Formule de Burnside et Applications Combinatoires

Neumann-Stay-Thompson, *Groups and Geometry*, page 100

Théorème : Soit X un ensemble fini et G un groupe fini agissant sur X. Pour tout $g \in G$, on pose

$$\mathrm{Fix}_X(g) = \{x \in X \ / \ g(x) = x\}$$

On note $\mathrm{Orb}_X(G)$ l'ensemble des G-orbites dans X.
Alors

$$\boxed{|\mathrm{Orb}_X(G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|}$$

Preuve : Supposons dans un premier temps que G agisse transitivement sur X. Posons

$$S = \{(x, g) \in X \times G \ / \ g(x) = x\}$$

D'une part, on a $|S| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$. D'autre part, on a $|S| = \sum_{x \in X} |G_x|$ où $G_x = \{g \in G \ / \ g(x) = x\}$ est le stabilisateur de x.

D'après le Théorème de Lagrange, comme X est un espace G-transitif, on a $|G_x| = \dfrac{|G|}{|X|}$

D'où $|S| = \sum_{x \in X} |G_x| = |X| \dfrac{|G|}{|X|} = |G|$. Ainsi $1 = |\mathrm{Orb}_X(G)| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$.

Supposons à présent que les G-orbites de X soient $X_1, \ldots, X_k$. Alors

$$\mathrm{Fix}_X(g) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Fix}_{X_i}(g) \quad \text{et} \quad |\mathrm{Fix}_X(g)| = \sum_{i=1}^{k} |\mathrm{Fix}_{X_i}(g)|$$

D'où $\dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{k} |\mathrm{Fix}_{X_i}(g)| = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_{X_i}(g)| = \sum_{i=1}^{k} 1 = k = |\mathrm{Orb}_X(G)|$

Application : *De combien de manières différentes peut-on colorier un cube avec les couleurs rouge, blanc et bleu ?*

Il y a 3 couleurs et 6 faces : a priori 3^6 manières de colorier le cube. Mais certains coloriages sont les mêmes lorsqu'ils sont dans la même orbite du groupe de rotation G du cube agissant sur X l'ensemble des 3^6 coloriages possibles.

On cherche donc le nombre d'orbites de G sur X. Pour utiliser Burnside, on doit savoir pour chaque rotation g du cube, combien de coloriage(s) elle laisse fixe(s).

Prenons par exemple π rotation autour d'un axe passant par les milieux de côtés opposés du cube. Cette rotation échange la face du haut avec la face est, la face du bas avec la face ouest, la face du nord avec la face sud. Ainsi, si le cube "tourné" veut être indistingable du cube initial, alors :

$$\text{Haut} = \text{Est} \quad , \quad \text{Bas} = \text{Ouest} \quad , \quad \text{Nord} = \text{Sud}$$

Il y a ainsi 3^3 coloriages de X qui sont fixés par une telle rotation. De même pour les autres types de rotations, on peut obtenir le tableau suivant :

Rotation	Nombre de rotations	Nombre de coloriages fixés par 1 rotation	Contribution à $\sum \lvert\mathrm{Fix}_X(g)\rvert$
Id	1	3^6	729
Axes par sommets diag. opposés, angles $\pm\frac{2\pi}{3}$	8	3^2	72
Axes par milieux des cotés opposés, angle π	6	3^3	162
Axes par centres des faces opposées, angle π	3	3^4	243
Axes par centres des faces opposées, angles $\pm\frac{\pi}{2}$	6	3^3	162
Total :	24		1368

Donc $|\mathrm{Orb}_X(G)| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)| = \dfrac{1368}{24} = 57$.

Il y a donc 57 possibilités de cubes coloriés en rouge, blanc et/ou bleu.