Inégalité isopérimétrique

Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, page 103

> **Théorème :** Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de longueur L et enfermant une surface S. Alors
>
> $$L^2 \geq 4\pi S$$
>
> et $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si γ définit une cercle parcouru une fois.

Rappels : les hypothèses signifient que γ est une courbe continue fermée (*i.e.* $\gamma(a) = \gamma(b)$) sans point double (*i.e.* $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ et $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$ impliquent que $x_1 = a$ et $x_2 = b$.

La longueur L de γ est par définition

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

De plus, si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, la surface S est donnée par la formule de Stokes

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right) dt = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_a^b \gamma'(t)\overline{\gamma(t)} dt$$

Déjà, les deux membres de l'inégalité étant de même homogénéité (celle d'une surface), on peut supposer sans restriction que $L = 1$. On peut de plus paramétrer γ par la longueur d'arc s et on aura donc

$$\forall s \in [0, 1], |\gamma'(s)| = 1$$

Quitte à changer $\gamma(s)$ en $\gamma(1 - s)$, on peut aussi supposer que γ est orientée positivement. Puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on peut prolonger γ en une fonction 1-périodique continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc les coefficients de Fourier c_n sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \int_0^1 e^{-2i\pi ns} \gamma(s) ds$$

et on a donc également pour γ' les coefficients de Fourier :

$$c'_n = 2i\pi n c_n$$

Montrons que L et S s'expriment en fonction des c_n par les formules

$$L^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2 \qquad ; \qquad S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n |c_n|^2$$

En effet, la formule de Parseval donne

$$L^2 = 1 = L = \int_0^1 |\gamma'(s)| ds = \int_0^1 |\gamma'(s)|^2 ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2$$

D'autre part, γ étant orientée positivement, on obtient

$$\int_0^1 \gamma'(s)\overline{\gamma(s)} ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \overline{c_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2i\pi |c_n|^2$$

puis

$$S = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2i\pi |c_n|^2 \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n |c_n|^2$$

Cela étant, $L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - n)|c_n|^2$ = somme de nombres positifs = nombre positif. De plus, $n^2 - n > 0$ si $n \neq 0, 1$, donc $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si $c_n = 0$ pour $n \neq 0, 1$, donc si et seulement si

$$\forall s \in [0, 1], \quad \gamma(s) = c_0 + c_1 e^{2i\pi s}$$

Mais ceci est précisément l'équation du cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1|$, parcouru une fois dans le sens positif auquel on s'est ramené.

Interprétation géométrique : À périmètre donné (L fixé), c'est le cercle qui enferme la plus grande surface S ($S \leq \frac{L^2}{4\pi}$).