

Développement en série entière de $x \mapsto (\text{Arcsin}x)^2$

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 2*, page 75

Exercice :

1. Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $J(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - t \cos x}$ pour $|t| < 1$.
3. En déduire le développement en série entière de $(\text{Arcsint})^2$.

1. On reconnaît dans I_n une intégrale de Wallis. On va utiliser la relation de récurrence

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

qui découle d'une simple intégration par parties. On a aisément $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

On en déduit que :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2p)!}{(2p)^2(2p-2)^2\dots 2^2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} I_1 = \boxed{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

2. Nous allons calculer l'intégrale considérée $J(t)$, en faisant le changement de variable $u = \tan \frac{x}{2}$.

On a $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $2du = (1+u^2)dx$, d'où

$$\begin{aligned} J(t) &= 2 \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2) \left(1 - t \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\right)} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{1-t + (1+t)u^2} = \frac{2}{1-t} \int_0^1 \frac{du}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} u\right)^2} \\ &= \frac{2}{1-t} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) \end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression. En notant $\theta = \text{Arccos}(t) \in]0, \pi[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right) &= \text{Arctan} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \text{Arctan} \left(\underbrace{\cotan \frac{\theta}{2}}_{\geq 0} \right) \\ &= \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \left(\text{car } \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\text{Arccost}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{Arcsint}}{2} \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-t \cos x} = \frac{\text{Arcsint}}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1-t^2}}}$$

3. Fixons $t \in]-1, 1[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|t \cos x| \leq |t|$, si bien que la série $\frac{1}{1-t \cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos^n x$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . Cela légitime l'interversion série-intégrale qui suit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-t \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos^n x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos^n x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n t^n$$

Notons pour $t \in]-1, 1[$, $f(t) = (\text{Arcsint})^2$.

On a

$$f'(t) = \frac{2 \text{Arcsint}}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} I_n t^n - \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}$$

Or, le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est connu. Il vaut

$$1 + \binom{-1}{2} (-t^2) + \frac{\binom{-1}{2} \binom{-3}{2} (-t^2)^2}{2} + \dots + \frac{\binom{-1}{2} \dots \binom{-(2p-1)}{2} (-t^2)^p}{p!} + \dots$$

ce qui donne, après simplification et en faisant apparaître des factorielles comme dans la première question,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} t^{2p} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} I_{2p} t^{2p}$$

Ainsi, il reste

$$f'(t) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} I_{2p+1} t^{2p+1}$$

Comme $f(0) = 0$, il vient par intégration

$$(\text{Arcsint})^2 = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{I_{2p+1}}{2p+2} t^{2p+2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+2)!} t^{2p+2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} t^{2p+2}}{(p+1)^2 \binom{2p+2}{p+1}}$$

ou encore

$$\boxed{(\text{Arcsint})^2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p-1}}{p^2 \binom{2p}{p}} t^{2p}}$$