Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle du 27 avril 2015

Exercice 1

1. Par définition, on a : $\sum_{j=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_j M} = \overrightarrow{0}$. En écrivant $\overrightarrow{A_j M} = \overrightarrow{A_j A_0} + \overrightarrow{A_0 M}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}, \quad \text{d'où : } \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j} \overrightarrow{A_0 A_i}.$$

   On a donc : $x_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. (a) On a : $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0 A_i}$. Posons $\lambda_i = x_i$ si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, de sorte que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$. D'après la première question, le barycentre $\left(\begin{smallmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{smallmatrix}\right)$ a pour coordonnées $x_i = \frac{\lambda_i}{1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

   (b) Supposons que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ soit tel que $M = \left(\begin{smallmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{smallmatrix}\right)$. On a alors en identifiant les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ le système :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j}.$$

   Posons $s = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j$, qui est un réel non nul, le système précédent devient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_i = s x_i \quad \text{et} \quad \lambda_0 = s - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = s\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\Big). \tag{1}$$

   Réciproquement, pour $s \in \mathbb{R}^*$, on définit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ par les équations (1), alors par la première question, le barycentre $\left(\begin{smallmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{smallmatrix}\right)$ a bien pour coordonnées :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j} = \frac{s x_i}{s} = x_i.$$

Exercice 2

1. (a) Puisque (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$, le triangle AHM est rectangle en H. On a donc : $AM^2 = AH^2 + HM^2 \geqslant AH^2$.

   (b) Il y a égalité si et seulement si $HM^2 = 0$, c'est-à-dire si $H = M$.

2. On a : $M \in \mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2 = r^2$ si et seulement si $HM^2 = r^2 - AH^2$.

3 et 4. Si $r^2 < AH^2$, il ne peut pas exister de point $M \in \mathscr{D}$ tel que $HM^2 = r^2 - AH^2$. Si $r^2 = AH^2$, le point M appartient à l'intersection si et seulement si $HM^2 = 0$, c'est-à-dire si M est le point H. Si $r^2 > AH^2$,

5. Choisissons un repère orthonormé de $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{C}'$ un cercle distinct de $\mathscr{C}$, soit A' son centre et r' son rayon. Avec des notations évidentes, un point M de coordonnées (x, y) appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$AM^2 = r^2 \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2,$$

de même pour $\mathscr{C}'$. Par suite,

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}' &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y + x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x_{A'} x - 2y_{A'} y + x_{A'}^2 + y_{A'}^2 - r'^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y + x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0 \\ 2(x_{A'} - x_A)x - 2(y_{A'} - y_A)y + x_A^2 + y_A^2 - r^2 - x_{A'}^2 - y_{A'}^2 + r'^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $A \neq A'$, on a $x_{A'} \neq x_A$ ou $y_{A'} \neq y_A$ donc la deuxième équation est celle d'une droite $\mathscr{D}$: ainsi, $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, qui est donc formée de zéro, un ou deux points.
La droite $\mathscr{D}$ est appelé axe radical *de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Elle est perpendiculaire à (AA') et, lorsqu'ils se coupent, c'est la droite passant par les deux points d'intersection.*

Exercice 3

1. On peut utiliser l'égalité de la médiane, ou, plus directement avec $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$:

$$\begin{aligned} AB^2 - (2MI)^2 &= \langle \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MI} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \rangle \\ &= \langle 2\overrightarrow{AM}, 2\overrightarrow{MB} \rangle = -2\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle. \end{aligned}$$

L'équivalence cherchée en résulte.

2. Une droite contenant B est tangente à $\mathscr{C}$ si et seulement si elle coupe $\mathscr{C}$ en un point M tel que $(BM) \perp (AM)$. D'après la question précédente, cela signifie que M appartient à $\mathscr{C}$ et au cercle de centre I et de rayon $AB/2$ – il passe par A et B.

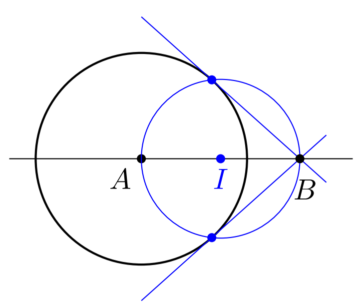

Figure 1 – Construction des tangentes à un cercle passant par un point donné

D'où la construction, étant donnés A, B et $\mathscr{C}$:

(a) tracer le milieu I de $[AB]$ (classique) ;

(b) tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I qui contient A ;

(c) les points d'intersection (éventuels) de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les points de contacts des tangentes à $\mathscr{C}$ issues de B.

Exercice 4

1. L'orthogonal de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est la droite engendrée par $u = (1,1,1)$. En effet, O est un point de $\mathscr{P}$ et $M \in \mathscr{P}$ SSI $\langle \overrightarrow{OM}, u\rangle = 0$, de sorte que $\overrightarrow{\mathscr{P}} = u^\perp$, d'où il resulte que $\overrightarrow{\mathscr{P}}^\perp = \mathrm{Vect}(u)$.

   Le point $M' = p(M) = (x', y', z')$ est donc caractérisé par : $M' \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{MM'} \in \mathrm{Vect}(u)$. Autrement dit, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = tu$, d'où $(x', y', z') = (x, y, z) + t(1, 1, 1)$ et $M' \in \mathscr{P}$, c'est-à-dire : $(x + t) + (y + t) + (z + t) = 0$. Cela donne $t = -(x + y + z)/3$ et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}.$$

2. On trouve, en remplaçant (x, y, z) par les coordonnées de I, J et K :

$$I' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ J' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ K' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   On constate que le triangle $I'J'K'$ est invariant par permutation cyclique des coordonnées. Cela suggèrequ'il est équilatéral. En effet :

$$I'J' = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + 0^2} = J'K' = K'I'.$$

3. (a) Soit $A'_k = p(A_k)$. On vérifie que $A'_0 = A'_7 = O$. Pour les autres, on constate que pour $A_k = (x, y, z)$, on a : $\overrightarrow{OA_k} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$, donc par linéarité de $\overrightarrow{p}$ et vu que $p(O) = O$: $\overrightarrow{Op(A_k)} = x\overrightarrow{OI'} + y\overrightarrow{OJ'} + \overrightarrow{OK'}$. On trouve :

$$A'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ A'_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ A'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$A'_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix},\ A'_5 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\ A'_6 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},\ A'_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) On constate que tous les $\overrightarrow{OA_k}$ valent $\pm\overrightarrow{OI'}$, $\pm\overrightarrow{OJ'}$ ou $\pm\overrightarrow{OK'}$.

   (c) L'image $p(\mathscr{C})$ du cube $\mathscr{C}$ est un hexagone régulier : c'est l'enveloppe convexe des A'_k $(0 \leqslant k \leqslant 7)$, parmi lesquels A'_0 et A'_7 sont intérieurs à l'enveloppe des autres, $A'_6A'_5A'_3$ et $A'_4A'_1A'_2$ sont des triangles équilatéraux, homothétique de $I'J'K'$ et symétriques l'un de l'autre par rapport à leur centre O.

   (d) C'est faux en général, voir par exemple les points extrémaux A_0 et A_7 et leurs images.

4. (a) Il suffit de montrer que $q \circ q = q$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a bien :

$$q \circ q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{x+1}{\sqrt{2}} + y \\ -\frac{x+1}{\sqrt{2}} + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{-1+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{\sqrt{2}} + y \\ -\frac{-1+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{\sqrt{2}} + z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   L'image de q est contenue dans le plan d'équation $x = -1$. Vu que $q(-1, y, z) = (-1, y, z)$, c'est ce plan entier.

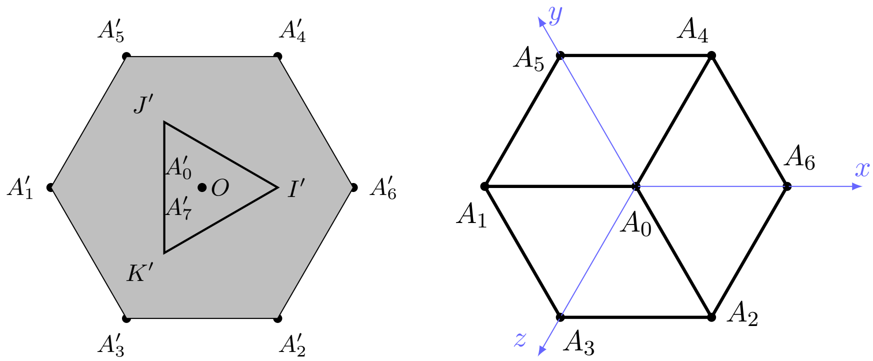

FIGURE 2 – Projection orthogonale d'un cube (perspective isométrique)

Dans la base canonique, l'image d'un vecteur $u = (x, y, z) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ est :

$$\overrightarrow{q}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + y \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + z \end{pmatrix}.$$

Le vecteur u appartient donc au noyau si et seulement si $\overrightarrow{q}(u) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire si $y = x/\sqrt{2}$ et $z = x/\sqrt{2}$. On en déduit que $\operatorname{Ker} \overrightarrow{q}$ est la droite engendré par $(\sqrt{2}, 1, 1)$.

(b) Comme le vecteur $(\sqrt{2}, 1, 1)$ n'est pas orthogonal au plan d'équation $x = -1$, la projection q n'est pas orthogonale.

(c) Comme $\mathscr{C}$ est l'enveloppe convexe de ses huit sommets A_k, $q(\mathscr{C})$ est celle des $A_k'' = q(A_k)$. Si $x = -1$, $-(x+1)/\sqrt{2} = 0$; si $x = 1$, $-(x+1)/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$. On calcule alors :

$$A_0'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}+1 \end{pmatrix},\ A_1'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}+1 \end{pmatrix},\ A_3'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A_4'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ A_5'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_6'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ A_7'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Voici un dessin.

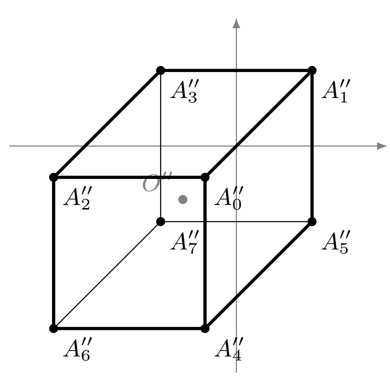

FIGURE 3 – Le cube $\mathscr{C}$ en perspective cavalière