Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle du 16 mars 2015

Durée : 2 heures

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère de $\mathscr{E}$. Soient a, b, c, d, a', b', c', d' des réels, on suppose que

$$bc' - cb' \neq 0.$$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) sont solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{F}$?
2. Donner, en justifiant la réponse, un système d'équations de la direction de $\mathscr{F}$.

Exercice 2

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les points suivants :

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soient A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs de $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Donner des représentations paramétriques des droites (A_1A') et (B_1B').
   (c) Montrer que les droites (A_1A') et (B_1B') se coupent en un point K.
   (d) Justifier sans calcul supplémentaire que les droites (A_1A') et (C_1C') se coupent en K.
   (e) Démontrer que dans *tout* tétraèdre non aplati, les droites passant par les milieu des arêtes opposées sont concourantes.
   On vient de le démontrer pour le tétraèdre $OABC$.
2. Soit p la projection sur (BCD) parallèlement à la droite (OE).
   (a) Faire un dessin (placer les points $(2, 0, 2)$ et $(2, 2, 2)$ pour obtenir un « cube »).
   (b) Donner une équation du plan (BCD) et un vecteur directeur de (OE).
   (c) Déterminer les coordonnées de l'image par p d'un point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer l'image de la droite (AD) par p.
   (e) Déterminer l'image réciproque du point D par p, puis celle de la droite (AD).

Exercice 3

Dans un plan affine, soit ABC un triangle non aplati. Soit P un point de la droite (BC) distinct de B et C, soit Q un point de (CA) distinct de C et A et soit R un point de (AB) distinct de A et B.

1. Soient k et ℓ deux réels non nuls. Notons h_1 l'homothétie de centre P et de rapport k et h_2 l'homothétie de centre Q et de rapport ℓ. Soit M un point et $M' = h_1 \circ h_2(M)$.

   (a) Calculer $\overrightarrow{PM'}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PQ}$, k et ℓ.

   (b) On suppose que $k\ell \neq 1$. Démontrer que $h_1 \circ h_2$ admet un unique point fixe S et que S appartient à la droite (PQ). Démontrer que $h_1 \circ h_2$ est une homothétie dont le centre appartient à (PQ) et le rapport est $k\ell$.

   (c) On suppose que $k\ell = 1$. Montrer que $h_1 \circ h_2$ une translation.

   On pourrait vérifier de même, mais on va l'admettre, que si t est une translation de vecteur v, alors $t \circ h_2$ est une homothétie dont le centre appartient à $Q + \mathrm{Vect}(v)$ si $\ell \neq 1$.

2. On suppose que P, Q et R sont alignés.

   (a) Faire un dessin.

   Soient h_3 l'homothétie de centre R qui envoie B sur A ; h_2 l'homothétie de centre Q qui envoie A sur C ; h_1 l'homothétie de centre P qui envoie C sur B.

   (b) Que peut être la composée d'homothéties $h_1 \circ h_2 \circ h_3$?

   (c) En remarquant que B est fixe par la composée $h_1 \circ h_2 \circ h_3$, montrer la relation

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1. \tag{1}$$

3. On suppose que (1) est vraie et que $P \neq Q$. Soit R' l'intersection de (PQ) et (AB).

   (a) Montrer que l'on a : $\dfrac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

   (b) En déduire que $R = R'$.
   Indication : $\overline{RA} = \overline{RB} + \overline{BA}$.