Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle du 11 mai 2015

Durée : 1 heure 30

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*
— *Le barème (sur 45 points) est susceptible de modifications.*

Tous les espaces considérés sont des espaces affines réels.

Exercice 1. (2 points)
Démontrer que l'image d'un parallélogramme par une application affine est un parallélogramme.

Exercice 2. (4 points)
Soit s une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ dans un plan affine euclidien. Décrire les droites Δ telles que $s(\Delta) = \Delta$. *On pourra montrer que* $\overrightarrow{\Delta}$ *est un espace propre de* $\overrightarrow{s}$.

Exercice 3. (4 points)
Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A et de rayon $R > 0$. Soit B un point, on fixe une droite $\mathscr{D}$ qui contient B et coupe $\mathscr{C}$ en M et M'. Soit P le milieu de $[MM']$.

1. Faire un dessin.
2. Justifier que (AP) est perpendiculaire à (MM') (lorsque ces droites existent).
3. Démontrer l'égalité :
$$\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'} \rangle = AB^2 - R^2.$$

Exercice 4. (10 points)
Soit $\mathscr{E}$ un espace. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{R} = \big(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\big)$.

1. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Déterminer les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du barycentre
$$M = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et soient $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}$. Déterminer toutes les familles $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telles que M soit le barycentre
$$M = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

3. On suppose désormais que $n = 2$. On note $A = A_0$, $B = A_1$ et $C = C_1$. Soient a, b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$ et $c \neq 0$. On suppose qu'il existe des réels k et ℓ tels que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{BM} = \ell\left(a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}\right). \end{cases}$$

Montrer que M est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (25 points)

Dans un plan affine euclidien orienté, soit ABC un triangle non aplati. Soient $e_1 = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et e_2 un vecteur tel que $\mathscr{R} = (A, e_1, e_2)$ est un repère orthonormé direct. On note

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB.$$

Rappel : Étant donné une droite $\mathscr{D}$ d'équation $ux + vy + w = 0$ et un point M de coordonnées (x, y), la distance de M à $\mathscr{D}$ est :

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ux + vy + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

1. (a) Donner une équation des droites (AB) et (AC) dans le repère $\mathscr{R}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points M tels que $d\big(M, (AB)\big) = d\big(M, (AC)\big)$ est la réunion des deux bissectrices issues de A dans le triangle ABC.
2. (a) Soit I l'intersection des bissectrices intérieures issues de A et B. Démontrer que I appartient à la bissectrice issue de C. En déduire qu'il existe un cercle tangent aux trois côtés du triangle.
   (b) Donner un vecteur directeur de (AI) et de (BI) en fonction des seuls points A, B et C. En déduire que I est le barycentre $\left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{smallmatrix}\right)$.
   On pourra utiliser la dernière question de l'exercice 3.
   (c) Soit I_C l'intersection des bissectrices extérieures issues de A et B. Démontrer que I_C appartient à la bissectrice issue de C. En déduire que I_C est le centre d'un cercle tangent aux droites (AB), (AC) et (BC).
   (d) Déterminer les coordonnées barycentriques de I_C.
3. Soit O l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ et A' le milieu de $[BC]$.
   (a) Montrer que O appartient à la médiatrice de $[AC]$. En déduire qu'il existe un unique cercle qui contient A, B et C.
   On note R le rayon de ce cercle.
   (b) Faire un dessin.
   (c) Démontrer que $\dfrac{\sin\widehat{A}}{BC} = \dfrac{1}{2R}$, où $\widehat{A}$ est une mesure de l'angle géométrique $\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\big)$.
   On pourra appliquer le théorème de l'angle inscrit.
4. Démontrer que l'on a : $I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \sin\widehat{A} & \sin\widehat{B} & \sin\widehat{C} \end{pmatrix}$.