Inégalités de Sobolev logarithmique et de Poincaré pour la loi uniforme

Ivan Gentil
Ceremade (UMR CNRS no. 7534), Université Paris IX-Dauphine,
Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cédex 16, France
E-mail: gentil@ceremade.dauphine.fr
Internet: http ://www.ceremade.dauphine.fr/~gentil/

27 octobre 2004

1 Introduction

Voici quelques résultats sur les inégalités de Poincaré et Sobolev logarithmiques sur un segment de $\mathbb{R}$. Ces résultats ne sont ni nouveaux ni compliqués mais il n'est pas facile de les retrouver dans la littérature.

Nous reprenons ici certains calculs d'un article écrit en collaboration avec Jean Dolbeault et Ansgar Jüngel [DGJ04].

On va s'intéresser aux inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour la mesure uniforme sur le segment $[0, L]$, $(L > 0)$. Nous notons dans la suite par μ_L la mesure uniforme sur $[0, L]$.

2 Inégalité de Poincaré

Pour l'inégalité de Poincaré nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, L])$ vérifiant $f(0) = f(L)$ on a*

$$\mathbf{Var}_{\mu_L}(f) \leqslant \frac{L^2}{4\pi^2} \int (f')^2 d\mu_L. \tag{1}$$

De plus cette inégalité est optimale, les fonctions extrémales sont les combinaisons linéaires des fonctions $sin(2\pi x/L)$, $cos(2\pi x/L)$ et les constantes.

Preuve

$\triangleleft$ On suppose que $L = 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Supposons que $\int f d\mu_1 = 0$, puisque $f(0) = f(1)$ il existe alors une suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, coefficients de Fourier de f. On peut supposer f assez régulière telle que pour tout $x \in [0, 1]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(2\pi nx) + b_n cos(2\pi nx) \text{ et } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n a_n cos(2\pi nx) - 2\pi n b_n sin(2\pi nx).$$

Ainsi on a alors

$$\int f^2 d\mu_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) 4\pi^2 n^2 = \int f'^2 d\mu_1,$$

ce qui démontre le théorème. On a égalité si et seulement si $f(x) = a_1 sin(2\pi x) + b_1 cos(2\pi x)$ lorsque $\int f d\mu_L = 0$. $\triangleright$

La démonstration donnée ici est très proche de celle de l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure gaussienne avec les polynômes d'Hermite.

Mais on peut aussi montrer l'inégalité de trou spectral pour la mesure μ_L. En effet soit l'opérateur $\mathbf{L} = \Delta$, défini sur l'ensembles des fonctions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, L-périodiques. La mesure μ_L est réversible pour cet opérateur donc d'après les propriétés de l'inégalité de Poincaré, la constante optimale de l'inégalité de Poincaré est l'inverse de trou spectral, c'est-à-dire l'inverse de la première valeur propre non nulle de l'opérateur $\mathbf{L}$ sur l'ensemble des fonctions L-périodiques. Les vecteurs propres du laplacien (sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$ et L-périodiques) sont les fonctions $sin(\omega x)$ et $cos(\omega x)$ associé aux valeurs propres $-\omega^2$ avec $\omega \in \left\{k2\pi/L^2,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ainsi la valeur du trou spectral est $4\pi^2/L^2$ et l'on a l'inégalité (1) avec la constante $L^2/(4\pi^2)$.

Du théorème précédent on peut en déduire les deux inégalités de Poincaré suivantes :

Corollaire 2.2 *Pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,L])$, on a*

$$\mathbf{Var}_{\mu_L}(f) \leqslant \frac{L^2}{\pi^2}\int \left(f'\right)^2 d\mu_L, \tag{2}$$

et pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,L])$, vérifiant $f(0) = f(L) = 0$,

$$\int f^2 d\mu_L \leqslant \frac{L^2}{\pi^2}\int \left(f'\right)^2 d\mu_L. \tag{3}$$

Ces deux inégalités sont optimales.

Preuve
$\lhd$ Supposons, pour démontrer l'inégalité (2) que $L = 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on prolonge la fonction f en une fonction $\tilde{f}$ sur $[-1,1]$, paire. On peut alors appliquer le théorème 2.1 à $\tilde{f}$ pour la mesure μ_2, on obtient alors

$$\mathbf{Var}_{\mu_2}\left(\tilde{f}\right) \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int \left(\tilde{f}'\right)^2 d\mu_2.$$

Mais $\mathbf{Var}_{\mu_2}\left(\tilde{f}\right) = \mathbf{Var}_{\mu_1}(f)$ et $\int (\tilde{f}')^2 d\mu_2 = \int (f')^2 d\mu_1$. Ce qui prouve l'inégalité (2). Cette inégalité est de plus optimale car on a égalité pour $f(x) = cos(\pi x/L)$.

On démontre l'inégalité (3) de la même façon. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge f en une fonction $\tilde{f}$ sur $[-1,1]$, impaire. On a dans ce cas

$$\int f^2 d\mu_1 = \mathbf{Var}_{\mu_2}\left(\tilde{f}\right) \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int \left(\tilde{f}'\right)^2 d\mu_2 = \frac{1}{\pi^2}\int \left(f'\right)^2 d\mu_1,$$

ce qui prouve l'inégalité (3). Celle-ci est de même optimale car on a égalité pour $f(x) = sin(\pi x/L)$. $\rhd$

L'inégalité (2) illustre la différence entre l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de trou spectral. En effet l'opérateur $\mathbf{L}$ utilisé dans la démonstration du théorème 2.1 n'admet pas de trou spectral dans l'ensemble $\mathcal{C}^2([0,L])$. Ceci n'est pas en contradiction avec l'inégalité (2) car dans ce cas la mesure μ_L n'est plus réversible pour $\mathbf{L}$.

3 Inégalité de Sobolev logarithmique

Théorème 3.1 *Pour toute fonctions $\mathcal{C}^1$ et L-périodiques nous avons l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante pour la mesure μ_L*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}(f^2) \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2}\int (f')^2 d\mu_L. \tag{4}$$

Cette inégalité est optimale.

Preuve

$\triangleleft$ Soit $c_{\mathrm{LS}}(\mu_L)$ la constante optimale de l'inégalité de Sobolev logarithmique. La comparaison classique entre l'inégalité de Poincaré et de Sobolev logarithmique nous donne $c_{\mathrm{LS}}(\mu_L) \geqslant L^2/(2\pi^2)$ (section 1.2.6 de [ABC+00]). Il reste à montrer l'inégalité inverse.

Pour montrer l'inégalité inverse on utilise la méthode de dérivation de l'entropie. Considérons la solution L-périodique de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v &= \partial_x^2 v \quad \text{sur } [0,L] \times [0,\infty[, \\ v(\cdot,0) &= f^2 \quad \text{sur } [0,L] \end{cases}$$

pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, L-périodique.

Notons $\mathbf{P}_t f$ la solution, dans ce cas particulier on a la représentation suivante de la solution, pour tout $x \in [0,L]$,

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int f(x-y) \frac{e^{-y^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} dy. \tag{5}$$

Supposons pour simplifier que $f \geqslant 0$ et $\int f d\mu_L = 1$. On obtient alors

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{P}_t f \log \mathbf{P}_t f d\mu_L = -4 \int \left(\partial_x \sqrt{\mathbf{P}_t f}\right)^2 d\mu_L.$$

Notons la fonction $w = \sqrt{\mathbf{P}_t f}$. On a

$$\partial_t w = \partial_x^2 w + (\partial_x w)^2 \frac{1}{w}.$$

Si on dérive par rapport à t la fonction suivante :

$$\psi(t) = \int (\partial_x w)^2 d\mu_L - \frac{2\pi^2}{L^2} \int w^2 \log w^2 d\mu_L$$

on obtient

$$\psi'(t) = -2 \int \left(\left(\partial_x^2 w\right)^2 + \frac{(\partial_x w)^4}{3w^2} - \frac{4\pi^2}{L^2} (\partial_x w)^2 \right) d\mu_L \leqslant -\frac{2}{3} \int \frac{(\partial_x w)^4}{w^2} d\mu_L \leq 0,$$

où nous avons utilise l'inégalité de Poincaré (2.1). Ceci montre que ψ décroissante et de plus, pour tout f $\mathcal{C}^2$, vérifiant $f(0) = f(L)$,

$$\int (f')^2 d\mu_L - \frac{2\pi^2}{L^2} \mathbf{Ent}_{\mu_L}(f^2) = \psi(0) \geqslant \psi(t).$$

Puisque $\int f d\mu_L = 1$, on sait que la fonction $\mathbf{P}_t f$ ainsi que $\mathbf{P}_t f'$ converge vers 1 uniformément sur $[0,L]$ lorsque $t \to +\infty$ (voir la réprésentation de $\mathbf{P}_t f$ (5)). Ainsi $\psi(t) \to 0$ et donc on a prouvé l'inégalité inverse $c_{\mathrm{LS}}(\mu_L) \geqslant 2\pi^2/L^2$. $\triangleright$

Corollaire 3.2 *De la même façon que le corollaire 2.2 on a pour pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,L])$, on a*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}(f) \leqslant \frac{2L^2}{\pi^2} \int (f')^2 d\mu_L. \tag{6}$$

Cette inégalité est optimale.

Preuve

$\triangleleft$ La démonstration de l'existence est identique à celle de corollaire 2.2. Cette inégalité est optimale car elle implique l'inégalité (2) qui est elle même optimale. $\triangleright$

Remarque 3.3 *Par la même méthode, on peut montrer les inégalités de Sobolev (où inégalités de Beckner) suivantes pour la mesure* μ_L*. Pour tout* $p \in]1,2]$ *et toutes fonctions* $f \in \mathcal{C}^1([0,L])$ *vérifiant* $f(0) = f(L)$ *on a*

$$\frac{\int f^2 d\mu_L - \left(\int f^{2/p} d\mu_L\right)^p}{p-1} \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2 p} \int \left(f'\right)^2 d\mu_L. \tag{7}$$

Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,L])$ *vérifiant* $g(0) = g(L)$ *et* $\int g d\mu_L = 0$*. Soit* $\mathbf{P}_t g$ *la solution de l'équation de la chaleur de donnée initiale* f*. On a alors*

$$\frac{d}{dt} \int \frac{(\mathbf{P}_t f)^p}{p-1} d\mu_L = -\frac{4}{p} \int (\partial_x w)^2 d\mu_L$$

où $w = (\mathbf{P}_t g)^{p/2}$*,* w *vérifie l'équation suivante*

$$\partial_t w = \partial_{xx} w + \left(\frac{2}{p} - 1\right) \frac{(\partial_x w)^2}{w},$$

alors on obtient en utilisant l'inégalité de Poincaré 2.1 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left((\partial_x w)^2 - \frac{p}{p-1} \frac{2\pi^2}{L^2} (\mathbf{P}_t f)^p \right) d\mu_L &= -2 \int \left((\partial_{xx} w)^2 - \frac{4\pi^2}{L^2} w_x^2 + \left(\frac{2}{p} - 1\right) \frac{(\partial_x w)^4}{3w^2} \right) d\mu_L \\ &\leqslant -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{p} - 1\right) \int \frac{(\partial_x w)^4}{w^2} d\mu_L \leqslant 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité suivante

$$\int \frac{g^p}{p-1} d\mu_L \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2 p^2} \int g^{p-2} (g')^2 d\mu_L.$$

En posant $f = g^{p/2}$ *on trouve l'inégalité* (7).

L'inégalité de Sobolev logatithmique (4) *correspond au cas* $p \to 1$ *et l'inégalité de Poincaré* (1) *au cas* $p = 2$.

Corollaire 3.4 *Soit* $n > 0$*, on a alors les inégalités d'ordre* n *suivantes pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^n([0,L])$*, vérifiant* $f(0) = f(L)$ *:*

$$\mathbf{Var}_{\mu_L}(f) \leqslant \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2n} \int \left(f^{(n)}\right)^2 d\mu_L, \tag{8}$$

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}(f^2) \leqslant 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2n} \int \left(f^{(n)}\right)^2 d\mu_L, \tag{9}$$

Ces deux inégalités sont aussi optimales.

Preuve

$\lhd$ Pour démontrer l'inégalité (8) on applique n fois l'inégalité de Poincaré (1). L'inégalité est optimale car on a égalité lorsque $f(x) = sin(2\pi x/L)$.

Pour démontrer l'inégalité (9) on utilise d'une part l'inégalité de Sobolev logarithmique d'ordre 1 (4) et d'autre part l'inégalité de Poincaré d'ordre n (8) :

$$\mathbf{Ent}_{\mu_L}(f^2) \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2} \int \left(f'\right)^2 \leqslant 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2n} \int \left(f^{(n)}\right)^2 d\mu_L$$

Cette dernière inégalité est aussi optimale car elle permet de retrouver, par la méthode classique, l'inégalité de Poincaré d'ordre n optimale (8). $\rhd$

Le théorème 2.1 est classique. Pour le théorème 3.1 les premières preuves sont données par Rothaus et Weissler dans [Rot80, Wei80]. Notons que le théorème de Rothaus est beaucoup plus général car il donne un lien entre les constantes des inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour les sphères de $\mathbb{R}^n$. Notons de plus que Emery et Yukich ont donné une démonstration analogue à celle-ci dans [ÉY87].

Je tiens à remercier Djalil Chafai et Michel Ledoux pour leurs remarques.

Références

[ABC$^+$00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[DGJ04] J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. A nonlinear fourth-order parabolic equation and related logarithmic sobolev inequalities. Preprint, 2004.

[ÉY87] M. Émery and J.E. Yukich. A simple proof of the logarithmic Sobolev inequality on the circle. In *Séminaire de Probabilités, XXI*, pages 173–175. Springer, Berlin, 1987.

[Rot80] O.S. Rothaus. Logarithmic sobolev inequalities and the spectrum of sturm-liouville operators. *J. Funct. Anal.*, 39 :42–56, 1980.

[Wei80] F.B. Weissler. Logarithmic sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle. *J. Funct. Anal.*, 37 :218–234, 1980.