Corrigé du CC2

Exercice 1 (Enveloppe convexe d'une base affine)

1

(i) L'enveloppe convexe de $(P_i)_{0\leq i\leq 3}$ est la plus petite partie convexe $\mathcal{P}$ de R^4 telle que $\forall i,\ P_i \in \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est ici notée $[P_0, P_1, P_2, P_3]$. C'est l'ensemble des barycentres de $(P_i)_{0\leq i\leq 3}$ à coefficients positifs:

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_4 \\ a_0 & a_1 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \forall i, a_i \geq 0 \text{ et } \sum_{0\leq i\leq 3} a_i > 0.$$

(ii)

$$S = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_0 + \frac{1}{4}\overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{P_0P_2} + \frac{1}{4}\overrightarrow{P_0P_3}$$

S est donc le point de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

$$S_1 = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_0 + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_0P_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_0P_3}.$$

S_1 est le point de coordonnées $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. De même, $S_2 : (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ et $S_3 : (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Enfin

$$S_0 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_0 + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_0P_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_0P_3}$$

i.e. S_0: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2

Il s'agit du tétraèdre standard plein T. Le barycentre partiel S_j est l'isobarycentre des sommets de la $j-$ème face. Par associativité, il est situé à l'intersection des médianes.

3

(i) Par associativité, on a

$$S = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & P_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 & P_3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in (S_3P_3).$$

Idem pour les 3 autres droites $(S_jP_j), j = 0, 1, 2$.

(ii) Reste à voir que les droites $(S_jP_j), 0 \leq j \leq 3$, sont distinctes.

Supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$(P_jS_j) = (P_iS_i).$$

Comme

$$S \in \bigcap_{0 \leq i \leq 3} (P_i S_i),$$

ceci équivaut à $(SP_j) = (SP_i)$, i.e. au fait que P_i, P_j, S sont alignés. Mais alors $S \in [P_i, P_j]$, ce qui ne se peut.

4

(i) Tout point P s'écrit $P = P_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i \overrightarrow{P_0 P_i}$

- pour $j \neq 0$, $P_0 \in H_j$ et $P \in H_j$ ssi $x_j = 0$.

- $P \in H_0$ ssi il existe $b, c \in R$ tels que

$$\begin{aligned} P &= P_1 + b\overrightarrow{P_1 P_2} + c\overrightarrow{P_1 P_3} \\ &= P_0 + \overrightarrow{P_0 P_1} + b(\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_2}) + c(\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_0 P_3}) \\ &= P_0 + (1 - b - c)\overrightarrow{P_0 P_1} + b\overrightarrow{P_0 P_2} + c\overrightarrow{P_0 P_3}. \end{aligned}$$

Dès lors $P \in H_0$ ssi $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Conclusion: $h_0(x_1, x_2, x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3)$ et pour $j \neq 0, h_j(x_1, x_2, x_3) = x_j$.

(ii) $R_{\geq 0} = [0, \infty[$ est un convexe de R et l'image réciproque de tout convexe par une forme affine $h : R^3 \to R$ est un convexe de R^3. En particulier, $\forall j, h_j^{-1}(R_{\geq 0})$ est convexe. C'est l'un des deux demi-espaces fermés de bord H_j.

(iii) Tout point $P \in [P_0, P_1, P_2, P_3]$ s'écrit

$$P = P_0 + \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}(\sum_{1 \leq i \leq 3} a_i \overrightarrow{P_0 P_i}), \quad a_j \geq 0,\, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0.$$

Les coordonnées $x_j = \frac{a_j}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}, j \neq 0$ satisfont bien à

$$0 \leq x_j, \quad 0 \leq 1 - \sum_{1 \leq j \leq 3} x_j \qquad (\star)$$

Réciproquement, si P est un point dont les coordonnées satisfont à $(\star)$, en posant $a_0 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$ et $a_j = x_j, j \geq 1$, on a

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in [P_0, P_1, P_2, P_3].$$

<u>Exercice 2</u> (Points extrémaux d'un convexe)

1 Si $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ est convexe, $\forall x, y \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$, le segment $[x, y] \subset \mathcal{C} \setminus \{A\}$; en particulier $A \neq \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer la réciproque, i.e. que *si A est extrémal, alors $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ est convexe* procédons par contraposition: supposons $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ non convexe et soit $P, Q \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$ tels que $[P, Q] \not\subset \mathcal{C} \setminus \{A\}$. Par convexité de $\mathcal{C}$, $A \in [P, Q]$ et donc $A \in]P, Q[$, i.e. il existe $t \in]0, 1[$ tel que $A = P + t\overrightarrow{PQ}$. A est alors le point milieu du segment $[A', A'']$ avec $A' = P + (t - \epsilon)\overrightarrow{PQ}$ et $A'' = P + (t + \epsilon)\overrightarrow{PQ}$ pour $\epsilon > 0$ tel que $0 < t - \epsilon < t + \epsilon < 1$.

2

(i) Je vous laisse la figure de $\mathcal{P}$ (parachute): $\mathcal{P}$ est la réunion du demi-disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1 du demi-plan $y \geq 0$ et du triangle plein de sommets $(-1,0),(0,-1),(1,0)$.

(ii) Par le **1**, il suffit d'observer que $\mathcal{P} \setminus \{A\}$, pour A un point de coordonnées (x,y) telles que $x^2+y^2=1, y \geq 0$, est une partie convexe: en effet, tout segment de $\mathcal{P}$ contenant A a A pour extrémité.

(iii) Par le **1**, les points intérieurs ne sont pas extrémaux; idem pour les points situés sur les segments $](-1,0),(0,-1)[$ et $](0,-1),(1,0)[$. Encore par le **1**, le point $(0,-1)$ est extrémal.

Conclusion: les points extrémaux sont ceux du (ii) et $(0,-1)$.

(iv) Les points intérieurs de coordonnées (ζ,η) sont situés sur la droite $D = \langle(0,-1),(\zeta,\eta)\rangle$ d'équation paramétrique $(t\zeta, t(\eta+1)-1), t \in R$.
Cette droite coupe le demi-cercle d'équation $x^2+y^2=1, y \geq 0$, en un unique point extrémal de coordonnées (a,b) et on a $(\zeta,\eta) \in [(0,-1),(a,b)]$.
Détail: pour expliciter (a,b), il suffit de trouver t tel que $t^2\zeta^2+(t(\eta+1)-1)^2=1$. Il y a 2 solutions $t=0$ (c'est le point $(0,-1)$ à exclure) et $t=\frac{2(\eta+1)}{\zeta^2+(1+\eta)^2}$ (le point recherché) qui donne

$$(a,b) = \frac{1}{\zeta^2+(1+\eta)^2}(2\zeta(\eta+1),(\eta+1)^2-\zeta^2).$$

Le même argument s'applique aux points du bord qui ne sont pas extrémaux: ceux-ci appartiennent à la réunion des segments

$$](-1,0),(0,-1)[\bigcup](0,-1),(1,0)[$$

et $(-1,0),(0,-1),(1,0)$ sont extrémaux.

3

(i) Par le **1**, les points extrémaux de Π sont ses sommets.

(ii) Notons $A_1,\ldots,A_l, l \geq 3$, les l sommets du polygone Π. Les segments $[A_i,A_j], i \neq j$, étant en nombre fini, le **2** (iv) ne peut être vrai pour le polygone Π. (Pour un triangle, ces segments sont les 3 côtés et aucun point intérieur n'est situé sur un tel segment; pour un carré, ces segments sont les 4 côtés et les 2 diagonales, etc...)

Par contre, on peut subdiviser tout polygone Π en $l-2$ triangles

$$\Pi = \bigcup_{3 \leq i \leq l} T_{1,i-1,i}$$

où $T_{1,i-1,i}$ est le triangle de sommets A_1, A_{i-1}, A_i.
Tout point $P \in \Pi$ est donc élément de l'enveloppe convexe $[A_1,A_i,A_{i+1}]$ de trois points extrémaux de Π.

<u>**Exercice 3**</u> (Médiatrices et isométries planes)

1

(i) On suppose qu'il existe M tel que $f(M) \neq M$; on peut donc définir la médiatrice $\Delta_{M,f(M)}$.
Comme f est une isométrie et $f(A)=A$, on a $d(A,M)=d(f(A),f(M))=d(A,f(M))$, i.e. $A \in \Delta_{M,f(M)}$. Idem pour les autres points fixes B,C.

(ii) Par le (i), s'il existe M tel que $f(M) \neq M$, les points A,B,C sont alignés. Contraposons: si A,B,C ne sont pas alignés alors $\forall M, f(M)=M$.

Remarque: on aurait pu observer que l'identité est la seule application affine qui fixe une base affine.

2

(i) Si $C \notin (AB)$ et $f(C) = C$, f fixe 3 points non alignés; par le **1**, $f = id$, ce que nous excluons.

(ii) Comme au **1** (i), on a $A, B \in \Delta_{C,f(C)}$, d'où $s(A) = A, s(B) = B$ et donc $s(f(A)) = s(A) = A, s(f(B)) = s(B) = B$. Par définition $s(C) = f(C)$, d'où $s \circ f(C) = s^2(C) = C$ (car $s^2 = id$).

(iii) L'isométrie $s \circ f$ fixe donc 3 points non alignés; par le **1**, $s \circ f = id$. En composant par s, il vient $f = s$.

3

S'il existe $C \neq A$ tel que $f(C) = C$ alors par les questions **1** et **2**, f est une réflexion ou l'identité, ce que nous excluons. f a donc un unique point fixe A.

Soit maintenant $C \neq A$, $\Delta_{C,f(C)}$ la médiatrice du segment $[C, f(C)]$ et s la réflexion de droite $\Delta_{C,f(C)}$. On a $s(f(A)) = s(A) = A$ (car $A \in \Delta_{C,f(C)}$) et $s(f(C)) = s^2(C) = C$.

L'isométrie $s \circ f$ admet donc 2 points fixes. N'étant pas l'identité (sinon f serait une réflexion, ce que nous excluons), par le **2**, $s \circ f$ est une réflexion, i.e. $s \circ f = s'$ et dès lors $f = s \circ s'$.

On a alors $det \overrightarrow{f} = det \overrightarrow{s}\, det \overrightarrow{s'} = (-1)^2 = 1$. Par la classification de cours, $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle.

Conclusion: f est une rotation plane de centre A.