L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2011-2012

Contrôle final du 11 juin 2012

Durée: 3 heures

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés -

Exercice 1. (Aires et Volumes)

1) On considère le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par P un polygone du plan de sommets $p_0, p_1, \ldots, p_r$ (2 à 2 distincts) et de côtés les segments $[p_0, p_1], [p_1, p_2], \ldots, [p_{r-1}, p_r], [p_r, p_0]$.
Exprimer l'aire de P en fonction des coordonnées (a_i, b_i) des sommets $p_i, 0 \leq i \leq r$, dans le repère $\mathcal{R}$.

[Indication: commencer par un triangle.]

2) On désigne par $\mathcal{C}$ un cube unité de l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ (la distance euclidienne usuelle est notée d).

a) - Faire une figure d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$ de longueur d'arêtes $\sqrt{2}$ dont les quatre sommets A, B, C, D sont des sommets de $\mathcal{C}$.

- Soit S l'isobarycentre des sommets A, B, C. Que vaut $d(A, S)$?
- Montrer que la droite passant par le sommet D et par S est orthogonale au plan $\langle A, B, C \rangle$.
- Calculer le volume $vol(\mathcal{T})$.

b) Soit $\mathcal{P}$ l'octaèdre régulier de sommets les centres des faces du cube $\mathcal{C}$.

- Calculer le volume $vol(\mathcal{P})$.

Exercice 2. (Sécantes communes)

On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ rapporté au repère canonique $\mathcal{R} = ((0,0,0), \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1))$. On désigne par C le cube unité situé dans le premier octant $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et dont l'un des sommets est $(0,0,0)$.

Terminologie:

- On appelle sécante d'une famille de droites affines $(D_i)_{1 \leq i \leq l}$ toute droite affine Δ telle que $\Delta \cap D_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq l$.

Dans cet exercice on se propose de décrire certaines propriétés de sécantes de droites.

Soient D, D', D'' les droites d'équations

$$D : y = 0, z = 1 \quad D' : x = 1, z = 0, \quad D'' : x = 0, y = 1$$

dans le repère $\mathcal{R}$.

1) Tracer les droites D, D', D'' sur une figure du cube C.

2) a) Donner une équation paramétrique de la sécante $\Delta = (m'm'')$ de (D', D'') passant par les points $m' = (1, Y, 0)$ et $m'' = (0, 1, Z)$.

b) Soient P' le plan d'équation $x = 1$ et P'' le plan d'équation $x = 0$.
Montrer que par tout point $(x, y, z) \notin P' \cup P''$ passe une unique sécante Δ de (D', D'') dont une équation paramétrique est

$$(1+t, \frac{x+y-1}{x} + t\frac{y-1}{x}, t\frac{z}{x-1}), \quad t \in \mathbf{R}.$$

c) En déduire une description du lieu

$$S = \bigcup_{(m',m'') \in D' \times D''} (m'm'')$$

réunion des sécantes $\Delta = (m'm'')$ de la paire (D', D'').
d) En déduire que le triplexe (D, D', D'') admet une infinité de sécantes.
3) Soit D''' la droite d'équation: $x = y = z$. La famille (D, D', D'', D''') admet-elle une sécante?

On considère à présent les trois sommets $a = (1, 0, 1), a' = (1, 1, 0), a'' = (0, 1, 1)$ du cube C et les trois barycentres

$$a(\theta) = \begin{pmatrix} a' & a'' \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}, \quad a'(\theta) = \begin{pmatrix} a'' & a \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}, \quad a''(\theta) = \begin{pmatrix} a & a' \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

On désigne par $p(\theta)$ la projection de $a(\theta)$ sur D parallèlement à $\overrightarrow{D'} \oplus \overrightarrow{D''}$ et par $p'(\theta)$ (resp. $p''(\theta)$) la projection analogue de $a'(\theta)$ sur D' (resp. de $a''(\theta)$ sur D'').

4) a) Montrer que l'unique sécante du triplexe (D, D', D'') passant par $p(\theta)$ coupe D' et D'' en des points m' et m'' tels que

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} m' & m'' \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que $p(\theta)$ est l'unique point de D satisfaisant cette propriété.
c) Décrire le lieu géométrique des isobarycentres

$$\begin{pmatrix} p(\theta) & p'(\theta) & p''(\theta) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Exercice 3. (Rotations)

Préliminaire vectoriel:

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 de produit scalaire $(\ |\ )$ et par $O(E)$ le groupe orthogonal de E. Le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace $W \subset E$ est noté $W^\perp$.
1) Montrer que tout endomorphisme $\rho \in O^+(E)$ admet la valeur propre $+1$.
2) Soit $\vec{e} \in E$ un vecteur propre de ρ de valeur propre $+1$ et $\langle \vec{e} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}$. Montrer que $\rho(\langle \vec{e} \rangle^\perp) = \langle \vec{e} \rangle^\perp$.
3) En déduire que tout endomorphisme orthogonal $\rho \in O^+(E) \setminus \{id_E\}$ est une rotation autour d'un axe.

Partie affine:

On se place à présent dans l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire $(\ |\ )$ usuel. Pour un point $z \in \mathbf{R}^3$ et un vecteur $\vec{e} \in \mathbf{R}^3$, on appelle rotation d'axe $D = z + < \vec{e} >$ toute isométrie $f \in Is^+(\mathbf{R}^3) \setminus \{id\}$ de la forme $f(m) = z + \rho(\overrightarrow{zm})$ où $\rho \in O^+(\mathbf{R}^3)$ est telle que $\rho(\vec{e}) = \vec{e}$. Une rotation d'angle π est appelée un demi-tour.

Soient D_1 et D_2 deux droites affines non parallèles de vecteurs directeurs unitaires respectifs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

On admettra ici qu'il existe une unique droite affine D, appelée *perpendiculaire commune*, orthogonale à D_1 et à D_2 et coupant D_1 en un point a_1 et D_2 en un point a_2.

On désigne par r_1 et r_2 les demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2.

1) Montrer que $r_1 \circ r_2 \neq id$.

2) Calculer $\overrightarrow{m\,(r_1 \circ r_2)(m)}$ pour $m \in D$ en fonction de a_1 et a_2.

3) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est un vissage, i.e.

$$r_1 \circ r_2 = \tau \circ r = r \circ \tau$$

où r est une rotation dont on déterminera l'axe et τ une translation dont on déterminera le vecteur.

4) On suppose $a_1 = a_2$ et $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2) = cos\,\alpha$. Montrer que $r_1 \circ r_2$ est alors une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

5) Déduire des questions qui précèdent que $r_1 \circ r_2$ est un demi-tour si et seulement si $a_1 = a_2$ et $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2) = 0$.

[Indic: on pourra le cas échéant utiliser, en le citant avec soin, un résultat de cours sur les isométries.]