Inégalité de Carleman

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 197

Exercice : Montrer qu'il existe une constante universelle C telle que, pour toute série convergente à termes positifs $\sum a_n$, on ait l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Quelle est la plus petite valeur possible de C ?

• Dans un premier temps, il paraît naturel d'exploiter directement l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Malheureusement, la famille $u_{k,n}$ définie par $u_{k,n} = \dfrac{a_k}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ n'est pas en général sommable puisque si $a_k \neq 0$, $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} u_{k,n}$ diverge.

• Ecrivons plutôt

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \frac{\sqrt[n]{(1a_1)(2a_2)\dots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} ka_k$$

Nous allons user de l'identité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k}$; on peut écrire :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)}$$

• La famille $(v_{k,n})_{k,n\geq 1}$ définie par $v_{k,n} = \frac{ka_k}{n(n+1)}$ pour $1 \leq k \leq n$ et 0 sinon est sommable puisqu'elle est positive, que pour k fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=k}^{+\infty} v_{k,n} = ka_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ka_k \frac{1}{k} = a_k$$

et que la série de terme général a_k est convergente.

• La quantité $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ admet une limite en $+\infty$ puisque la formule de Stirling donne

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\infty}{\sim} n\frac{e}{n} = e$$

Par conséquent, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C$. Ainsi, si $N \geq 1$, $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leq C \sum_{k=1}^{n} v_{k,n}$ et

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} \leq \sum_{n=1}^{N} C \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \leq C \sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} v_{k,n} \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+infty} v_{k,n} = C \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

La série $\sum \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ étant à termes positifs, elle est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

• Recherchons maintenant la meilleure constante C. Nous allons prouver qu'en fait $\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$. Cette inégalité est équivalente à

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \qquad \text{ou encore à} \quad (n+1)\ln(n+1) - n \leq \sum_{k=1}^{n+1} \ln k$$

Or pour $2 \leq k \leq n+1$, on a $\ln k \geq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x dx$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ln k = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k \geq \int_{1}^{n+1} \ln x dx$$

et comme

$$\int_{1}^{n+1} \ln x dx = [x(\ln x - 1)]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (-1) = (n+1)\ln(n+1) - n$$

on a bien l'inégalité. La constante $C = e$ convient.

• C'est en fait la meilleure constante possible. Soit C une constante réalisant l'inégalité. Il y a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique lorsque tous les termes sont égaux : $1a_1 = 2a_2 = \ldots = na_n$. On aurait envie de choisir $a_k = \dfrac{1}{k}$ mais la série harmonique diverge. Aussi, fixons N un entier naturel non nul et posons $a_k = \frac{1}{k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $a_k = 0$ pour $k > N$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq C \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\infty}{\sim} C \ln N$$

tandis que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$ est le terme général d'une série divergente. Par conséquent, la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est équivalent à $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{e}{n} \underset{N\infty}{\sim} e \ln N$. Nécessairement, $e \leq C$.

Conclusion : pour toute série $\sum a_n$ à termes positifs, on a l'inégalité

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

et e est la meilleure constante réalisant cette inégalité.