L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2013-2014

Contrôle continu du 6 mai 2014

Durée: 2 heures

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.

Exercice 1 (Enveloppe convexe d'une base affine)

On se place dans l'espace affine R^3 dans lequel on fixe une base affine (P_0, P_1, P_2, P_3).

On désigne par S l'isobarycentre de $(P_l)_{0\leq l\leq 3}$ et par S_j l'isobarycentre de $(P_l)_{0\leq l\leq 3, l\neq j}$, $j \in [0,3]$.

1 (Questions de cours)

(i) Donner la définition de l'enveloppe convexe $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ et expliciter ses éléments.

(ii) Donner les coordonnées de S et de S_j, $j \in [0,3]$, dans le repère $(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$.

2 Faire une figure de l'enveloppe convexe $[(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ en précisant, par une construction géométrique, la position des barycentres partiels $S_j, j \in [0,3]$.

3 On revient au cas d'une base affine générale (P_0, P_1, P_2, P_3).

(i) En vous servant d'une propriété de cours que l'on énoncera avec soin, montrer que $\forall j \in [0,3]$, S est élément de la droite (P_jS_j).

(ii) Montrer que $\forall (i,j) \in [0,3]^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_iS_i) \neq (P_jS_j)$.

4 On désigne par H_j le plan affine de R^3 engendré par $(P_l)_{0\leq l\leq 3, l\neq j}$.

(i) Donner, pour tout $j \in [0,3]$, une équation cartésienne

$$h_j(x_1, x_2, x_3) = 0$$

de H_j dans le repère $(P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$.

[Indication: faire attention à H_0.]

(ii) Expliquer pourquoi les parties $h_j^{-1}(R_{\geq 0}) \subset R^3$ sont convexes.

(iii) En ajustant si nécessaire les signes des formes affines $h_j : R^3 \to R$ du point (i), montrer que

$$[P_0, P_1, P_2, P_3] = \bigcap_{0\leq j\leq 3} h_j^{-1}(R_{\geq 0}) \quad \text{(intersection de demi-espaces fermés)}$$

Exercice 2 (Points extrémaux d'un convexe)

Soit $\mathcal{C}$ un convexe du plan affine R^2. On rappelle qu'un point $A \in \mathcal{C}$ est dit extrémal si

$$\forall P, Q \in \mathcal{C},\ A = \text{ milieu } [P,Q] \Rightarrow P = Q = A.$$

1 Montrer que $A \in \mathcal{C}$ est extrémal $\Leftrightarrow \mathcal{C} \setminus \{A\}$ est convexe.

[Indication: pour $\Rightarrow$ on pourra raisonner par contraposition.]

2 On considère la partie convexe $\mathcal{P}$ du plan R^2 suivante

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y\} \bigcup \{(x, y) \mid -1 \leq y + x, -1 \leq y - x, y < 0\}.$$

(i) Faire une figure de $\mathcal{P}$.

(ii) Montrer que les points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1$ et $0 \leq y$ sont des points extrémaux de $\mathcal{P}$.

(iii) Déterminer tous les points extrémaux de $\mathcal{P}$.

(iv) Montrer que tout point non extrémal de $\mathcal{P}$ appartient à un segment dont les extrémités sont des points extrémaux.

3

(i) Quels sont les points extrémaux d'un polygone convexe Π du plan R^2?

(ii) Enoncer et démontrer une propriété analogue à celle de la question **2** (iv) pour le polygone Π.

Exercice 3 (Médiatrices et isométries planes)

On se place dans le plan affine euclidien R^2.

Rappel: pour deux points A et B du plan, l'ensemble des points M qui sont équidistants de A et B est la droite $\Delta_{A,B}$ orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ passant par le milieu I du segment $[A, B]$. Cette droite est appelée la *médiatrice* de $[A, B]$.

On se propose ici d'étudier les isométries affines $f : R^2 \to R^2$ en fonction de leurs points fixes, à l'aide de médiatrices.

1 On suppose que l'isométrie f admet trois points fixes A, B, C non alignés.

(i) Montrer que s'il existe M tel que $f(M) \neq M$ alors $A, B, C \in \Delta_{M,f(M)}$.

(ii) En déduire que f est l'application identité.

2 On suppose que l'isométrie f admet deux points fixes A et B et que $f \neq id$.

(i) Montrer que si C n'est pas élément de la droite (AB) alors $f(C) \neq C$

(ii) Soit s la réflexion affine de droite $\Delta_{C,f(C)}$. Déterminer $s \circ f(A), s \circ f(B), s \circ f(C)$.

(iii) En déduire que $f = s$.

3 On suppose que l'isométrie affine f admet un point fixe A et que f n'est ni l'identité ni une réflexion.

En raisonnant sur un point $C \neq A$ comme au point **2**, montrer que f est une rotation affine du plan de centre A.

Terminologie:

- On appelle *réflexion affine de droite* Δ la symétrie affine de droite fixe Δ parallèlement à la direction $\overrightarrow{\Delta}^{\perp}$.

- On appelle *rotation affine de centre* A toute application affine $f : R^2 \to R^2$ telle que $f(A) = A$ et $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle.