Points de discontinuité d'une fonction réglée

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 215

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réglée, c'est-à-dire possédant en tout point une limite à droite et une limite à gauche. Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Nous noterons, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a)$ la limite de f à droite en a et $\psi(a)$ la limite à gauche de f en a.

Nous commençons par démontrer le résultat sur un intervalle compact I. Cela suffira car $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable de segments.

La fonction f est discontinue en a si $\varphi(a) \neq f(a)$ ou $\psi(a) \neq f(a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons

$$D_\varepsilon = \{x \in I \ , \ |\varphi(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ ou } |\psi(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

Pour tout $a \in I$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, a+\eta[, |f(x) - \varphi(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \forall x \in]a-\eta, a[, |f(x) - \psi(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Si on prend x et x' dans $]a, a+\eta[$, on a donc $|f(x) - f(x')| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3}$. On en déduit, en faisant tendre x' vers x par valeurs supérieures ou inférieures que, pour tout $x \in]a, a+\eta[$,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |psi(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

On peut faire exactement le même raisonnement sur $]a-\eta, a[$ et on trouve finalement, en posant $I_a =]a-\eta, a+\eta[$ que, pour tout $x \in I_a \backslash \{a\}$, on a

$$|\varphi(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |psi(x) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

On en déduit que a est le seul point de I_a qui peut appartenir à D_ε.

Pour tout $a \in I$, on peut trouver un tel intervalle I_a. Les intervalles ouverts I_a (pour a variant dans I) recouvrent manifestement I. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, I est recouvert par un nombre fini de tels intervalles. Soit $a_1, a_2, \ldots a_k$ tels que $I \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{a_i}$. D'après ce qui précède, D_ε contient au plus $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Il est donc fini. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{\frac{1}{n}}$ est fini. Or il est clair que l'ensemble des points de discontinuité de f sur I est égal à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{n}}$. On en déduit que cet ensemble est au plus dénombrable, car réunion d'une famille dénombrable d'ensembles finis.

Passons maintenant à l'ensemble de points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{D}$ cet ensemble et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[-n, n]$. Il en résulte de ce qui précède que chaque $\mathcal{D}_n$ est au plus dénombrable. On en déduit que $\mathcal{D}$, qui est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, est également au plus dénombrable, ce qui est le résultat que nous voulions démontrer.