# La table de Kempner des nombres tangents-sécants et son $q$-analogue

Yoann Gelineau

Séminaire de Théorie des Nombres et Combinatoire

27 Octobre 2009

# Permutations alternantes

**Definition**

Une permutation $\sigma$ de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \ldots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \ldots$$

# Permutations alternantes

## Definition

Une permutation $\sigma$ de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \ldots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \ldots$$

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations alternantes d'ordre $n$, et

$$a_n = |\mathcal{A}_n|$$

# Permutations alternantes

## Definition

Une permutation $\sigma$ de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \ldots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \ldots$$

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations alternantes d'ordre $n$, et

$$a_n = |\mathcal{A}_n|$$

Les nombres $a_n$ sont appelés les **nombres tangents-sécants** à cause de leur fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \tan(x) + \sec(x)$$

# Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes $\sigma$ d'ordre $n$ telles que $\sigma(n) = k$.

# Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes $\sigma$ d'ordre $n$ telles que $\sigma(n) = k$.

$$a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$$

# Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes $\sigma$ d'ordre $n$ telles que $\sigma(n) = k$.

$$a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$$

On a bien entendu :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$$

# Premières relations

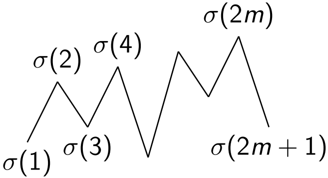
Premiers cas particuliers : pour $m \geq 1$,

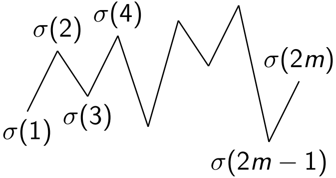
$$a_{2m+1,2m+1} = 0 \qquad\qquad a_{2m,1} = 0$$

# Premières relations

Premiers cas particuliers : pour $m \geq 1$,

$$a_{2m+1,2m+1} = 0 \qquad a_{2m,1} = 0$$



# Premières relations

## Proposition

*Si* $n$ *est pair, et* $1 \leq k \leq n$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=k}^{n} a_{n,i}$.

*Si* $n$ *est impair, et* $2 \leq k \leq n+1$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{n,i}$.

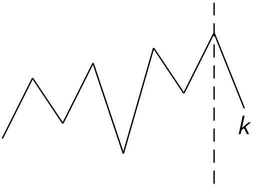
# Premières relations

## Proposition

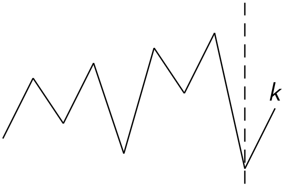
*Si $n$ est pair, et $1 \leq k \leq n$,* $a_{n+1,k} = \sum_{i=k}^{n} a_{n,i}$.

*Si $n$ est impair, et $2 \leq k \leq n+1$,* $a_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{n,i}$.

Si $n$ est pair :




Si $n$ est impair :



# Premières relations

## Proposition

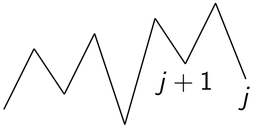
*Si* $n$ *est impair, et* $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
*Si* $n$ *est pair, et* $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

# Premières relations

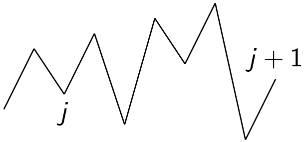
**Proposition**

*Si $n$ est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.*
*Si $n$ est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.*

Si $n$ est impair :




Si $n$ est pair :

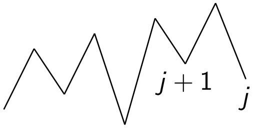


# Premières relations

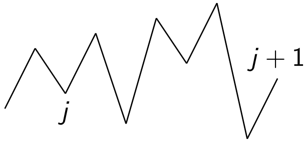
**Proposition**

*Si $n$ est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.*
*Si $n$ est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.*

Si $n$ est impair :




Si $n$ est pair :




En particulier :

$$a_{2m+1,2} = a_{2m+1,1}, \qquad a_{2m,2m-1} = a_{2m,2m}$$

# Table de Kempner

$$1$$

# Table de Kempner

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ \rightarrow & & 0 & \end{array}$$

# Table de Kempner

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ \rightarrow & & 0 & 1 \end{array}$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & 0 & & \leftarrow
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 0 & & \leftarrow
\end{array}$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & \leftarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \to & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\to & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & & & &
\end{array}$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & & &
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & &
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & \\
 & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
 & \rightarrow & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & \\
 & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & &
\end{array}
$$

# Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow & \\
\rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & & \\
 & & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & & \leftarrow
\end{array}
$$

# Table de Kempner

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | | | | | |
| | | | → | | 0 | 1 | | | | | |
| | | | | | 1 | 1 | 0 | | ← | | |
| | | → | | 0 | 1 | 2 | 2 | | | | |
| | | | | 5 | 5 | 4 | 2 | 0 | | ← | |
| | → | | 0 | 5 | 10 | 14 | 16 | 16 | | | |
| | | | 61 | 61 | 56 | 46 | 32 | 16 | 0 | | ← |
| → | | 0 | 61 | 122 | 178 | 224 | 256 | 272 | 272 | | |

# Autres relations

## Proposition

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}$$

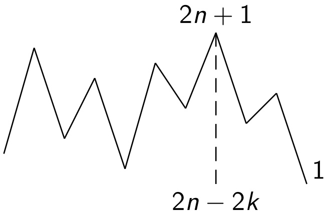
$$a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}$$

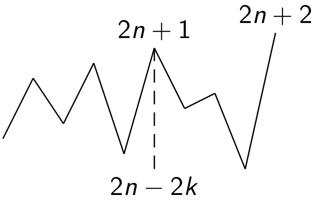
# Autres relations

## Proposition

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}$$

$$a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}$$



# Autres relations

## Proposition

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad (2 \leq k \leq 2n)$$

$$a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}, \quad (2 \leq k \leq 2n-1)$$

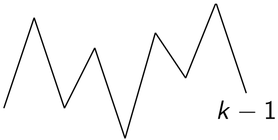
# Autres relations

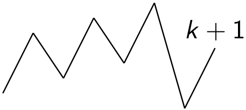
## Proposition

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad (2 \le k \le 2n)$$

$$a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}, \quad (2 \le k \le 2n-1)$$

$$a_{2n+1,k} = a_{2n+1,k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}, \qquad a_{2n,k} = a_{2n,k+1} - \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}$$



# $q$-analogues

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

# $q$-analogues

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

On peut alors définir $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q[n-2]_q \ldots [2]_q[1]_q$.

# $q$-analogues

On définit alors des $q$-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

# $q$-analogues

On définit alors des $q$-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

# $q$-analogues

On définit alors des $q$-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

Puis

$$\tan_q(z) = \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)}, \qquad \sec_q(z) = \frac{1}{\cos_q(z)}$$

# $q$-analogues

On note

$$\tan_q(z) + \sec_q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(q) \frac{z^n}{[n]_q!}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_n(q) = a_n$$

# $q$-analogues

On note

$$\tan_q(z) + \sec_q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(q) \frac{z^n}{[n]_q!}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_n(q) = a_n$$

Les premières valeurs sont :

$$\begin{aligned}
&a_1(q) = 1\\
&a_2(q) = 1\\
&a_3(q) = q + q^2\\
&a_4(q) = q + 2q^2 + q^3 + q^4\\
&a_5(q) = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 3q^6 + 2q^7 + q^8\\
&a_6(q) = q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 8q^5 + 10q^6 + 10q^7 + 8q^8 + 7q^9 + 5q^{10} + 2q^{11} + q^{12}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

**Définition**

*Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on dit que le couple $(i, j)$ est une* **inversion** *de la permutation $\sigma$ si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

*On note $inv(\sigma)$ le nombre d'inversions d'une permutation $\sigma$.*

**Exemple :**

$$\sigma = 4267315 \qquad \Longrightarrow \qquad inv(\sigma) = 11$$

### Définition

*Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on dit que le couple $(i, j)$ est une* **inversion** *de la permutation $\sigma$ si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

*On note $inv(\sigma)$ le nombre d'inversions d'une permutation $\sigma$.*

**Exemple :**

$$\sigma = 4267315 \qquad \Longrightarrow \qquad inv(\sigma) = 11$$

### Proposition

$$a_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} q^{inv(\sigma)}$$

# $q$-analogues

On pose :

$$a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

On pose :

$$a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

**Questions :**

Que deviennent les relations précédentes ?

Que devient la table de Kempner ?

## q-Table de Kempner

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1$ | | |
| | | $0$ | $1$ | | |
| | | $q^2$ | $q$ | $0$ | |
| | $0$ | $q^4$ | $q^2+q^3$ | $q+q^2$ | |
| | $q^5+2q^6+q^7+q^8$ | $q^4+2q^5+q^6+q^7$ | $q^3+2q^4+q^5$ | $q^2+q^3$ | $0$ |
| $0$ | $q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12}$ | $q^7+3q^8+3q^9+2q^{10}+q^{11}$ | $q^5+3q^6+4q^7+3q^8+2q^9+q^{10}$ | $q^3+2q^4+3q^5+4q^6+3q^7+2q^8+q^9$ | $q^2+2q^3+3q^4+4q^5+3q^6+2q^7+q^8$ |

# $q$-table de Kempner

## Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=1}^{2n} q^{2n} a_{2n,k}(q) = q^{2n} a_{2n}(q)$$

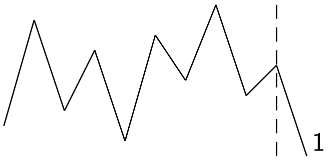
$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=1}^{2n+1} a_{2n+1,k}(q) = a_{2n+1}(q)$$

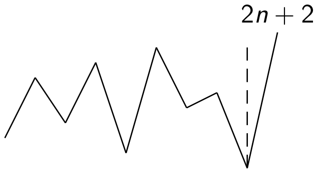
# $q$-table de Kempner

**Proposition**

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=1}^{2n} q^{2n} a_{2n,k}(q) = q^{2n} a_{2n}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=1}^{2n+1} a_{2n+1,k}(q) = a_{2n+1}(q)$$



# $q$-table de Kempner

Si $n$ est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si $n$ est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

# $q$-table de Kempner

Si $n$ est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si $n$ est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

**Proposition**

*Si $n$ est impair,* $a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q)$
*Si $n$ est pair,* $a_{n,j+1}(q) = \dfrac{1}{q}\ a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\ a_{n-1,j}(q)$

# $q$-table de Kempner

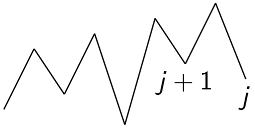
Si $n$ est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si $n$ est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

**Proposition**

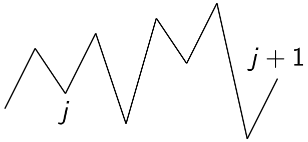
*Si $n$ est impair,* $a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q)$

*Si $n$ est pair,* $a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\ a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\ a_{n-1,j}(q)$

Si $n$ est impair :




Si $n$ est pair :



# $q$-table de Kempner

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}, \quad a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}.$$

## Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2k \end{bmatrix}_q q^{2n} a_{2k+1,1}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix}_q q^{2k+1} a_{2k+2,2k+2}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

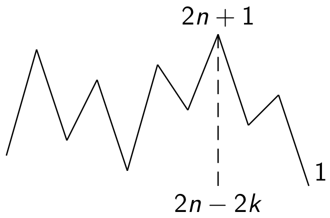
# $q$-table de Kempner

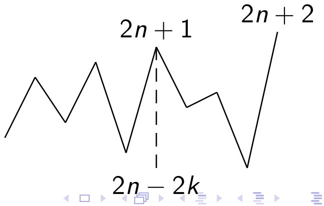
$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}, \quad a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}.$$

## Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2k \end{bmatrix}_q q^{2n} a_{2k+1,1}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix}_q q^{2k+1} a_{2k+2,2k+2}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$



# $q$-table de Kempner

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}$$

## Proposition

$$a_{2n+1,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{1-k+(n-i)(4n-2k+4)} \left[ \begin{array}{c} k-1 \\ 2n-2i \end{array} \right]_q a_{2i+1,1}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{n+i-k+2(n-i)^2} \left[ \begin{array}{c} 2n-k \\ 2n-2i \end{array} \right]_q a_{2i,2i}(q),$$

# $q$-table de Kempner

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}$$

## Proposition

$$a_{2n+1,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{1-k+(n-i)(4n-2k+4)} \begin{bmatrix} k-1 \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i+1,1}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{n+i-k+2(n-i)^2} \begin{bmatrix} 2n-k \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i,2i}(q),$$

$$a_{2n+1,k}(q) = \frac{1}{q} a_{2n+1,k-1}(q) - q^{4n-2k+2} \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = q a_{2n,k+1}(q) - q^{4n-2k-1} \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}(q)$$

# Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

# Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $w(\sigma)$ sa **forme**, c'est-à-dire le mot constitué des signes des différences $\sigma(i+1) - \sigma(i)$ pour $i = 1..n-1$.

# Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. On note $w(\sigma)$ sa **forme**, c'est-à-dire le mot constitué des signes des différences $\sigma(i+1) - \sigma(i)$ pour $i = 1..n-1$.

**Exemple :**

$$\sigma = 264153$$

$$w(\sigma) = + - - + -$$

**Table de Kempner pour les permutations de forme $w = --+-++$**

# Permutations à forme donnée

**Table de Kempner pour les permutations de forme** $w = --+-++$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & \leftarrow & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & & \leftarrow & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 3 & 6 & 8 & 9 & 9 & & \\
\rightarrow & & 0 & 0 & 3 & 9 & 17 & 26 & 35 &
\end{array}
$$

# Permutations à forme donnée

## $q$-Table de Kempner pour les permutations de forme $w = - - + - ++$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1$ | | | |
| | | $q$ | $0$ | | |
| | | $q^3$ | $0$ | $0$ | |
| | $0$ | $q^5$ | $q^4$ | $q^3$ | |
| | $q^7 + q^8 + q^9$ | $q^6 + q^7 + q^8$ | $q^5 + q^6$ | $q^4$ | $0$ |
| $0$ | $q^{11} + q^{12} + q^{13}$ | $q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + q^{12}$ | $q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + q^{11}$ | $q^5 + q^6 + 2q^7 + 2q^8 + 2q^9 + q^{10}$ | $q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + 2q^8 + q^9$ |

# Autres $q$-analogues

Les nombres tangents-sécants sont liés à d'autres statistiques :

# Autres $q$-analogues

Les nombres tangents-sécants sont liés à d'autres statistiques :

$$(-1)^n a_{2n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

où

$$\mathrm{exc}(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) > i \} \right|$$

$$\mathrm{fix}(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) = i \} \right|$$

# Autres $q$-analogues

Si on pose $\text{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i\ \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$,

$$(-1)^n a_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\text{exc}(\sigma)} q^{(\text{maj}-\text{exc})(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\text{fix}(\sigma)} (-1)^{\text{exc}(\sigma)} q^{(\text{maj}-\text{exc})(\sigma)}$$

# Autres $q$-analogues

Si on pose $\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i\ \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$,

$$(-1)^n a_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{maj}-\mathrm{exc})(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{maj}-\mathrm{exc})(\sigma)}$$

**Question :** peut-on généraliser aux $a_{n,k}(q)$ ?

Si on pose $\mathrm{cros}(\sigma)$ le nombre de croisements de $\sigma$,

# Autres $q$-analogues

Si on pose $\mathrm{cros}(\sigma)$ le nombre de croisements de $\sigma$,

$$(-1)^n b_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{cros})(\sigma)}$$

$$(-1)^n b_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{cros})(\sigma)}$$

on obtient d'autres $q$-analogues des nombres tangents-sécants.

# Autres $q$-analogues

Les $b_n(q)$ apparaissent eux, dans des fractions continues :

# Autres $q$-analogues

Les $b_n(q)$ apparaissent eux, dans des fractions continues :

$$\sum_{n\geq 0} b_{2n+1}(q)x^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]_q[2]_q x}{1-\cfrac{[2]_q[3]_q x}{1-\cfrac{[3]_q[4]_q x}{\ddots}}}}$$

$$\sum_{n\geq 0} b_{2n}(q)x^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]_q^2 x}{1-\cfrac{[2]_q^2 x}{1-\cfrac{[3]_q^2 x}{\ddots}}}}$$

# Nombres de Genocchi

Les **nombres de Genocchi** $(G_{2n})$ peuvent être définis par leur fonction génératrice :

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

# Nombres de Genocchi

Les **nombres de Genocchi** $(G_{2n})$ peuvent être définis par leur fonction génératrice :

$$\frac{2t}{e^t+1} = t + \sum_{n\geq 1}(-1)^n G_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

et sont reliés aux nombres tangents par la formule suivante :

$$G_{2n} = \frac{n}{2^{2n-2}} a_{2n-1}$$

**Interprétation combinatoire :**

**Interprétation combinatoire :**
$G_{2n}$ est le nombre de permutations $\sigma$ d'ordre $2n-2$ telles que

$$i > \sigma(i) \iff i \text{ est pair}$$

**Interprétation combinatoire :**
$G_{2n}$ est le nombre de permutations $\sigma$ d'ordre $2n-2$ telles que

$$i > \sigma(i) \iff i \text{ est pair}$$

$\Longrightarrow$ Ce sont des permutations alternantes.

**Table de Genocchi**

**Table de Genocchi**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | | | |
| 2 | 3 | 3 | | |
| 8 | 6 | 3 | | |
| 8 | 14 | 17 | 17 | |
| 56 | 48 | 34 | 17 | |
| 56 | 104 | 138 | 155 | 155 |
| 608 | 552 | 448 | 310 | 1555 |

**Table de Genocchi**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | | | |
| 2 | 3 | 3 | | |
| 8 | 6 | 3 | | |
| 8 | 14 | 17 | 17 | |
| 56 | 48 | 34 | 17 | |
| 56 | 104 | 138 | 155 | 155 |
| 608 | 552 | 448 | 310 | 1555 |

$\Longrightarrow$ $q$-analogues ?

# Fin

Merci de votre attention.