitbread Lee, 1894, «Introduction to the Collected Mathematical Papers of Henry J. S. Smith». Dans SMITH 1894, p.lxi-xcv.

GOLDMAN Jay R., 1998, *The Queen of Mathematics. A Historically Motivated Guide to Number Theory*. Wellesley Massachusetts : A K Peters.

GOLDSTEIN Catherine, 1993, «Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mises en oeuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, vol. 3, 2e série, p. 25–49.

GOLDSTEIN Catherine, 1999, «Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914)». *Acta historiae rerum naturalium necnom technicarum*, vol. 3, p. 187–214.

GOLDSTEIN Catherine, 2002, «Compte Rendu de *Lectures on Number Theory*, by P.G. Lejeune-Dirichlet. Translated by J. Stillwell». *Isis*, vol. 93, p. 718.

GOLDSTEIN Catherine, 2007, «The Hermitian Form of Reading the *Disquisitiones*». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre VI.1, Berlin : Springer, p. 377–410.

GOLDSTEIN Catherine, 2008, «Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite». Dans FLAMENT Dominique et NABONNAND Philippe (eds), *La justification en mathématiques*, Paris : Maison des sciences de l'homme. Preprint.

GOLDSTEIN Catherine et RITTER Jim, 2003, «The Varieties of Unity. Sounding Unified Theories (1920–1930)». Dans ASHTEKAR Abhay, COHEN Robert, HOWARD Don, RENN Jürgen, SARKAR Sahotra et SHIMONY Abner (eds), *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, Dordrecht : Kluwer, p. 93–149.

GOLDSTEIN Catherine et SCHAPPACHER Norbert, 2007a, «A Book in Search of a Discipline (1801-1860)». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre I.1, Berlin : Springer, p. 3–65.

GOLDSTEIN Catherine et SCHAPPACHER Norbert, 2007b, «Several Disciplines and a Book (1860-1901)». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre I.2, Berlin : Springer, p. 67–103.

GOLDSTEIN Jan, 1984, «Foucault among the Sociologists : The "Disciplines" and the History of the Professions». *History and Theory*, vol. 23, p. 170–192.

GRAY Jeremy, 1999, «Geometry–Formalisms and Intuitions». Dans GRAY Jeremy (ed.), *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890-1930*, New York : Oxford University Press, p. 58–83.

GRUBER Peter M., 1993a, «Geometry of Numbers». Dans GRUBER P.M. et WILLS J.M. (eds), *Handbook of Convex Geometry*, vol. B, chapitre 3.1, Amsterdam : Elsevier Science, p. 740–763.

GRUBER Peter M., 1993b, «History of Convexity». Dans GRUBER P.M. et WILLS J.M. (eds), *Handbook of Convex Geometry*, vol. A, chapitre 0, Amsterdam : Elsevier Science, p. 1–15.

GRUBER Peter M., 2007, *Convex and Discrete Geometry*. Berlin-Heidelberg : Springer.

GRUBER P.M. et WILLS J.M. (eds), 1993, *Handbook of Convex Geometry*, vol. A. Amsterdam : Elvesier Science.

HANCOCK Harris, 1964, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, vol. I et II. New York : Dover Publications. 1ère édition en 1 volume publiée par The Macmillan Company, New York, 1939.

HARDY Godfrey Harold et WRIGHT Edward Maitland, 1960, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Clarendon Press, 4e édition. 1ère édition publiée en 1938.

HERMITE Charles, 1850, «Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, p. 261–315.

HERMITE Charles, 1851, «Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 41, p. 191–216.

HERMITE Charles, 1859, «Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées». *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, vol. 48, p. 351–357.

HERMITE Charles, 1873, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. Paris : Gauthier-Villars.

HERMITE Charles, 1880, «Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchebychef». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 88, p. 10–15.

HERREMAN Alain, 2000, *La topologie et ses signes. Eléments pour histoire sémiotique des mathématiques*. Paris : L'Harmattan.

HILBERT David, 1897, «Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 4, p. 177–535.

HILBERT David, 1911, «Gedächtnisrede auf Hermann Minkowski». Dans HILBERT David, SPEISER Andreas et WEYL Hermann (eds), *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, Teubner, p. V–XXXI.

HILBERT David, 1991, *Théorie des corps de nombres algébriques*. Sceaux : Gabay. Reproduction de la traduction par Albert Levy et Théophile Got de *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, 1897 avec une préface et des notes de Georges Humbert et Théophile Got. Cette traduction a été publiée la première fois dans les *Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse*, 3e série, tome I, 1909, tome II, 1910, tome III, 1911.

HILBERT David et COHN-VOSSEN Stephen, 1952, *Geometry and the Imagination*. New York : Chelsea Publishing Company. Traduction par P. Nemenyi de *Anschauliche Geometrie*, 1932.

HINDRY Marc et SILVERMAN Joseph H., 2000, *Diophantine Geometry. An Introduction*. New York : Springer-Verlag.

HLAWKA Edmund, 1943-1944, «Zur Geometrie der Zahlen». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 49, p. 285–312.

HLAWKA Edmund, 1980, «90 Jahre Geometrie der Zahlen». *Dans* HLAWKA 1990, p. 398–430.

HLAWKA Edmund, 1990, *Selecta*. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag.

HURWITZ Adolf, 1891, «Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche». *Mathematische Annalen*, vol. 39, p. 279–284.

HURWITZ Adolf, 1897, «Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln». *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 139–145. Traduction en français par L. Laugel dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3^{e} série, tome 17, 1898.

JORDAN Camille, 1892, «Remarques sur les intégrales définies». *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 8, 4^{e} série, p. 69–99.

JULIA Gaston, 1933, *Extraits de la notice sur les travaux scientifiques de M. Gaston Julia*. Paris : Gauthier-Villars. D'après l'exemplaire des archives de l'Académie des Sciences de Paris.

JULIA Gaston, 1963. Extrait de la plaquette hommage à Albert Châtelet à l'occasion de la plaque au Centre des Oeuvres Universitaires.

KELLER Ott-Heinrich, 1954, «Geometrie der Zahlen». Dans *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Tome I.2, fascicule 11, Leipzig, Teubner.

KJELDSEN Tinne Hoff, 2002, «Different Motivations and Goals in the Historical Development of the Theory of Systems of Linear Inequalities». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 56, p. 469–538.

KLEIN Felix, 1895-1896, «Ausgewahlte Kapitel der Zahlentheorie», Zweistundige Vorlesung im Winter 1895-96 und Sommer 1896. Dans KLEIN 1921-1923, p.287-314.

KLEIN Felix, 1897, «Sur l'"arithmétization" des mathématiques». *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 16, p. 114–128. Traduction de Vassilief et Laugel d'un discours prononcé devant la société royale des sciences de Göttingen, *Göttinger Nachrichten*, 1895.

KLEIN Felix, 1898, «Les nombres idéaux». Dans *Conférences sur les mathématiques*, Paris : Traduction de L. Laugel, Hermann, p. 58–66. Conférence faite au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago en 1893.

KLEIN Felix, 1921-1923, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. III. Berlin-New York : Springer-Verlag.

KOHLER Robert E., 1982, *From Medical Chemistry to Biochemistry. The Making of a Biomedical Discipline*. Cambridge-New York-Melbourne : Cambridge University Press.

KORKINE Aleksander Nikolaevich et ZOLOTAREFF Egor Ivanovich, 1872, «Sur les formes quadratiques positives quaternaires». *Mathematische Annalen*, vol. 5, p. 581–583.

KORKINE Aleksander Nikolaevich et ZOLOTAREFF Egor Ivanovich, 1873, «Sur les formes quadratiques». *Mathematische Annalen*, vol. 6, p. 366–389.

KUHN Thomas S., 1983, *La Structure des révolutions scientifiques*. Flammarion. Traduction de : *The Structure of Scientific Revolutions*, 2e édition augmentée, The University of Chicago Press, Chicago, 1970.

LAGRANGE Joseph Louis, 1770, «Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. 24. Reproduit dans LAGRANGE 1868, p. 581-652.

LAGRANGE Joseph-Louis, 1772, «Démonstration d'un Théorème d'Arithmétique». *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin, année 1770*, p. 123–133. Reproduit dans LAGRANGE 1869, p.189-201.

LAGRANGE Joseph Louis, 1773 et 1775, «Recherches d'arithmétiques». *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-lettres de Berlin*. Reproduit dans LAGRANGE 1869, section 2, p.695-795.

LAGRANGE Joseph Louis, 1868, *Oeuvres de Lagrange*, vol. II. Paris : Gauthier-Villars.

LAGRANGE Joseph-Louis, 1869, *Oeuvres de Lagrange*, vol. III. Paris : Gauthier-Villars.

LANG Serge, 1983, *Fundamentals of Diophantine Geometry*. New York : Springer Verlag.

LEJEUNE-DIRICHLET Johann Peter Gustav, 1839, «Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres». *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 19, p. 324–369.

LEJEUNE-DIRICHLET Johann Peter Gustav, 1850, «Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen». *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, p. 209–227.

LEJEUNE-DIRICHLET Johann Peter Gustav, 1863, *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Braunschweig : F. Vieweg und Sohn. Edition et suppléments de Richard Dedekind.

LEJEUNE-DIRICHLET Johann Peter Gustav, 1999, *Lectures on Number Theory*, History of Mathematics, vol. 16. American Mathematical Society - London Mathematical Society. Suppléments de Richard Dedekind. Traduction de John Stillwell des *Vorlesungen über Zahlentheorie.*

LEKKERKERKER Cornelis Gerrit, 1969, *Geometry of Numbers.* Groningen-Amsterdam-London : Wolters-Noordhoff Publishing, North Holland Publishing Company.

LEPETIT Bernard, 1996, «De l'échelle en histoire». Dans REVEL 1996a, p. 71–94.

LEVI Beppo, 1911, «Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere». *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, vol. 31, p. 318–340.

LÜTZEN Jesper, 1999, «Geometrizing Configurations. Heinrich Hertz and his Mathematical Precursors». Dans GRAY Jeremy (ed.), *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890-1930*, New York : Oxford University Press, p. 25–46.

MAHLER Kurt, 1938-1939, «Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen». *Casopis pro pestovani matematiky a physiky*, vol. 68, p. 85–102.

MAHLER Kurt, 1946, «Lattice Points in Two-Dimensional Star Domains I». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 49, p. 128–157.

MARTINET Jacques, 1996, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens.* Paris : Masson.

MATHEWS George Ballard, 1892, *Theory of Numbers.* Cambridge : Deighton, Bell and co.

MAZ'YA Vladimir et SHAPOSHNIKOVA Tatiana, 1998, *Jacques Hadamard : A Universal Mathematician.* History of Mathematics, Providence : American Mathematical Society.

MILLER G.H., 1970, «BLICHFELDT Hans Frederick». Dans GILLISPIE Charles Coulston (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. II, New York : American Council of Learned Societies, p. 197.

MINKOWSKI Hermann, 1885, «Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält». *Acta Mathematica*, vol. 7, p. 201–258.

MINKOWSKI Hermann, 1887a, «Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und uber die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 100, p. 449–458.

MINKOWSKI Hermann, 1887b, «Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers». *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, vol. 29, 2[e] série, p. 1–180.

MINKOWSKI Hermann, 1887c, «Zur Theorie der positiven quadratischen Formen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 101, p. 196–202.

MINKOWSKI Hermann, 1888, «Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit». *Sitzungsberichte der K. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, vol. 40, p. 1095–1110.

MINKOWSKI Hermann, 1891a, «Théorème arithmétiques». *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 112, p. 209–212. Extrait d'une lettre de Minkowski à Hermite.

MINKOWSKI Hermann, 1891b, «Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 107, p. 278–297.

MINKOWSKI Hermann, 1891c, «Ueber Geometrie der Zahlen». *Verhandlungen der 64. Naturforscher- und Ärzteversammlung zu Halle*, p. 13. Reproduit dans *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol.1, 1892, p. 64-65 et dans MINKOWSKI 1911, p. 264-265.

MINKOWSKI Hermann, 1893, «Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite». *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 17, 2[e] série, p. 24–29.

MINKOWSKI Hermann, 1896a, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig : Teubner.

MINKOWSKI Hermann, 1896b, «Généralisation de la théorie des fractions continues». *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 13, 3[e] série, p. 41–60.

MINKOWSKI Hermann, 1896c, «Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace». *Nouvelles Annales de mathématiques*, vol. 15, 3[e] série, p. 393–403. Traduction de L. Laugel de la conférence faite à l'occasion de l'exposition de Chicago en 1893.

MINKOWSKI Hermann, 1899, «Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen». *Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 64–88.

Minkowski Hermann, 1900, «Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern». *Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 90–93.

Minkowski Hermann, 1901a, «Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide des nombres rationnels». *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 25, p. 72–76.

Minkowski Hermann, 1901b, «Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen». *Mathematische Annalen*, vol. 54, p. 91–124.

Minkowski Hermann, 1902, «Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen». *Acta Mathematica*, vol. 26, p. 333–351.

Minkowski Hermann, 1904a, «Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper». *Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 311–355.

Minkowski Hermann, 1904b, «Zur Geometrie der Zahlen». *Verhandlungen des III-Internationalen Mathematiker-Kongresses,* Heidelberg, p. 164–173. Reproduit avec les illustrations utilisées par Minkowski dans Minkowski 1911, p.43-52.

Minkowski Hermann, 1905, «Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 129, p. 220–274.

Minkowski Hermann, 1906, «Kapillarität». Dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. V 1, Heft 4, Leipzig-Berlin : Teubner, p. 558–613. Reproduit dans Minkowski 1911, p.298-351.

Minkowski Hermann, 1907, *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie*. Leipzig : Teubner.

Minkowski Hermann, 1908, «Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern». *Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 53–111. Reproduit dans Minkowski 1911, p.352-404.

Minkowski Hermann, 1909a, «Espace et temps». *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, vol. 26, 3[e] série, p. 499–517. Traduction de A. Hennequin et J. Marty de « Raum und Zeit ».

Minkowski Hermann, 1909b, «Raum und Zeit». *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 18, p. 75–88. Voir aussi *Physikalische Zeitschrift*, vol. 10 (1909), p.104-111. Reproduit dans Minkowski 1911, p.431-444.

MINKOWSKI Hermann, 1910, *Geometrie der Zahlen.* Leipzig - Berlin : B. G. Teubner. 2e édition.

MINKOWSKI Hermann, 1911, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. I et II. Leipzig : Teubner. Edité par David Hilbert avec la collaboration de Andreas Speiser et Hermann Weyl.

MINKOWSKI Hermann, 1915, «Das Relativitätsprinzip». *Annalen der Physik*, vol. 47, p. 927–938. Publié à titre posthume par Arnold Sommerfeld.

MINKOWSKI Hermann, 1953, *Geometrie der Zahlen.* New York : Chelsea Publishing Company. 3e édition.

MINKOWSKI Hermann, 1957, *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie.* New York : Chelsea Publishing Company. 2e édition.

MOLK Jules (ed.), 1911-1915, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.* tome III - Géométrie, Gabay. Edition de 1991.

MORDELL Louis Joel, 1914, «The Diophantine Equation $y^2 - k = x^3$». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 13, 2e série, p. 60–80.

MORDELL Louis Joel, 1917, «On Mr. Ramanujan's Empirical Expansion of Modular Functions». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19, p. 117–124.

MORDELL Louis Joel, 1922, «On the Rational Solutions of the Indeterminate Equations of the 3rd and 4th Degrees». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 21, p. 179–192.

MORDELL Louis Joel, 1923, «An Introductory Account of the Arithmetic Theory of Algebraic Numbers and its Recent Developments». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 29, p. 445–463.

MORDELL Louis Joel, 1928a, «Minkowski's Theorem on the Product of Two Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 3, p. 19–22.

MORDELL Louis Joel, 1928b, «The Present State of Some Problems in the Theory of Numbers». *Nature*, vol. 121, p. 138–140.

MORDELL Louis Joel, 1928c, «Some Applications of Fourier Series in the Analytic Theory of Numbers». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 24, p. 585–596.

MORDELL Louis Joel, 1929a, «Poisson's Summation Formula and the Riemann Zeta-Function». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 4, p. 285–291.

Mordell Louis Joel, 1929b, «Poisson's Summation Formula in Several Variables and Some Applications to the Theory of Numbers». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 25, p. 412–420.

Mordell Louis Joel, 1930a, «The Lattice Points in a Parallelogram». *Mathematische Annalen*, vol. 103, p. 38–47.

Mordell Louis Joel, 1930b, «Note on Some Linear Diophantine Inequalities». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 26, p. 489–490.

Mordell Louis Joel, 1930c, «The Zeta Functions Arising from Quadratic Forms, and their Functional Equations». *Quaterly Journal of Mathematics*, vol. 1, p. 77–101.

Mordell Louis Joel, 1933, «Minkowski's Theorem on Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 8, p. 179–182.

Mordell Louis Joel, 1935, «On Some Arithmetical Results in the Geometry of Numbers». *Compositio Mathematica*, vol. 1, p. 248–253.

Mordell Louis Joel, 1936, «Minkowski's Theorems and Hypotheses on Linear Forms». Dans *Comptes rendus du congrès international des mathématiciens*, vol. I, Oslo, p. 226–238.

Mordell Louis Joel, 1937a, «An Arithmetical Theorem on Linear Forms». *Acta Arithmetica*, vol. 2, p. 173–176.

Mordell Louis Joel, 1937b, «Homogeneous Linear Forms in Algebraic Fields». *Quaterly Journal of Mathematics*, vol. 8, p. 54–57.

Mordell Louis Joel, 1937c, «Note on an Arithmetical Problem on Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 12, p. 34–36.

Mordell Louis Joel, 1938, «On the Product of Two Linear Homogeneous Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 13, p. 186–187.

Mordell Louis Joel, 1940a, «Reviews of Three Books on Elementary Number Theory (Dickson, Uspensky and Heaslett, and Wright)». *The Mathematical Gazette*, vol. 24, p. 295–298.

Mordell Louis Joel, 1940b, «Tschebotareff's Theorem on the Product of Non-Homogeneous Linear Forms». *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 85, p. 47–50.

Mordell Louis Joel, 1941a, «Lattice Points in the Region $|Ax^4 + By^4| \leq 1$». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 152–156.

MORDELL Louis Joel, 1941b, «On the Minimum of a Binary Cubic Form». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 83–85.

MORDELL Louis Joel, 1941c, «On the Product of Two Non-Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 86–88.

MORDELL Louis Joel, 1941d, «The Product of Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 4–12.

MORDELL Louis Joel, 1942, «The Product of Three Homogeneous Linear Ternary Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 17, p. 107–115.

MORDELL Louis Joel, 1943a, «The Minimum of a Binary Cubic Form (I)». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 18, p. 201–210.

MORDELL Louis Joel, 1943b, «The Minimum of a Binary Cubic Form (II)». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 18, p. 210–217.

MORDELL Louis Joel, 1943c, «The Product of n Homogeneous Forms». *Recueil mathématique, Moscow*, vol. 12, p. 273–276.

MORDELL Louis Joel, 1943d, «The Product of Two Non-Homogeneous Linear Forms (III)». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 18, p. 218–221.

MORDELL Louis Joel, 1944a, «Lattice Points in the Region $|x^3 + y^3| \leq 1$». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 19, p. 92–99.

MORDELL Louis Joel, 1944b, «Observation on the Minimum of a Positive Quadratic Form in Eight Variables». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 19, p. 3–6.

MORDELL Louis Joel, 1945a, «On Numbers Represented by Binary Cubic Forms». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 48, 2^{e} série, p. 198–228.

MORDELL Louis Joel, 1945b, «On the Geometry of Numbers in some non-convex Regions». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 48, p. 339–390.

MORDELL Louis Joel, 1946a, «Geometry of Numbers». Dans *Comptes Rendus du Premier Congrès Canadien de Mathématiques*, Montréal 1945 : University of Toronto Press, p. 265–284.

MORDELL Louis Joel, 1946b, «Thought on Number Theory». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 21, p. 58–74.

MORDELL Louis Joel, 1949, «The Minimum of a Binary Cubic Form». *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 13, p. 69–76.

MORDELL Louis Joel, 1959, *Reflections of a Mathematician*. Cambridge University Press. (Discours prononcé en janvier 1955 à Toronto devant la Société Royale du Canada à l'occasion du Canadian Mathematical Congress).

MORDELL Louis Joel, 1961, «Review of *An Introduction to the Geometry of Numbers* by J. W. S. Cassels». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 67, p. 89–94.

MORDELL Louis Joel, 1971a, «Harold Davenport (1907-1969)». *Acta Arithmetica*, vol. 18, p. 1–4.

MORDELL Louis Joel, 1971b, «Reminiscences of an Octogenarian Mathematician». *The American Mathematical Monthly*, vol. 78, p. 952–961.

MORDELL Louis Joel, 1971c, «Review of *Geometry of Numbers* by C. G. Lekkerkerker». *Bulletin Canadien de Mathématiques*, vol. 14, p. 611–613.

MORDELL Louis Joel, 1971d, «Some Aspects of Davenport's Work». *Acta Arithmetica*, vol. 18, p. 5–11.

MORDELL Louis Joel, 1972, «Note on the Product of n Inhomogeneous Linear Forms». *Journal of Number Theory*, vol. 4, p. 405–407.

MORDELL Louis Joel, (St John's). St John's College Library, *Papers of Louis Joel Mordell*. The documents from these archives are quoted and reproduced by permission of the Master and Fellows of St John's College, Cambridge.

MORRELL Jack B., 1972, «The Chemist Breeders : The Research Schools of Liebig and Thomson». *Ambix*, vol. 19, p. 1–46.

NABONNAND Philippe, 2008, «L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles». Dans FLAMENT Dominique et NABONNAND Philippe (eds), *La justification en mathématiques*, Paris : Maison des sciences de l'homme. Preprint.

NETZ Reviel, 1999, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics : A Study in Cognitive History*. Cambridge-New York : Cambridge University Press.

NEUKIRCH Jürgen, 1999, *Algebraic Number Theory*. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag. Traduction par Norbert Schappacher de *Algebraische Zahlentheorie*, Berlin-New York : Springer-Verlag, 1992.

OLDS C.D., LAX Anneli et DAVIDOFF Giuliana, 2000, *The Geometry of Numbers*, vol. 41. Washington : The Mathematical Association of America.

OLESKO Kathryn M., 1991, *Physics as a Calling. Discipline and Practice in the Konigsberg Seminar for Physics*. Ithaca-New York-London : Cornell University Press.

OPOLKA Hans et SCHARLAU Winfried, 1985, *From Fermat to Minkowski. Lectures on the Theory of Numbers and its Historical Development*. New York-Berlin-London : Springer-Verlag.

OZHIGOVA E. P., 2001, «Problems of Number Theory». Dans KOLMOGOROV A.N. et YUSHKEVICH A.P. (eds), *Mathematics of the 19th Century - Mathematical Logic, Algebra, Number theory, Probability Theory*, vol. 1, chapitre III, Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, 2e édition, p. 137–209.

PARSHALL Karen H., 2004, «Defining a Mathematical Research School : the Case of Algebra at the University of Chicago». *Historia Mathematica*, vol. 31, p. 263–278.

PARSHALL Karen Hunger et ROWE David, 1994, *The Emergence of the American Research Community, 1876-1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, History of mathematics, vol. 8. Providence RI ; London : American Mathematical Society - London Mathematical Society.

PATTERSON Samuel James, 2007, «Gauss Sums». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, chapitre VIII.2, Berlin : Springer, p. 505–528.

POHST Michael E., 1993, *Computational Algebraic Number Theory*. Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser verlag.

POINCARÉ Henri, 1893, «Au Jubilé Hermite». Dans *Jubilé de M. Charles Hermite*, Paris : Gauthier-Villars, p. 6–8.

PYENSON Lewis, 1977, «Hermann Minkowski and Einstein's Special Theory of Relativity». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 17, p. 71–95.

RÜDENBERG Lily et ZASSENHAUS Hans, 1973, *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag.

REID Constance, 1970, *Hilbert*. New York : Springer-Verlag. [Edition de 1996].

REID Constance, 1993, *The Search for E.T. Bell also known as John Taine*. Washington : The Mathematical Association of America.

REMAK Robert, 1913, «Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes». *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 142, p. 278–282.

REMAK Robert, 1923a, «Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 17, p. 1–34.

REMAK Robert, 1923b, «Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 18, p. 173–200.

REMAK Robert, 1927, «Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie des Zahlen». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, p. 694–699.

REVEL Jacques (ed.), 1996a, *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience.* Paris : Seuil/Gallimard.

REVEL Jacques, 1996b, «Micro-analyse et construction du social». Dans REVEL 1996a, p. 15–36.

RITTER Jim, 2004, «Reading Strasbourg 368 : A Thrice-Told Tale». Dans CHEMLA Karine (ed.), *History of Science, History of Text*, Dordrecht : Springer, p. 177–200.

ROGERS C.A., BIRCH B.J., BURGESS D.A. et HALBERSTAM H., 1971, «Harold Davenport». *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, vol. 17, p. 159–192.

ROGERS Claude Ambrose, 1871, «A brief survey of the work of Harold Davenport». *Acta Arithmetica*, vol. 18, p. 13–17.

ROQUETTE Peter, 2004, «The Riemann Hypothesis in Characteristic p, its Origin and Development. Part 2. The First Steps by Davenport and Hasse». *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, vol. 23, p. 5–74.

ROWE David E., 1989, «Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition». *Osiris*, vol. 5, p. 186–213.

ROWE David E., 1994, «The Philosophical Views of Klein and Hilbert». Dans CHIKARA Sasaki, MITSUO Sugiura et DAUBEN Joseph W. (eds), *The Intersection of History and Mathematics*, Science Networks - Historical Studies, vol. 15, Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, p. 187–202.

ROYDEN Halsey, 1989, «The History of the Mathematics Department at Stanford». Dans DUREN Peter (ed.), *A Century of Mathematics in America - Part II*, Providence : American Mathematical Society, p. 237–281.

SAMUEL Pierre, 2003, *Théorie algébrique des nombres.* Hermann, réimpression de la 2^{e} édition. 1ère édition 1967.

SCHAPPACHER Norbert, 1987, «Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929 - 1950». Dans BECKER Heinrich, DAHMS Hans-Joachim et WEGELER Cornelia (eds), *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus*, München : K.G. Saur, p. 345–373.

SCHAPPACHER Norbert, 1990, «Développement de la loi de groupe sur une cubique». Dans GOLDSTEIN Catherine (ed.), *Séminaire de théorie des nombres Paris 1988/89*, *Progress in Mathematics*, vol. 91, Boston-Basel-Berlin : Birkhäuser, p. 159–184.

SCHAPPACHER Norbert, 2005, «David Hilbert, Report on Algebraic Number Fields ('Zahlbericht') (1897)». Dans GRATTAN-GUINNESS Ivor (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, chapitre 54, Amsterdam, Boston etc : Elsevier, p. 700–709.

SCHWERMER Joachim, 1991, «Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen». *Jahresbericht der Deutchen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 93, p. 49–105.

SCHWERMER Joachim, 2007, «Theory of Quadratic Forms : Towards Räumliche Anschauung in Minkowski's Early Work». Dans GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (eds), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, p. 483–504.

SEALE Roy Quincy, 1935, «A New Proof of Minkowski's Theorem of the Product of Two Linear Forms». *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 41, p. 419–426.

SENECHAL Marjorie, 1992, «Introduction to Lattice Geometry». Dans WALDSCHMIDT Michel, MOUSSA Pierre, LUCK Jean-Marc et ITZYKSON Claude (eds), *From Number Theory to Physics*, chapitre 10, Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, p. 476–495.

SERRE Jean-Pierre, 1993, «Smith, Minkowski et l'Académie des sciences». Avec des notes de Norbert Schappacher. *Gazette des mathématiciens*, vol. 56, p. 3–9.

SERVOS John W., 1993, «Research Schools and their Histories». *Osiris*, vol. 8, p. 3–15.

SIEGEL Carl Ludwig, 1922, «Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen». *Mathematische Annalen*, vol. 87, p. 36–38.

SIEGEL Carl Ludwig, 1989, *Lectures on the Geometry of Numbers*. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag. Cours donnés à l'université de New York en 1945-1946, notes de B. Friedman réécrites par K. Chandrasekharan avec l'aide de R. Suter.

SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard, 1998, *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, vol. 10. Wiesbaden : Vieweg.

SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard, 2001, *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, Science Networks, Historical Studies, vol. 25. Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag.

SMITH Henry John Stephen, 1861, «On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 151, p. 293–326. Reproduit dans SMITH 1894, p.367-409.

SMITH Henry John Stephen, 1867, «On the Orders and Genera of Quadratic Forms Containing more than Three Indeterminates». *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 16, p. 197–208.

SMITH Henry John Stephen, 1887, «Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés». *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, vol. 29, 2e série, p. 1–72.

SMITH Henry John Stephen, 1894, *Collected Mathematical Papers*, vol. I. Oxford : Clarendon Press.

SOULÉ Christophe, 2005, «La géométrie des nombres». Dans KOUNEIHER Joseph, FLAMENT Dominique, NABONNAND Philippe et SZCZECINIARZ Jean-Jacques (eds), *Géométrie au XXe siècle. Histoire et horizons*, Paris : Hermann, p. 45–51.

STRASSER Bruno J., 2002, «Totems de laboratoires, microscopes électroniques et réseaux scientifiques : L'émergence de la biologie moléculaire à Genève (1945-1960)». *Revue d'histoire des sciences*, vol. 55, p. 5–43.

STROBL Walter, 1985, «Aus den wissenschaftlichen Anfängen Hermann Minkowskis». *Historia Mathematica*, vol. 12, p. 142–156.

SWINNERTON-DYER Peter, 1943, «A Solution of $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 18, p. 2–4.

TANNERY Jules, 1908, «Compte Rendu de *Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie* de H. Minkowski». *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 32, 2e série, p. 313–316.

TAUVEL Patrice, 2000, *Cours de géométrie*. Paris : Dunod.

TOEPELL Michael, 2005, «David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, first edition (1899)». Dans GRATTAN-GUINNESS Ivor (ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, chapitre 55, Elvesier, p. 711–723.

WAGNER-DÖBLER Roland et BERG Jan, 1996, «Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of its Literature : A Quantitative Approach». *Historia Mathematica*, vol. 23, p. 288–318.

WALTER Scott, 1996, *Hermann Minkowski et la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte 1905-1915*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

WALTER Scott, 1999a, «Minkowski, Mathematicians, and the Mathematical Theory of Relativity». Dans GOENNER H., RENN J., RITTER J. et SAUER T. (eds), *The Expanding Worlds of General Relativity*, Boston-Basel : Birkhäuser, p. 45–86.

WALTER Scott, 1999b, «The Non-Euclidean Style of Minkowskian Relativity». Dans GRAY Jeremy (ed.), *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890-1930*, New York : Oxford University Press, p. 91–127.

WARWICK Andrew, 2003, *Masters of Theory. Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*. Chicago-London : The University of Chicago Press.

WEIL André, 1974, «Two Lectures on Number Theory, Past and Present». voir WEIL 1979, Vol.III, p. 279–302.

WEIL André, 1979, *Oeuvres Scientifiques 1964-1978*. En 3 volumes, New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag.

WEIL André, 1991, *Souvenirs d'apprentissage*. Bâle-Boston : Birkhäuser.

WEYL Hermann, 1942, «On Geometry of Numbers». *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 47, p. 268–289.

WOODWARD William R., 1991, «World Views and Scientific Discipline Formation : How East German Science Studies Contributed to the Fall of the Cultural Wall». Dans WOODWARD William R. et COHEN Robert S. (eds), *World Views and Scientific Discipline Formation*, Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, p. 1–15.

ZASSENHAUS Hans, 1975, «On the Minkowski-Hilbert Dialogue on Mathematization». *Bulletin Canadien de Mathématiques*, vol. 18, p. 443–461.

ZILINSKAS G., 1941, «On the Product of Four Homogeneous Linear Forms». *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 16, p. 27–37.