L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2012-2013

Contrôle continu du 30 avril 2013

Durée: 2 heures

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.

Exercice 1 (Isométries stabilisant une réunion de droites)

On se place dans l'espace euclidien R^n rapporté à la base canonique orthonormée $(\vec{e}_j)_{1\leq j\leq n}$. On désigne par $O(R^n)$ le groupe orthogonal. Pour une partie $P \subset R^n$, on désigne par $G_P \subset O(R^n)$ le sous-groupe des isométries linéaires telles que $f(P) = P$ (i.e. telles que $\forall p \in P, f(p) \in P$ et $f^{-1}(p) \in P$).

Dans cet exercice, *donner une isométrie (linéaire)* signifie *écrire la matrice de cette isométrie dans la base canonique.*

Notons $D_j = \langle \vec{e}_j \rangle$ le $j-$ème axe de coordonnées. On se propose de déterminer le groupe des isométries linéaires qui stabilisent la réunion $\bigcup_{1\leq j\leq n} D_j$ lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

1 On suppose $n = 2$.

(i) Montrer que la matrice (dans la base canonique) de toute $f \in G_{D_1}$ est diagonale. En déduire que G_{D_1} est d'ordre 4 et faire la liste de ses éléments.

(ii) Montrer que si $f(D_1 \cup D_2) = D_1 \cup D_2$, alors $f(D_1) = D_1$ ou $f(D_1) = D_2$.
[Un conseil: utiliser le fait que la droite $f(D_1) \subset D_1 \cup D_2$ contient 3 points...]

(iii) En déduire la liste des éléments de $G_{D_1\cup D_2}$ et décrire leur nature géométrique.

2 On suppose $n = 3$.

(i) Montrer que $G_{D_1} \cap G_{D_2} \subset G_{D_3}$ et établir la liste des éléments de $G_{D_1} \cap G_{D_2}$.

(ii) En reprenant le raisonnement de la question 2 (ii), montrer que si

$$f(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

alors il existe une permutation $\sigma \in S_3$ telle que

$$\forall i, f(D_i) = D_{\sigma(i)}.$$

(iii) Pour chacune des six permutations $\sigma \in S_3$, donner une isométrie $f \in O(R^n)$ telle que $\forall i, f(D_i) = D_{\sigma(i)}$.

(iv) Montrer que si les isométries (linéaires) f et f' induisent la même permutation des axes de coordonnées, alors il existe $f'' \in G_{D_1} \cap G_{D_2}$ telle que $f = f' \circ f''$.

(v) En vous servant des questions qui précèdent, donner l'ordre du groupe $G_{D_1\cup D_2\cup D_3}$ et établir la liste de ses éléments (répartis en six classes).

3 Faire une figure du cube (plein) $C \subset R^3$ centré en $(0, 0, 0)$ et dont $(1, 1, 1)$ est un sommet. En considérant les coordonnées des huit sommets de C, expliquer avec soin pourquoi $G_{D_1\cup D_2\cup D_3}$ est contenu dans G_C.

4* (Question bonus)

Soient P, P', P'' les plans d'équations $P : x = y$, $P' : y = z$, $P'' : y = -z$.

(i) Tracer P, P', P'' sur la figure du cube C.

(ii) Donner la matrice (dans la base canonique) des réflexions s, s', s'' de plans fixes respectifs P, P', P''. Déterminer $s \circ s', s' \circ s, s' \circ s''$ et décrire leur nature géométrique.

Exercice 2 (Barycentres et convexes)

On se place dans l'espace affine R^n dans lequel on fixe une base affine $(P_0, P_1, \dots, P_n)$.

On désigne par S l'isobarycentre de $(P_l)_{0 \le l \le n}$ et par S_j l'isobarycentre de $(P_l)_{0 \le l \le n, l \ne j}$, $j \in [0, n]$.

1 (Questions de cours)

(i) Donner la définition et une description explicite de l'enveloppe convexe $[P_0, P_1, \dots, P_n]$.

(ii) Donner les coordonnées de S et de S_j, $j \in [0, n]$, dans le repère $(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n})$.

On suppose à présent $n = 3$.

2 Faire une figure de l'enveloppe convexe $[(0,0,0); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$ en précisant, par une construction géométrique, la position des barycentres partiels $S_j, j \in [0, 3]$.

3 On se fixe à présent une base affine (P_0, P_1, P_2, P_3) de R^3.

(i) En vous servant d'une propriété de cours que l'on énoncera avec soin, montrer que $\forall j \in [0, 3]$, S est élément de la droite $(P_j S_j)$.

(ii) Montrer que $\forall (i, j) \in [0, 3]^2$, $i \ne j \Rightarrow (P_i S_i) \ne (P_j S_j)$.

4 On désigne par H_j le plan affine de R^3 engendré par $(P_l)_{0 \le l \le 3, l \ne j}$.

(i) Donner, pour tout $j \in [0, 3]$, une équation cartésienne

$$h_j(x_1, x_2, x_3) = 0$$

de H_j dans le repère $(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$.

[Indication: faire attention à H_0.]

(ii) Expliquer pourquoi les parties $h_j^{-1}(R_{\ge 0}) \subset R^3$ sont convexes.

(iii) En ajustant si nécessaire les signes des formes affines $h_j : R^3 \to R$ du point (i), montrer que

$$[P_0, P_1, P_2, P_3] = \bigcap_{0 \le j \le 3} h_j^{-1}(R_{\ge 0}) \quad \text{(intersection de demi-espaces fermés)}$$