Les nombres d'Entringer, leurs interprétations et leurs q-analogues

Yoann Gelineau

Combinatoire Énumérative et Algébrique - LABRI

22 Janvier 2010

Permutations alternantes

Definition

Une permutation σ de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \dots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \dots$$

Permutations alternantes

Definition

Une permutation σ de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \ldots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \ldots$$

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations alternantes d'ordre n, et

$$a_n = |\mathcal{A}_n|$$

Permutations alternantes

Definition

Une permutation σ de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite **alternante** si :

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \sigma(5) \ldots < \sigma(2i) > \sigma(2i+1) < \ldots$$

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations alternantes d'ordre n, et

$$a_n = |\mathcal{A}_n|$$

Les nombres a_n sont appelés les **nombres tangents-sécants** à cause de leur fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \tan(x) + \sec(x)$$

Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes σ d'ordre n telles que $\sigma(n) = k$.

Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes σ d'ordre n telles que $\sigma(n) = k$.

$$a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$$

Ce sont les **nombres d'Entringer**.

Permutations alternantes

On note $\mathcal{A}_{n,k}$ l'ensemble des permutations alternantes σ d'ordre n telles que $\sigma(n) = k$.

$$a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}|$$

Ce sont les **nombres d'Entringer**.
On a bien entendu :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$$

Premières relations

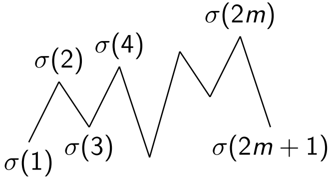
Premiers cas particuliers : pour $m \geq 1$,

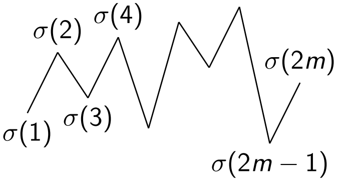
$$a_{2m+1,2m+1} = 0 \qquad\qquad a_{2m,1} = 0$$

Premières relations

Premiers cas particuliers : pour $m \geq 1$,

$$a_{2m+1,2m+1} = 0 \qquad\qquad a_{2m,1} = 0$$





Premières relations

Proposition

Si n est pair, et $1 \leq k \leq n$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=k}^{n} a_{n,i}$*.*

Si n est impair, et $2 \leq k \leq n+1$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{n,i}$*.*

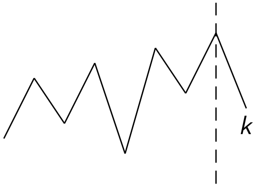
Premières relations

Proposition

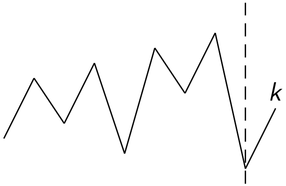
Si n est pair, et $1 \leq k \leq n$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=k}^{n} a_{n,i}$.

Si n est impair, et $2 \leq k \leq n+1$, $a_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{n,i}$.

Si n est pair :



Si n est impair :



Premières relations

Proposition

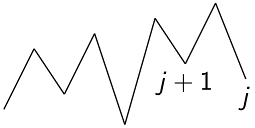
Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

Premières relations

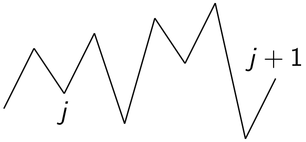
Proposition

Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

Si n est impair :



Si n est pair :

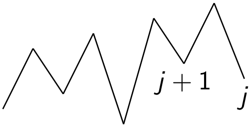


Premières relations

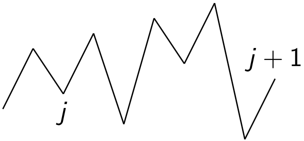
Proposition

Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

Si n est impair :



Si n est pair :



En particulier :

$$a_{2m+1,2} = a_{2m+1,1}, \qquad a_{2m,2m-1} = a_{2m,2m}$$

Table de Kempner

$$1$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ \rightarrow & & 0 & \end{array}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ \to & & 0 & 1 \end{array}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \leftarrow \end{array}$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 0 & & \leftarrow
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow
\end{array}$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & 2 & & & \\
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & 1 & & \\
 & \rightarrow & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & 2 & 2 & \\
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\
 & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & \leftarrow
\end{array}$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & \\
 & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & &
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow & \\
\rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & & \\
 & & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & & \leftarrow
\end{array}
$$

Table de Kempner

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & & \\
 & & \rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow & \\
 & \rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & & \\
 & & & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 61 & 122 & 178 & 224 & 256 & 272 & 272 & &
\end{array}
$$

Autres relations

Proposition

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}$$

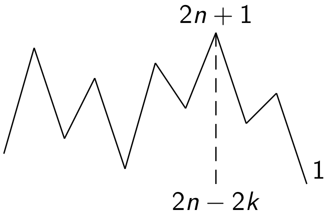
$$a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}$$

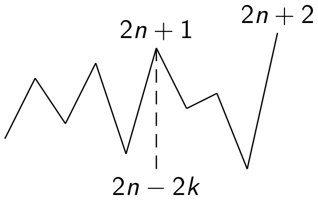
Autres relations

Proposition

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}$$

$$a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}$$





Autres relations

Proposition

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad (2 \leq k \leq 2n)$$

$$a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}, \quad (2 \leq k \leq 2n-1)$$

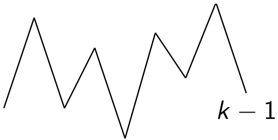
Autres relations

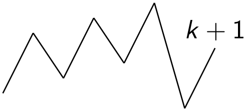
Proposition

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad (2 \le k \le 2n)$$

$$a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}, \quad (2 \le k \le 2n-1)$$

$$a_{2n+1,k} = a_{2n+1,k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}, \qquad a_{2n,k} = a_{2n,k+1} - \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}$$





q-analogues

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

q-analogues

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

q-analogues

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

On peut alors définir $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q[n-2]_q \ldots [2]_q[1]_q$.

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

q-analogues

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

Puis

$$\tan_q(z) = \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)}, \qquad \sec_q(z) = \frac{1}{\cos_q(z)}$$

q-analogues

On note

$$\tan_q(z) + \sec_q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(q) \frac{z^n}{[n]_q!}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_n(q) = a_n$$

q-analogues

On note

$$\tan_q(z) + \sec_q(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(q) \frac{z^n}{[n]_q!}$$

avec

$$\lim_{q\to 1} a_n(q) = a_n$$

Les premières valeurs sont :

$$\begin{aligned}
&a_1(q) = 1\\
&a_2(q) = 1\\
&a_3(q) = q + q^2\\
&a_4(q) = q + 2q^2 + q^3 + q^4\\
&a_5(q) = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 3q^6 + 2q^7 + q^8\\
&a_6(q) = q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 8q^5 + 10q^6 + 10q^7 + 8q^8 + 7q^9 + 5q^{10} + 2q^{11} + q^{12}\\
&\dots
\end{aligned}$$

Définition

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on dit que le couple (i, j) est une **inversion** *de la permutation σ si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $inv(\sigma)$ le nombre d'inversions d'une permutation σ.

Exemple :

$$\sigma = 4267315 \qquad \Longrightarrow \qquad inv(\sigma) = 11$$

q-analogues

Définition

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on dit que le couple (i, j) est une **inversion** *de la permutation σ si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $inv(\sigma)$ le nombre d'inversions d'une permutation σ.

Exemple :

$$\sigma = 4267315 \qquad \Longrightarrow \qquad inv(\sigma) = 11$$

Proposition

$$a_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} q^{inv(\sigma)}$$

q-analogues

On définit les q-**nombres d'Entringer** :

$$a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

q-analogues

On définit les q-**nombres d'Entringer** :

$$a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

avec

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

Questions :
Que deviennent les relations précédentes ?
Que devient la table de Kempner ?

q-table de Kempner

q-Table de Kempner

			1		
		0	1		
		q^2	q	0	
	0	q^4	q^2+q^3	$q+q^2$	
	$q^5+2q^6+q^7+q^8$	$q^4+2q^5+q^6+q^7$	$q^3+2q^4+q^5$	q^2+q^3	0
0	$q^9+2q^{10}+q^{11}+q^{12}$	$q^7+3q^8+3q^9+2q^{10}+q^{11}$	$q^5+3q^6+4q^7+3q^8+2q^9+q^{10}$	$q^3+2q^4+3q^5+4q^6+3q^7+2q^8+q^9$	$q^2+2q^3+3q^4+4q^5+3q^6+2q^7+q^8$

q-table de Kempner

Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=1}^{2n} q^{2n} a_{2n,k}(q) = q^{2n} a_{2n}(q)$$

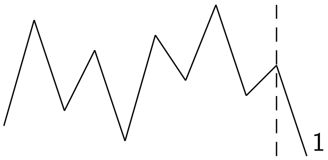
$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=1}^{2n+1} a_{2n+1,k}(q) = a_{2n+1}(q)$$

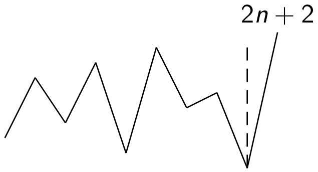
q-table de Kempner

Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=1}^{2n} q^{2n} a_{2n,k}(q) = q^{2n} a_{2n}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=1}^{2n+1} a_{2n+1,k}(q) = a_{2n+1}(q)$$





q-table de Kempner

Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

q-table de Kempner

Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

Proposition

Si n est impair, $a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q)$

Si n est pair, $a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\ a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\ a_{n-1,j}(q)$

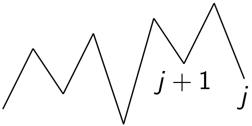
q-table de Kempner

Si n est impair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}$.
Si n est pair, et $1 \leq j \leq n-1$, $a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}$.

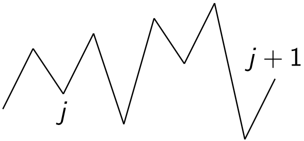
Proposition

Si n est impair, $a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q)$
Si n est pair, $a_{n,j+1}(q) = \dfrac{1}{q}\ a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\ a_{n-1,j}(q)$

Si n est impair :



Si n est pair :



q-table de Kempner

$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}, \quad a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}.$$

Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2k \end{bmatrix}_q q^{2n} a_{2k+1,1}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix}_q q^{2k+1} a_{2k+2,2k+2}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

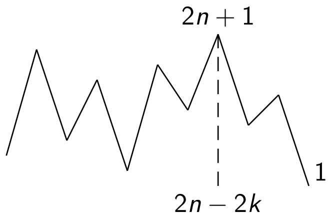
q-table de Kempner

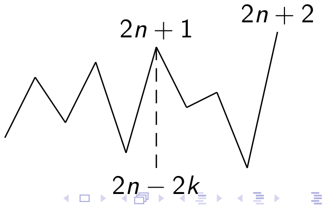
$$a_{2n+1,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} a_{2k+1,1} a_{2n-2k,2n-2k}, \quad a_{2n+2,2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} a_{2k+2,2k+2} a_{2n-2k,2n-2k}.$$

Proposition

$$a_{2n+1,1}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2k \end{bmatrix}_q q^{2n} a_{2k+1,1}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$

$$a_{2n+2,2n+2}(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{bmatrix}_q q^{2k+1} a_{2k+2,2k+2}(q) a_{2n-2k,2n-2k}(q)$$





q-table de Kempner

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}$$

Proposition

$$a_{2n+1,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{1-k+(n-i)(4n-2k+4)} \begin{bmatrix} k-1 \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i+1,1}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{n+i-k+2(n-i)^2} \begin{bmatrix} 2n-k \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i,2i}(q),$$

q-table de Kempner

$$a_{2n+1,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k-1}{2n-2i} a_{2i+1,1}, \quad a_{2n,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{2n-k}{2n-2i} a_{2i,2i}$$

Proposition

$$a_{2n+1,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{1-k+(n-i)(4n-2k+4)} \begin{bmatrix} k-1 \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i+1,1}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} q^{n+i-k+2(n-i)^2} \begin{bmatrix} 2n-k \\ 2n-2i \end{bmatrix}_q a_{2i,2i}(q),$$

$$a_{2n+1,k}(q) = \frac{1}{q} a_{2n+1,k-1}(q) - q^{4n-2k+2} \sum_{i=1}^{k-2} a_{2n-1,i}(q)$$

$$a_{2n,k}(q) = q a_{2n,k+1}(q) - q^{4n-2k-1} \sum_{i=k}^{2n-2} a_{2n-2,i}(q)$$

Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $w(\sigma)$ sa **forme**, c'est-à-dire le mot constitué des signes des différences $\sigma(i+1) - \sigma(i)$ pour $i = 1..n-1$.

Permutations à forme donnée

On peut étendre les résultats précédents à des permutations de forme quelconque.

Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $w(\sigma)$ sa **forme**, c'est-à-dire le mot constitué des signes des différences $\sigma(i+1) - \sigma(i)$ pour $i = 1..n-1$.

Exemple :

$$\sigma = 264153$$

$$w(\sigma) = + - - + -$$

Table de Kempner pour les permutations de forme

$w = - - + - ++$

Table de Kempner pour les permutations de forme $w = --+-++$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & \leftarrow \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & 0 & 3 & 6 & 8 & 9 & 9 & & \\
\rightarrow & 0 & 0 & 3 & 9 & 17 & 26 & 35 &
\end{array}
$$

q-Table de Kempner pour les permutations de forme $w = --+-++$

		1			
		q	0		
		q^3	0	0	
	0	q^5	q^4	q^3	
	$q^7+q^8+q^9$	$q^6+q^7+q^8$	q^5+q^6	q^4	0
0	$q^{11}+q^{12}+q^{13}$	$q^9+2q^{10}+2q^{11}+q^{12}$	$q^7+2q^8+2q^9+2q^{10}+q^{11}$	$q^5+q^6+2q^7+2q^8+2q^9+q^{10}$	$q^4+q^5+2q^6+2q^7+2q^8+q^9$

Autres q-analogues

Les nombres tangents-sécants sont liés à d'autres statistiques :

Autres q-analogues

Les nombres tangents-sécants sont liés à d'autres statistiques :

$$(-1)^n a_{2n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

où

$$\mathrm{exc}(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) > i \} \right|$$

$$\mathrm{fix}(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) = i \} \right|$$

Autres q-analogues

Si on pose $\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i\ \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$,

$$(-1)^n a_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{maj}-\mathrm{exc})(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{maj}-\mathrm{exc})(\sigma)}$$

Autres q-analogues

Si on pose $\text{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i \; \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$,

$$(-1)^n a_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\text{exc}(\sigma)} q^{(\text{maj}-\text{exc})(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\text{fix}(\sigma)} (-1)^{\text{exc}(\sigma)} q^{(\text{maj}-\text{exc})(\sigma)}$$

Question : peut-on généraliser aux q-nombres d'Entringer $a_{n,k}(q)$?

Autres q-analogues

Si on pose $\text{cros}(\sigma)$ le nombre de croisements de σ,

Autres q-analogues

Si on pose $\mathrm{cros}(\sigma)$ le nombre de croisements de σ,

$$(-1)^n c_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{cros})(\sigma)}$$

$$(-1)^n c_{2n}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (0)^{\mathrm{fix}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} q^{(\mathrm{cros})(\sigma)}$$

on obtient d'autres q-analogues des nombres tangents-sécants.

Autres q-analogues

Les $c_n(q)$ apparaissent eux, dans des fractions continues :

Autres q-analogues

Les $c_n(q)$ apparaissent eux, dans des fractions continues :

$$\sum_{n\geq 0} c_{2n+1}(q)x^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]_q[2]_q x}{1-\cfrac{[2]_q[3]_q x}{1-\cfrac{[3]_q[4]_q x}{\ddots}}}}$$

$$\sum_{n\geq 0} c_{2n}(q)x^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]_q^2 x}{1-\cfrac{[2]_q^2 x}{1-\cfrac{[3]_q^2 x}{\ddots}}}}$$

Arbres d'André

Réécrivons la table de Kempner.

			1			
		0	1			
		1	1	0		
	0	1	2	2		
	5	5	4	2	0	
0	5	10	14	16	16	
61	61	56	46	32	16	0

Arbres d'André

Réécrivons la table de Kempner.

			1			
		0	1			
		1	1	0		
	0	1	2	2		
	5	5	4	2	0	
0	5	10	14	16	16	
61	61	56	46	32	16	0

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	0	1	1				
4	0	1	2	2			
5	0	2	4	5	5		
6	0	5	10	14	16	16	
7	0	16	32	46	56	61	61

Arbres d'André

Réécrivons la table de Kempner.

			1			
		0	1			
		1	1	0		
	0	1	2	2		
	5	5	4	2	0	
0	5	10	14	16	16	
61	61	56	46	32	16	0

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	0	1	1				
4	0	1	2	2			
5	0	2	4	5	5		
6	0	5	10	14	16	16	
7	0	16	32	46	56	61	61

$$b_{n,k} = |\mathcal{B}_{n,k}|$$

avec $\mathcal{B}_{n,k} = \mathcal{A}_{n,k}$ si n est pair, $\qquad \mathcal{B}_{n,k} = \mathcal{A}_{n,n+1-k}$ si n est impair

Arbres d'André

Réécrivons la table de Kempner.

			1			
		0	1			
		1	1	0		
	0	1	2	2		
	5	5	4	2	0	
0	5	10	14	16	16	
61	61	56	46	32	16	0

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	0	1	1				
4	0	1	2	2			
5	0	2	4	5	5		
6	0	5	10	14	16	16	
7	0	16	32	46	56	61	61

$$b_{n,k} = |\mathcal{B}_{n,k}|$$

avec $\mathcal{B}_{n,k} = \mathcal{A}_{n,k}$ si n est pair, $\quad \mathcal{B}_{n,k} = \mathcal{A}_{n,n+1-k}$ si n est impair

But : donner une autre interprétation des nombres d'Entringer.

Arbres d'André

Definition

On appelle **arbre d'André sur** $[n]$ tout arbre binaire ordonné croissant, autrement-dit un arbre dont les sommets sont $\{1, 2, \ldots, n\}$, tel que

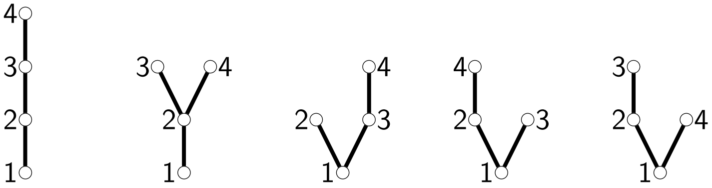
- Le sommet 1 est de degré 1 ou 2.
- Chaque sommet $i \geq 2$ est de degré 1, 2 ou 3
- Sur chaque chaîne commençant en 1, les sommets sont dans l'ordre croissant.

Arbres d'André

Definition

On appelle **arbre d'André sur** $[n]$ tout arbre binaire ordonné croissant, autrement-dit un arbre dont les sommets sont $\{1, 2, \ldots, n\}$, tel que

- Le sommet 1 est de degré 1 ou 2.
- Chaque sommet $i \geq 2$ est de degré 1, 2 ou 3
- Sur chaque chaîne commençant en 1, les sommets sont dans l'ordre croissant.



Arbres d'André

Definition

- Dans un arbre d'André, on appelle **pré-image** d'un entier i, l'entier $j < i$ tel que (j, i) soit une arête.
- Dans un arbre d'André, on appelle **chaîne principale** la chaîne commençant par 1 et choisissant toujours le plus petit descendant.

Arbres d'André

Definition

- Dans un arbre d'André, on appelle **pré-image** d'un entier i, l'entier $j < i$ tel que (j, i) soit une arête.
- Dans un arbre d'André, on appelle **chaîne principale** la chaîne commençant par 1 et choisissant toujours le plus petit descendant.

Proposition

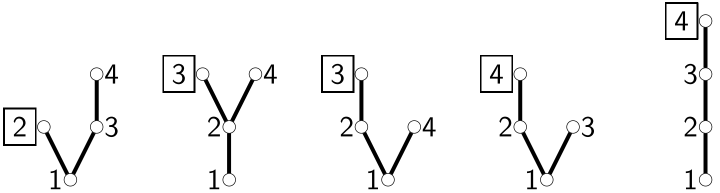
- *Le nombre d'Entringer $b_{n,k}$ est égal au nombre d'arbres d'André sur $[n]$ tels que la chaîne principale se termine par k.*
- *Le nombre d'Entringer $b_{n,k}$ est égal au nombre d'arbres d'André sur $[n]$ tels que la pré-image de n soit $k - 1$.*

Arbres d'André

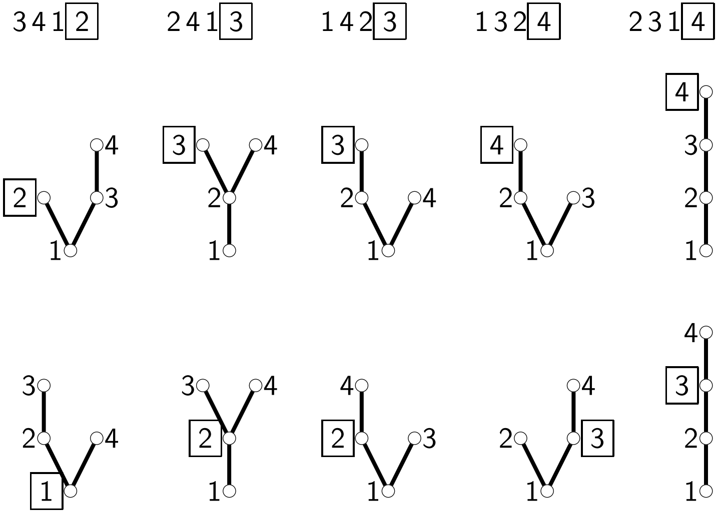
$3\,4\,1\,\boxed{2}$ $2\,4\,1\,\boxed{3}$ $1\,4\,2\,\boxed{3}$ $1\,3\,2\,\boxed{4}$ $2\,3\,1\,\boxed{4}$

Arbres d'André

$3\,4\,1\,\boxed{2}$ $2\,4\,1\,\boxed{3}$ $1\,4\,2\,\boxed{3}$ $1\,3\,2\,\boxed{4}$ $2\,3\,1\,\boxed{4}$



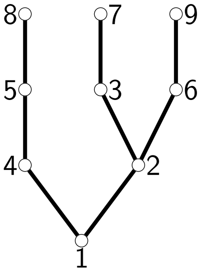
Arbres d'André



Il existe une bijection entre les permutations alternantes et les arbres d'André.

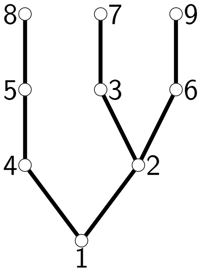
Il existe une bijection entre les permutations alternantes et les arbres d'André.

(845173926)



Il existe une bijection entre les permutations alternantes et les arbres d'André.

$$(845173926)$$



Mais, on a pas de bijection entre $\mathcal{B}_{n,k}$ et les ensembles d'arbres d'André de cardinal $b_{n,k}$

Arbres pairs

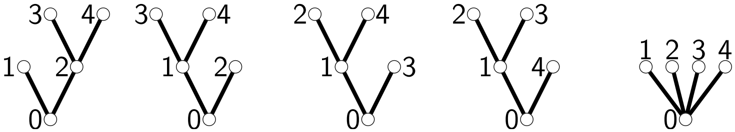
Definition

On appelle **arbre pair sur** $[n] \cup \{0\}$ tout arbre ordonné croissant sur $[n] \cup \{0\}$, tels que tous les sommets (sauf éventuellement 0) ont un nombre pair de descendants.

Arbres pairs

Definition

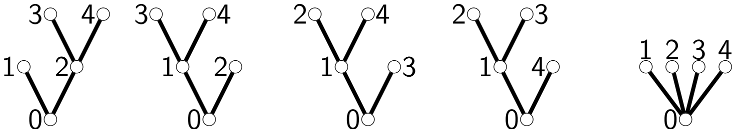
On appelle **arbre pair sur** $[n] \cup \{0\}$ tout arbre ordonné croissant sur $[n] \cup \{0\}$, tels que tous les sommets (sauf éventuellement 0) ont un nombre pair de descendants.



Arbres pairs

Definition

On appelle **arbre pair sur** $[n] \cup \{0\}$ tout arbre ordonné croissant sur $[n] \cup \{0\}$, tels que tous les sommets (sauf éventuellement 0) ont un nombre pair de descendants.



Proposition

Le nombre d'Entringer $b_{n,k}$ est égal au nombre d'arbres pairs sur $[n] \cup \{0\}$ tels que la chaîne principale se termine par $n - k + 1$ (resp. tels que la pré-image de n soit $n - k$).

Arbres à branchements aux niveaux pairs

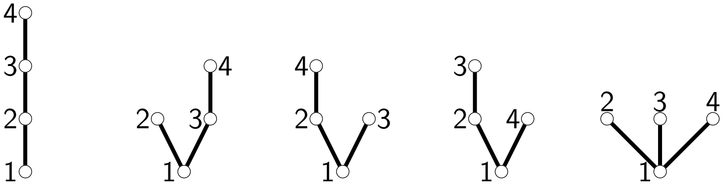
Definition

On appelle **arbre à branchements aux niveaux pairs sur** $[n]$ tout arbre ordonné croissant sur $[n]$ si un sommet i a plus d'un descendant si et seulement si le nombre d'arêtes entre 1 et i est pair.

Arbres à branchements aux niveaux pairs

Definition

On appelle **arbre à branchements aux niveaux pairs sur** $[n]$ tout arbre ordonné croissant sur $[n]$ si un sommet i a plus d'un descendant si et seulement si le nombre d'arêtes entre 1 et i est pair.



Proposition

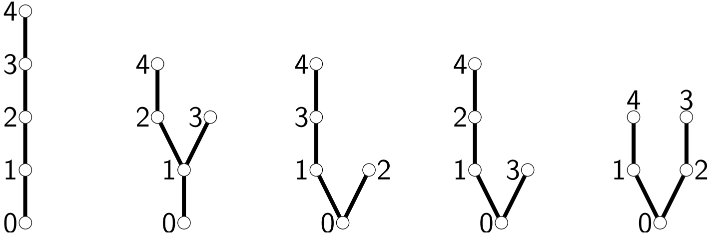
Le nombre d'Entringer $b_{n,k}$ *est égal au nombre d'arbres à branchements aux niveaux pairs sur* $[n]$ *tels que le plus grand descendant de* 1 *est* k.

Arbres intégrés

Definition

On appelle **arbre intégré sur** $[n] \cup \{0\}$ tout arbre d'André sur $[n] \cup \{0\}$ tels que les chaînes $t_1, \ldots, t_i$ descendantes d'un sommet vérifient

$$\min(t_1) < \min(t_2) < \ldots < \min(t_k) \leq \max(t_k) < \ldots < \max(t_2) < \max(t_1$$



Proposition

Le nombre d'Entringer $b_{n,k}$ est égal au nombre d'arbres intégrés sur $[n] \cup \{0\}$ tels que le plus grand descendant de 0 *est* $n - k + 1$

$b_{n,k}$ a donc différentes interprétations :

$$\begin{array}{c}
\text{Permutations alternantes sur } [n] \\
\updownarrow ? \\
\text{Arbres d'André sur } [n] \\
\updownarrow \\
\text{Arbres pairs sur } [n] \cup \{0\} \\
\updownarrow \\
\text{Arbres à branchements aux niveaux pairs sur } [n] \\
\updownarrow \\
\text{Arbres intégrés sur } [n] \cup \{0\}
\end{array}$$

Nombres d'Entringer

$b_{n,k}$ a donc différentes interprétations :

$$\begin{array}{c}
\text{Permutations alternantes sur } [n] \\
?\updownarrow ? \\
\text{Arbres d'André sur } [n] \\
\updownarrow \\
\text{Arbres pairs sur } [n] \cup \{0\} \\
\updownarrow \\
\text{Arbres à branchements aux niveaux pairs sur } [n] \\
\updownarrow \\
\text{Arbres intégrés sur } [n] \cup \{0\}
\end{array}$$

Fin

Merci de votre attention.