

Développée d'une courbe et Enveloppe des normales

Monier, *Géométrie Tome 7*, page 240

Théorème :

La développée d'une courbe Γ du plan est exactement l'enveloppe des normales à Γ .

Rappelons qu'on appelle développée de la courbe Γ l'ensemble des centres de courbure C en M à Γ lorsque M décrit Γ . Ces centres de courbures sont définis par :

$$\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$$

où R est le rayon de courbure de Γ en M , tel que $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{1}{R}\overrightarrow{N}$.

On paramètre Γ par l'abscisse curviligne :

$$M : s \in I \mapsto M(s) = O + x(s)\overrightarrow{i} + y(s)\overrightarrow{j}$$

et notons $N(s)$ la normale à Γ en $M(s)$.

Une équation cartésienne de $N(s)$ est (avec des coordonnées notées X, Y , pour ne pas confondre avec les coordonnées x, y du point $M(s)$ de Γ) :

$$x'(s)(X - x(s)) + y'(s)(Y - y(s)) = 0$$

On sait qu'une représentation paramétrique de l'enveloppe de la famille de droites $(N(s))_{s \in I}$ en résolvant le système d'équations d'inconnues X, Y :

$$\begin{cases} x'(s)X + y'(s)Y = x'(s)x(s) + y'(s)y(s) \\ x''(s)X + y''(s)Y = x''(s)x(s) + y''(s)y(s) + x'^2(s) + y'^2(s) \end{cases}$$

On suppose que pour tout $s \in I$, $x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \neq 0$.

On déduit que

$$X = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}y', \quad Y = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}x'$$

Comme $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$ et $\overrightarrow{N} = (x'^2 + y'^2)^{-1/2}(-y'\overrightarrow{i} + x'\overrightarrow{j})$, on obtient, pour le point courant P de l'enveloppe :

$$\overrightarrow{OP} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \overrightarrow{OC}$$

et donc $P = C$. Finalement, l'enveloppe des normales à Γ est la développée de Γ .

Application : Déterminons la développée d'une parabole.

On considère la parabole Γ , d'équation cartésienne $y^2 = 2px$, ($p > 0$ fixé). Γ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur tangent en $M(t)$ à Γ est donc :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{t}{p}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$

On en déduit une équation cartésienne de la normale $N(t)$ en $M(t)$ à Γ :

$$\frac{t}{p}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + (y - t) = 0$$

ou encore :

$$\frac{t}{p}x + y = \frac{t^3}{2p^2} + t$$

On obtient une représentation paramétrique de l'enveloppe $\mathcal{C}$ de $(N(t))_{t \in \mathbb{R}}$ en résolvant le système d'inconnues (x, y) :

$$\begin{cases} \frac{t}{p}x + y = \frac{t^3}{2p^2} + t \\ \frac{1}{p}x = \frac{3t^2}{2p^2} + 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2}{2p} + p \\ y = -\frac{t^3}{p^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On peut préciser le tracé de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ , en déterminant $\Gamma \cap \mathcal{C}$.

Un point $C \left(x = \frac{3t^2}{2p} + p, y = -\frac{t^3}{p^2} \right)$ est sur Γ si et seulement si $y^2 = 2px$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{-t^3}{p^2} \right)^2 = 2p \left(\frac{3t^2}{2p} + p \right)$$

On a :

$$t^6 - 3p^4t^2 - 2p^6 = 0 \iff (t^2 + p^2)^2(t^2 - 2p^2) = 0$$

Donc $\Gamma \cap \mathcal{C}$ est formée de deux points symétriques par rapport à (Ox) , l'un d'eux correspondant à la valeur $t = p\sqrt{2}$ du paramètre t sur $\mathcal{C}$, a pour coordonnées :

$$x = 4p \quad , \quad y = -2p\sqrt{2}$$