L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2013-2014

Contrôle continu du 18 mars 2014

Durée: 1 heure 45

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés -

Dans toute l'épreuve, on désigne par $\mathcal{C}$ le cube unité (plein) porté par la base affine canonique $(A=(0,0,0), B=(1,0,0), D=(0,1,0), E=(0,0,1))$ de R^3:

Exercice 1 (Symétries du cube)

1. Tracer, sur une figure de $\mathcal{C}$, les plans affines $P_i, 1 \leq i \leq 3$, d'équation

$$P_1 : y = \frac{1}{2}, \quad P_2 : y+z=1, \quad P_3 : x+y=1,$$

dans le repère $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. On désigne par $s_i, 1 \leq i \leq 3$, la symétrie affine de plan P_i parallèlement à la droite $\overrightarrow{D_i}$ orthogonale à $\overrightarrow{P_i}$.

(i) Expliciter $s_2(x,y,z)$ et $s_3(x,y,z)$, $(x,y,z) \in R^3$. *[On pourra, par exemple, s'aider d' une figure en commençant par déterminer l'image des points A,B,D,E.]*

(ii) Calculer $s_2 \circ s_3 \circ s_2(x,y,z)$, $(x,y,z) \in R^3$, et décrire la nature géométrique de $s_2 \circ s_3 \circ s_2$. Pouvez-vous expliquer cette observation par un argument général?

3. (i) Tracer sur le cube $\mathcal{C}$ les images $s_i(\mathcal{D}), 1 \leq i \leq 3$, de la diagonale faciale $\mathcal{D} = (CH)$. [*On veillera à justifier tout trait avec soin.]*

(ii) Montrer que toute diagonale faciale $\mathcal{D}'$ du cube $\mathcal{C}$, est soit l'image de $\mathcal{D}$ par une symétrie conservant les sommets de $\mathcal{C}$, soit l'image de $\mathcal{D}$ par la composée de deux telles symétries.
[Indication: commencer par introduire deux nouveaux plans P_4 et P_5 et déterminer les images $s_4(\mathcal{D}), s_5(\mathcal{D})$ par les symétries orthogonales s_4, s_5 de plans P_4, P_5.]

Exercice 2

Partie A (Sécantes)

On appelle *sécante* d'une famille de droites affines $(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq l}$ toute droite affine Δ telle que $\Delta \cap \mathcal{D}_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq l$.

Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ les droites d'équation

$$\mathcal{D} : y=0, z=1 \quad \mathcal{D}' : x=1, z=0, \quad \mathcal{D}'' : x=0, y=1$$

dans le repère canonique $\mathcal{R}$.

1. Tracer les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ sur une figure du cube $\mathcal{C}$.

2. Donner une équation paramétrique de la sécante $\Delta = (m'm'')$ de $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ passant par les points $m' = (1, Y, 0)$ et $m'' = (0, 1, Z)$.

3. On suppose $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

(i) Montrer que le point (x, y, z) appartient à une unique sécante Δ de $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ dont on donnera une équation paramétrique.

(ii) En déduire que le triplet de droites $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ admet une infinité de sécantes.

4.* Soit $\mathcal{D}'''$ la diagonale principale de $\mathcal{C}$ d'équation paramétrique $(t, t, t), t \in R$. Le quadruplet $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'', \mathcal{D}''')$ admet-il une sécante?

Partie B (Sections planes du cube)

Pour un réel $s \in R$, on désigne par $P(s)$ le plan d'équation $x + y + z = 3s$ dans le repère canonique $\mathcal{R}$. On se propose ici d'étudier les sections $P(s) \cap \mathcal{C}$ en fonction du paramètre s.

1. Montrer que si $s \notin [0, 1]$, alors $P(s) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

2. On suppose $s \in]0, \frac{1}{3}[$. Tracer $P(s)$ sur une figure de $\mathcal{C}$. En déduire que $P(s) \cap \mathcal{C}$ est un triangle plein dont on précisera les sommets.

3. On suppose $s \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Déterminer les points d'intersection du plan $P(s)$ avec les droites $(EF), (EH), (BF), (BC), (DC), (DH)$. En déduire une description de $P(s) \cap \mathcal{C}$.

Pour quelles valeurs de $s \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, la section $P(s) \cap \mathcal{C}$ est-elle un polygone régulier?

4. En conclusion, décrire $P(s) \cap \mathcal{C}$ pour tout $s \in [0, 1]$.