Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle du 27 avril 2015

Durée : 1 heure 30

- *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
- *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
- *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Tous les espaces considérés sont des espaces affines réels.

Exercice 1
Soit $\mathscr{E}$ un espace. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{R} = \left(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$.

1. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$. Déterminer les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du barycentre
$$M = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et soient $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}$.
   (a) Déterminer une famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que M soit le barycentre
$$M = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
   (b) Déterminer toutes les familles $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telles que M soit le barycentre
$$M = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (hors barème : à traiter à la maison)
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien. Soit A un point de $\mathscr{P}$, soit r un réel strictement positif et soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. Soit enfin $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$.

1. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. Soit M un point de $\mathscr{D}$.
   (a) Montrer que $AM \geqslant AH$.
   (b) Montrer que $AM = AH$ si et seulement si $M = H$.
2. Soit M un point de $\mathscr{D}$. Écrire une condition sur MH pour que M appartienne à $\mathscr{C}$.
3. En déduire que l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est formée de zéro, un ou deux points.
4. Montrer que si l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ne contient qu'un seul point, alors ce point est H et $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à (AH).
5. Démontrer que l'intersection de deux cercles ayant des centres distincts est formée de zéro, un ou deux points.
   On pourra travailler dans un repère orthonormé du plan et ramener la question à l'intersection d'un cercle et d'une droite.

Dans la situation de la question 4, on dit que $\mathscr{D}$ est *tangente* à $\mathscr{C}$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien et soient A et B deux points de $\mathscr{P}$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Soit $M \in \mathscr{P}$. Démontrer l'équivalence :

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0 \iff IM = \frac{1}{2}AB.$$

2. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A et de rayon $r > 0$. Déduire de la question 1 une construction à la règle et au compas des tangentes à $\mathscr{C}$ issues de B, lorsqu'il en existe.

Exercice 4

Soit $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé canonique (O, i, j, k).

1. Soit $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation

$$\mathscr{P} \ : \quad x + y + z = 0.$$

Déterminer les coordonnées de l'image par p d'un point $M = (x, y, z)$ de $\mathscr{E}$.

2. Déterminer l'image $I'J'K'$ du triangle IJK par p, où I, J et K sont les points

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle propriété remarquable possède le triangle $I'J'K'$?

3. On définit le cube $\mathscr{C}$ comme l'enveloppe convexe des huit points

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer l'image de ces huit points par p.

   (b) Faire un dessin dans le plan $\mathscr{P}$ (on y représentera I', J' et K').

   (c) Décrire l'image $p(\mathscr{C})$ du cube $\mathscr{C}$ (justifier brièvement).

   (d) Est-ce que la réflexion par rapport au plan $\mathscr{P}$ stabilise le cube $\mathscr{C}$?

   (e) (Question bonus.) Vrai ou faux ? L'image d'un point extrémal par une application affine est un point extrémal.

4. Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{x+1}{\sqrt{2}} + y \\ -\frac{x+1}{\sqrt{2}} + z \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que q est une projection. Déterminer son image $\mathscr{Q} = q(\mathbb{R}^3)$ et la direction du noyau de $\overrightarrow{q}$.

   (b) Est-ce que q est une projection orthogonale ?

   (c) Déterminer l'image de $\mathscr{C}$ par q.

   (d) Faire un dessin dans $\mathscr{Q}$. On y fera figurer les images des arêtes de $\mathscr{C}$.