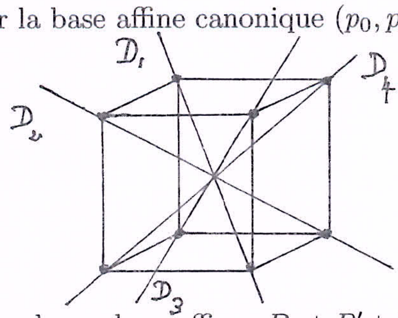
L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2011-2012

Contrôle continu du 20 mars 2012

Durée: 1 heure

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés -

Soit C le cube unité porté par la base affine canonique (p_0, p_1, p_2, p_3) de R^3, de diagonales principales $D_i, 1 \leq i \leq 4$:



Q1. Représenter sur une figure deux plans affines P et P' tels que $D_1 = P \cap P'$.
En déduire un système d'équations cartésiennes de D_1 dans le repère $\mathcal{R}_0 = (p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3})$.

Q2. En vous aidant d'une figure claire, expliciter dans $\mathcal{R}_0$ la projection affine p sur D_1 parallèlement à la direction du plan d'équation $y = 0$.

Donner, en justifiant votre réponse, les images $p(D_i)$, $1 \leq i \leq 4$.

Soit p' la projection sur le plan affine d'équation $y = 0$ parallèlement à la direction de la droite D_1. Sur une figure de C, tracer (avec clarté et en justifiant vos traits) les images $p'(D_i), 1 \leq i \leq 4$.

Def: On dit qu'une bijection f de R^3 conserve la partie $A \subset R^3$ si $f(A) = A$ ce qui signifie: $\forall a \in A$, $f(a) \in A$ et $f^{-1}(a) \in A$.

Q3. En vous aidant d'une figure, donner le plan fixe et la direction d'une symétrie affine $s : R^3 \to R^3$ pour laquelle

$$s(D_1) = D_1, \quad s(D_2) = D_2, \quad s(D_3) = D_4.$$

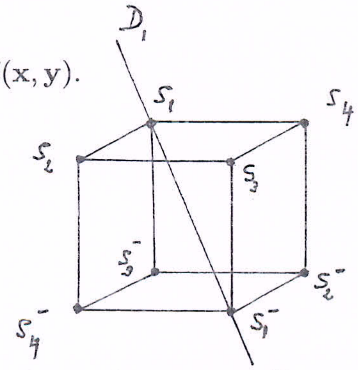
Justifier votre réponse *sans* expliciter s dans $\mathcal{R}_0$.

Expliciter ensuite la symétrie s dans le repère $\mathcal{R}_0$.

Q4. On suppose que la bijection affine $f : R^3 \to R^3$ conserve

- l'ensemble S des huit sommets du cube C,
- la distance euclidienne d: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$, $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Appelons s_i et s_i^- les sommets de $C \cap D_i$:



En raisonnant sur la distance $d(f(s_i), f(s_i^-))$, montrer que f transforme toute diagonale principale de C en une diagonale principale de C. f admet-elle un point fixe?

Q5. On désigne par o le centre du cube C.

- Exprimer s_4 dans la repère affine $\mathcal{R} = (o; \overrightarrow{os_1}, \overrightarrow{os_2}, \overrightarrow{os_3})$

- Montrer que toute bijection affine $f : R^3 \to R^3$ qui conserve les quatre diagonales principales de C est une homothétie.

- Combien y-a-t-il de bijections affines qui conservent l'ensemble des sommets S et les diagonales principales de C?