Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Géométrie élémentaire

Corrigé du contrôle final

11 juin 2013 — durée 3 h

Questionnaire

1. On pouvait penser au déterminant de Gram. Mais on a $n+1$ vecteurs en dimension n, donc le volume du parallélotope est le déterminant de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{P_0P_i})_{1\leq i\leq n}$ [calculé dans la base canonique] :

$$V = \left|\det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n})\right| = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Le nombre de sommets est : $s = p+1$ car on a p sommets A_i $(1 \leq i \leq p)$ et le sommet O. Le nombre d'arêtes est : $a = 2p$ car on a p arêtes $[OP_i]$ et p arêtes $[A_iA_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq p$, avec $A_{p+1} = A_1)$. Enfin, le nombre de faces est : $f = p+1$ car il y a p faces triangulaires OA_iA_{i+1} et une face polygonale $A_1A_2\cdots A_p$.

   La formule d'Euler est satisfaite : $s - a + f = p + 1 - 2p + p + 1 = 2$.

3. On note $\mathbb{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (ou n'importe quelle sphère, en fait). Un *grand cercle* est l'intersection de $\mathbb{S}$ et d'un plan contenant le centre O de $\mathbb{S}$.

   Fixons deux points A et B non diamétralement opposés de $\mathbb{S}$. Le plan (OAB) coupe $\mathbb{S}$ en un grand cercle. Les points A et B partagent ce cercle en deux arcs, le *segment sphérique* $[AB]$ est le plus court de ces deux arcs. C'est la courbe la plus courte tracée sur $\mathbb{S}$ qui relie A et B.

   Un *triangle sphérique* est, selon le point de vue, la donnée de trois points A, B et C de $\mathbb{S}$ dont deux quelconques ne sont pas diamétralement opposés ; ou bien la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$; ou bien la plus petite des deux « zones » [1] délimitées par ces segments.

   Un *angle sphérique* dans $\mathbb{R}^3$ est l'angle formé par les tangentes à deux segments sphériques qui partagent une de leurs extrémités.

4. Dans un triangle sphérique, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est $\pi + \mathscr{A}$, où $\mathscr{A}$ est l'aire du triangle sphérique (formule de Girard).

1. La réunion des trois segments est une courbe fermée simple ; par le théorème de Jordan, son complémentaire est la réunion de deux composantes connexes qu'on appelle ici « zones ».

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation

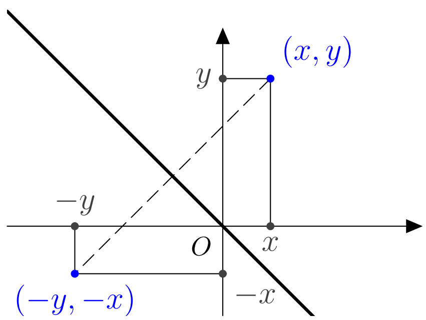
$$2x^2 + xy + 2y^2 + 2x - 2y - 6 = 0.$$

1. On suppose provisoirement que $\mathscr{C}$ n'est pas vide. Pour montrer que $\mathscr{C}$ est une conique à centre, il suffit de montrer que la partie quadratique de l'équation de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire la forme quadratique $q : (x, y) \mapsto 2x^2 + xy + 2y^2$, est non dégénérée. Or, sa matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

   et $\det A = 2 \times 2 - (1/2)^2 \neq 0$. Ainsi, $\mathscr{C}$ possède un centre.
   Comme $\det A > 0$, on peut ajouter que $\mathscr{C}$ est une ellipse.

2. La réflexion d'axe Δ d'équation $x + y = 0$ s'écrit, en coordonnées : $\sigma : (x, y) \mapsto (-y, -x)$.



   Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit de montrer que si $M \in \mathscr{C}$, alors $\sigma(M) \in \mathscr{C}$. On a en effet :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff 2x^2 + xy + 2y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \\ &\iff 2(-y)^2 + (-y)(-x) + 2(-x)^2 + 2(-y) - 2(-x) - 6 = 0 \\ &\iff \sigma(M) \in \mathscr{C}. \end{aligned}$$

   On voit que $\mathscr{C}$ n'est pas un cercle. Par conséquent, elle a exactement deux axes de symétrie, qui sont ce qu'on appelle les axes de l'ellipse. On vient de voir que Δ est l'un de ces deux axes – en particulier, le centre Ω de $\mathscr{C}$ appartient à Δ – et l'autre lui est perpendiculaire. En particulier, les vecteurs $(1, -1)$, qui dirige Δ, et $(1, 1)$, qui lui est orthogonal, sont des vecteurs propres de la matrice de q.

3. On commence par diagonaliser (la matrice de) q. On pourrait calculer ses valeurs propres puis ses vecteurs propres mais on connaît déjà les directions propres ! On choisit donc un vecteur normé sur ces directions, disons

$$e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e'_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

   et on calcule pour contrôler (en fait, ça ne sert à rien) :

$$Ae'_1 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) e'_1, \quad Ae'_2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) e'_2.$$

On effectue le changement du repère canonique $\mathbf{r} = (O, e_1, e_2)$ au repère $\mathbf{r}' = (O, e'_1, e'_2)$, dont on note P la matrice de passage. Si $X = {}^t(x\ y)$ et $X' = {}^t(x'\ y')$ désignent les colonnes de coordonnées d'un point $M = (x, y)$ dans $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$, on a :

$$X = PX', \quad \text{c'est-à-dire :} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y'). \end{cases}$$

Les équations suivantes sont équivalentes à la condition que $M \in \mathscr{C}$:

$$2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} + 2\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - 2\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} - 6 = 0,$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 6 = 0,$$

$$\frac{3}{2}\left(x' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + \frac{5}{2}y'^2 - 6 = 0,$$

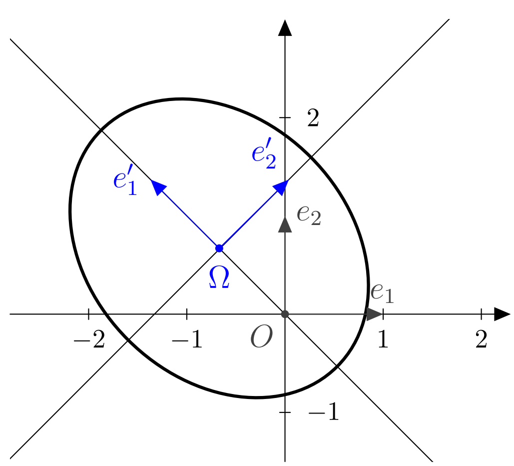
$$\frac{\left(x' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\frac{44}{9}} + \frac{y'^2}{\frac{44}{15}} = 1.$$

On vérifie en particulier que $\mathscr{C}$ n'est pas vide. On voit aussi que son centre est le point Ω qui a pour coordonnées $x' = -2\sqrt{2}/3$ et $y' = 0$ dans $\mathbf{r}'$, donc $x = -2/3$ et $y = 2/3$ dans $\mathbf{r}$. Quant aux axes, ce sont les droites $\Omega + \mathrm{vect}(e'_1) = \Delta$ et $\Omega + \mathrm{vect}(e'_2)$.

4. Pour tracer $\mathscr{C}$, on place Ω et les axes, puis les intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes :

$$y' = 0 \ \Rightarrow\ x' + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \pm\sqrt{\frac{44}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{11} \quad \text{et} \quad x' + \frac{2}{3} = 0 \ \Rightarrow\ y' = \sqrt{\frac{44}{15}}.$$

Comme $\sqrt{11}$ est compris entre $\sqrt{9}$ et $\sqrt{16}$, on voit que le demi-grand axe est compris entre 2 et $8/3$. Comme $44/15$ est un tout petit peu plus petit que $45/15 = 3$, sa racine carré vaut un tout petit peu moins que $1,732$.



Exercice 2

1. (a) Dire que M est équidistant de A et B, c'est dire que $AM = BM$. En élevant au carré et en utilisant les propriétés formelles du produit scalaire, il vient :

$$\begin{aligned} AM = BM &\iff \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} \rangle - \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \\ &\iff \langle \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \\ &\iff 2\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \end{aligned}$$

   (b) De ce qui précède, M est équidistant de A et B si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{IM}$ appartient à l'orthogonal P du vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui est un plan vectoriel : c'est équivalent à dire que M appartient au plan contenant I et dirigé par P.

2. (a) Un première solution consiste à remarquer que le triangle $P_0P_iP_j$ est équilatéral, si bien que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j}})$ mesure $\pm\pi/3$ et son cosinus vaut $1/2$. D'où :

$$\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = P_0P_i \cdot P_0P_j \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\ell^2}{2}.$$

   Sans trigonométrie, on peut calculer :

$$d(P_i, P_j)^2 = \left\| -\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_0P_j} \right\|^2 = d(P_0, P_i)^2 - 2\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle + d(P_0, P_j)^2,$$

   ce qui permet de conclure.

   (b) Il s'agit de montrer que la famille $(\overrightarrow{P_0P_i})_{1\le i\le n}$ est libre. Pour cela, il suffit de montrer que son déterminant de Gram n'est pas nul. Par 2a, après avoir divisé le déterminant de Gram par $(\ell^2)^n$, celui-ci vaut :

$$g = \det(G) \text{ où } G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

   On peut procéder classiquement par opérations sur les rangées. Ou bien, on peut résoudre le système : une fois sommées toutes les équations, c'est très facile. Voici encore une autre façon. On remarque que $G = \frac{1}{2}(I + J)$ où I est la matrice identité et J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. On vérifie que $J^2 = nJ$, donc les valeurs propres de J sont (parmi) 0 et n et, par suite, celles de G sont $1/2$ et $(n+1)/2$ (en regardant de plus près, on voit que $g = (n+1)/2^n$).

   (c) Les 1-simplexes réguliers sont les segments. Les 2-simplexes réguliers sont les triangles équilatéraux. Les 3-simplexes réguliers sont les tétraèdres réguliers.

3. (a) Fixons i. Soit Π_i l'ensemble des points C tels que $\langle \overrightarrow{P_0C}, \overrightarrow{P_0P_i} \rangle = \ell^2/2$. On a deux plans : $\mathrm{Med}(P_0, P_i)$ et Π_i ; tous deux contiennent le milieu du segment $[P_0P_i]$ et $\{P_1, P_2, P_3\}\backslash\{P_i\}$. Ces trois points ne sont pas alignés, donc les deux plans coïncident.

(b) Soit (c_1, c_2, c_3) les coordonnées d'un point C dans $(P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$, d'où :

$$\overrightarrow{P_0C} = \sum_{j=1}^{3} c_j \overrightarrow{P_0P_j}.$$

Le point C satisfait aux conditions de 3a si et seulement si on a, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$\frac{\ell^2}{2} = \langle \overrightarrow{P_0C}, \overrightarrow{P_0P_i} \rangle = \sum_{j=1}^{3} c_j \langle \overrightarrow{P_0P_j}, \overrightarrow{P_0P_i} \rangle = c_i \ell^2 + \sum_{j \neq i} c_j \frac{\ell^2}{2} = (c_i + \sum_{j=1}^{3} c_j) \frac{\ell^2}{2}.$$

On divise par $\ell^2/2$ et on somme ces trois équations, d'où une condition nécessaire :

$$3 = \sum_{i=1}^{3} c_i + 3 \sum_{j=1}^{3} c_j = 4 \sum_{j=1}^{3} c_j,$$

puis nécessairement : $c_i = 1/4$ pour tout i. On vérifie que cette solution convient. Ainsi, on a un unique point C caractérisé par :

$$\overrightarrow{P_0C} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Cela entraîne que C est l'isobarycentre du tétraèdre : $C = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) S'il existe une sphère contenant $\mathscr{P}$, alors son centre est équidistant des P_i ($1 \leq i \leq 3$) : d'après 3b, c'est C, d'où l'unicité. Pour l'existence, on a vu en 3b que C est bien équidistant des P_i, *i.e.* la sphère de centre C et de rayon $d(C, P_0)$ contient $\mathscr{P}$.

4. On va dire que cette question était une longue question de cours...

Exercice 3

1. Les trois angles d'un triangles équilatéral mesurent $\pi/3$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, donc la hauteur vaut $a\sqrt{3}/2$ et l'aire : $\mathscr{A} = a^2\sqrt{3}/4$.
2. Un hexagone régulier peut être pavé par 6 triangles équilatéraux de même côté, d'où la surface : $6a^2\sqrt{3}/4 = 3a^2\sqrt{3}/2$.
3. (a) On calcule sans peine :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1+\varphi \\ -\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -\varphi \\ 1 \\ \varphi - 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi - 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$a = AB = BC = CA = \sqrt{(\varphi-1)^2 + 1^2 + \varphi^2} = \sqrt{2\varphi^2 - 2\varphi + 1} = \sqrt{4} = 2.$$

(b) On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\varphi+1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

puis

$$\langle \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{\varphi+1}{3}(-1+\varphi-\varphi+1) = 0 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\varphi+1}{3}(-\varphi+1+\varphi-1) = 0.$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ engendrent la direction du plan (ABC), la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

(c) *Première solution :* On applique la formule « un tiers de base par hauteur ». Par 3b, G est le projeté orthogonal de O sur (ABC) donc la hauteur de $OABC$ est :

$$OG = \frac{\varphi+1}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\varphi+1}{3}\sqrt{3} = \frac{3+\sqrt{5}}{6}.$$

L'aire du triangle a été calculée plus haut. Le volume est donc :

$$v = \frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{4} \times \frac{\varphi+1}{3}\sqrt{3} = \frac{\varphi+1}{3}.$$

Deuxième solution : On applique la formule « un sixième du parallélotope associé », puis on simplifie avec $\varphi^2 = \varphi+1$, ce qui donne :

$$v = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right| = \frac{\pm 1}{6}\begin{vmatrix}1 & \varphi & 0\\ \varphi & 0 & 1\\ 0 & 1 & \varphi\end{vmatrix} = \frac{\varphi^3+1}{6} = \frac{\varphi(\varphi+1)+1}{6} = \frac{2\varphi+2}{6}.$$

(d) L'icosaèdre possède 20 faces[2], c'est la réunion presque[3] disjointe de 20 tétraèdres isométriques à $OABC$. Le volume de notre icosaèdre est donc :

$$V(2) = 20v = \frac{20}{3}(\varphi+1) = \frac{10}{3}(3+\sqrt{5}).$$

NB : Pour un icosaèdre de côté a quelconque au lieu de 2, le volume est $(a/2)^3$ fois plus grand, ce qui donne :

$$V(a) = 20 \times \frac{3+\sqrt{5}}{6} \times \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 5 \times \frac{3+\sqrt{5}}{12}a^3.$$

2. Comme son nom l'indique... Si on l'a oublié, on peut le retrouver : il y a 12 sommets, f faces triangulaires ; chaque arête appartient à 2 faces, d'où $a = 3f/2$ arêtes ; de $s - a + f = 2$, on tire : $f = 20$.

3. C'est-à-dire que deux de ces tétraèdres s'intersectent selon un sommet, une arête ou une face.