

Examen du 18 Octobre 2019,
Documents sur papier admis. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, appareils connectables interdits.
Durée 1h15. Sujet sur 2 pages.

Exercice 1.

Soit une variable aléatoire continue réelle X , de densité:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2\theta & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + 2\theta & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Le paramètre θ est inconnu et $\theta \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) pour cette loi (variable).

- 1) Calculez l'espérance de la variable aléatoire X .
- 2) Proposez un estimateur pour le paramètre θ par la méthode des moments. Notons cet estimateur par $\hat{\theta}_n$.
- 3) Etudiez la convergence et le biais de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
- 4) Calculez la variance de la variable aléatoire X .
- 5) Calculez la variance de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
- 6) Calculez la probabilité $p = \mathbb{P}[-1 < X \leq 0]$.
- 7) Soit la variable aléatoire $Y = \mathbb{1}_{-1 < X \leq 0}$ et le n -échantillon correspondant $Y_i = \mathbb{1}_{-1 < X_i \leq 0}$, pour $i = 1, \dots, n$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
- 8) On considère l'estimateur

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\bar{Y}_n$$

pour θ . Calculez l'espérance et la variance de l'estimateur $\tilde{\theta}_n$.

- 9) Lequel des deux estimateurs est plus efficace?

Note: Pour les Exercices 2 et 3, pour des tests d'hypothèse, il faut: écrire la variable aléatoire, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test, la zone de rejet et la conclusion.

Exercice 2.

On mesure les poids (en grammes) de 16 pots de confiture remplis par une machine. Les mesures sont notées par x_1, \dots, x_{16} , avec:

$$x_1 = 400, \quad x_2 = 395, \quad \dots, \quad x_{16} = 405$$

On sait que $\bar{x}_{16} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 401$ et $\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x}_{16})^2 = 16$.

On suppose que le poids d'un pot de confiture est une variable aléatoire de loi Normale.

- 1) Avec un niveau de confiance 0.95, dans quel intervalle se situe le poids moyen d'un pot de confiture?

2) On peut commercialiser les pots de confiture si leur poids est d'au moins de 405 g. Peut-on commercialiser les pots, avec un risque de 0.05?

Exercice 3.

On veut étudier la situation des diplômés d'un master. On sait concernant les diplômés de l'année dernière que 50% étaient en emploi, 25% suivaient un autre master et 25% étaient en thèse de doctorat.

Cette année, sur une promotion de 100 étudiants de ce master, 60 ont un emploi, 20 suivent un autre master et 20 font une thèse de doctorat.

Peut-on dire avec un niveau de confiance de 0.95 que la situation des diplômés est la même pour les deux années?