Corrigé examen "Stat. inf 4" : 19 oct 2019

Exercice 1

1) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x)\,dx = \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\int_{-1}^{0} x\,dx + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right)\int_0^1 x\,dx$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right) \left.\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right) \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4} + \theta + \frac{1}{4} + \theta = 2\theta$$

2) On considère l'équation en θ :

$\bar{x}_n = \mathbb{E}[X] \Rightarrow \bar{x}_n = 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\bar{x}_n}{2}$

Donc on obtient l'estimateur : $\boxed{\hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{2}}$

3) Par LFGN : $\bar{X}_n \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}[X]$. Alors $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P.S} \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ fortement conv.

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n$ sans biais.

4) $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\theta(x)\,dx = \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right)\int_0^1 x^2\,dx$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right)\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}+2\theta\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{3} - 4\theta^2$

5) $\mathrm{Var}[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{3} - 4\theta^2\right)$

6) $p = \mathbb{P}[-1 < X \leq 0] = \int_{-1}^{0} f_\theta(x)\,dx = \frac{1}{2} - 2\theta$

7) $Y \sim \mathrm{Ber}(p)$

8) $\mathrm{Var}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4n}p(1-p)$

$$= \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{2} - 2\theta\right)\left(2\theta + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{4} - 4\theta^2\right)$$

$\mathbb{E}[\tilde{\theta}_n] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4} - \frac{p}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \theta = \theta$ ②

$\Rightarrow \tilde{\theta}_n$ sans biais.

9) $Var(\hat{\theta}_n) > Var(\tilde{\theta}_n) \Rightarrow \tilde{\theta}_n$ plus efficace que $\hat{\theta}_n$.

Exercice 2

X : le poids d'un pot de confiture : $\sim N(m, \sigma^2)$

1) L'intervalle de confiance pour la moyenne d'une loi Normale de variance inconnue est :

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \, ; \, \bar{X}_n + \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

avec $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $n-1 = 15$ degrés de liberté.

Dans notre cas : $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 2,131$

Donc, l'interval de conf est : $\bar{x}_n = 401$, $s_n^{*2} = 16$

$$\left[401 - \frac{4}{4} \cdot 2,131 \, ; \, 401 + \frac{4}{4} \cdot 2,131\right] =$$

$$= [401 - 2,131 \, ; \, 401 + 2,131] = [398,869 \quad 403,131]$$

2) On peut commercialiser si $m \geq 405$

$H_0 : m \geq 405 \qquad H_1 : m < 405$

Test sur la moyene d'une loi Normale de variance inconnue :

Stat de test : $Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - 405}{S_n^*} \underset{H_0}{\sim} t(15)$

Zone de rejet : $R = \{Z < u_\alpha\} = \{Z < -1,753\}$

u_α fractile $t(15)$

$z = \sqrt{16}\,\frac{401 - 405}{4} = -4 \in R \Rightarrow H_0$ rejetée

On ne peut pas commercialiser les pots.

Exercice 3

X: situation d'un diplômé, avec les valeurs :

v_1 : emploi, v_2 : autre master v_3 = thèse

$p^0 = (0{,}50 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25)$

La loi de X est donnée par $p = \left(\mathbb{P}(X=v_1), \mathbb{P}[X=v_2], \mathbb{P}[X=v_3]\right)$
$= (p_1, p_2, p_3)$

La situation est la même si $p = p^0$. Donc, on teste :

$H_0 : p = p^0 \qquad H_1 : p \neq p^0$

Test de χ^2 d'ajustement, avec $k = 3$.

$f_1 = \frac{n_1}{n} \qquad f_2 = \frac{n_2}{n} \qquad f_3 = \frac{n_3}{n}$

$\hat{p} = (f_1, f_2, f_3)$

Statistique de test $Z = n \cdot D(\hat{p}, p^0) \xrightarrow[H_0]{\mathcal{L}} \chi^2(2)$

Zone de rejet $R = \{z > u_{1-\alpha}\} = \{z > 5{,}99\}$

$\uparrow$ fractile $\chi^2(2)$

$$D(\hat{p}, p^0) = \sum_{k=1}^{3} \frac{(f_k - p_k^0)^2}{p_k^0}$$

Réalisation sur nos données : $z = 100 \cdot 0{,}04 = 4 \notin R$

H_0 acceptée $\Rightarrow$ la situation est la même pour les deux années.