

Examen du 16 Octobre 2020,
Documents sur papier admis. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, appareils connectables interdits.
Durée 1h15. Sujet sur 2 pages.

Exercice 1.

Considérons une variable aléatoire réelle continue X de densité:

$$f_{\theta}(x) = \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta} \mathbb{1}_{x>0},$$

avec θ un paramètre inconnu, $\theta > 0$. Pour cette loi (variable aléatoire), on considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) .

- 1) Montrez que la densité f_{θ} est de type exponentiel.
- 2) Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\theta}_n$, pour le paramètre θ .
- 3) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$ et son n -échantillon associé (Y_1, \dots, Y_n) . On suppose connu le fait que la densité de la variable aléatoire Y est:

$$g(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} \mathbb{1}_{y>0}.$$

Calculez l'espérance de la variable aléatoire Y .

- 4) En utilisant les questions précédentes, étudiez le biais, l'efficacité et l'exhaustivité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
- 5) Etudiez la convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
- 6) Trouvez un estimateur pour θ par la méthode des moments.

Exercice 2.

On considère une machine qui fabrique des boulons qui doivent avoir une longueur de 5 cm. La machine est considérée en bon état si le taux de boulons d'une longueur égale à 5 cm dépassent (strictement) 90%. C'est pourquoi, pendant 4 jours on a compté chaque jour pour 100 boulons pris au hasard, le nombre de boulons de longueur différente de 5 cm. Voici les résultats pour chacun des 4 jours:

5, 7, 8, 15

Avec un niveau de confiance de 0.95, peut-on dire que la machine est en bon état?

Note: pour des tests d'hypothèse, il faut: écrire la variable aléatoire, sa loi, les hypothèses à tester, la statistique de test, la zone de rejet et la conclusion.

Exercice 3.

On veut trouver l'intervalle de confiance pour la durée de guérison d'une maladie, en suivant un certain traitement.

Seize patients ont suivi le traitement. Vous trouvez ci-dessous, le nombre de jours après lesquels chaque patient a été guéri:

25, 20, 20, 23, 20, 25, 26, 10, 17, 22, 23, 19, 25, 27, 25, 30

En supposant que la durée de guérison est une variable aléatoire de loi Normale, donnez l'intervalle de confiance pour la durée moyenne de guérison, avec un niveau de confiance de 0.95.

On sait que la moyenne arithmétique des 16 valeurs mesurées est:

$$\frac{1}{16}(25 + 20 + 23 + \dots + 25 + 30) = 22.3125$$

et

$$\frac{1}{15} \left((25 - 22.3125)^2 + (20 - 22.3125)^2 + \dots + (25 - 22.3125)^2 + (30 - 22.3125)^2 \right) = 22.09$$