

**Examen du 19 Octobre 2016,**  
Documents admis. Calculatrice autorisée  
Appareil connectables interdits.  
Durée 1h30.

**Exercice 1.**

Soit une variable aléatoire continue réelle  $X$ , de densité:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

avec le paramètre  $\theta$  inconnu et  $\theta > 2$ .

On considère un n-échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  pour cette loi (variable).

- 1) Calculez l'espérance de la variable aléatoire  $X$ .
- 2) Trouvez un estimateur par la méthode des moments pour le paramètre  $\theta$ .
- 3) Etudiez la convergence de l'estimateur de  $\theta$  suivant:

$$\hat{\theta}_n = \frac{2\bar{X}_n - 1}{\bar{X}_n - 1}.$$

**Exercice 2.**

Soit la variable aléatoire  $X$  de loi Normale  $\mathcal{N}(m, 1)$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un n-échantillon pour cette variable aléatoire.

*Remarque: pour répondre aux questions de cet exercice, vous pouvez utiliser les résultats obtenus en classe ou les résultats donnés dans le polycopié distribué. La démonstration des résultats n'est pas demandée.*

- 1) Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $m$ . On note cet estimateur par  $T_n$ .
- 2) Quelle est la loi de  $T_n$ ?
- 3) L'estimateur  $T_n$  est-il convergent? Donnez la justification dans une phrase.
- 4) L'estimateur  $T_n$  est-il biaisé? Donnez la justification dans une phrase.

*Note: Pour les tests d'hypothèse des exercices 3. et 4., il faut écrire la variable aléatoire du phénomène étudié, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test et sa loi, la zone de rejet et la conclusion.*

**Exercice 3.**

On a mesuré la taille de 30 enfants de 10 ans. Pour ces données, on obtient que la moyenne est de 130 cm et l'écart-type est de 8 cm. En supposant que la taille d'un enfant de 10 ans est de loi normale, peut-on dire avec un risque de 0.05, que la taille d'un enfant de 10 ans est d'au moins 131 cm?

**Exercice 4.**

Pour une élection locale il y a trois candidats: C1, C2 et C3. Un sondage d'opinion de la semaine dernière, donne les intentions de vote suivantes (en ordre, en pourcentage): 45% pour C1, 25% pour C2 et 30% pour C3. Un nouveau sondage a été réalisé cette semaine sur 1000 personnes. Sur ces 1000 personnes, 475 ont l'intention de voter le candidat C1, 225 pour C2 et 300 pour C3. Avec un niveau de confiance de 0.95, peut-on affirmer que les intentions de vote ont évolué par rapport à la semaine dernière?