Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle du 11 mai 2015

Durée : 1 heure 30

Exercice 1. (2 points)
Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine et soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ l'application linéaire associée. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans $\mathscr{E}$. On a donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Soient $A' = f(A)$, etc. On a :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{f(D)f(C)} = \overrightarrow{D'C'},$$

de sorte que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Exercice 2. (4 points)
Soit Δ une droite stable par une réflexion plane s d'axe $\mathscr{D}$. On montre que Δ est soit $\mathscr{D}$, soit perpendiculaire à $\mathscr{D}$.
Comme $s(\Delta) = \Delta$ on a : $\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta}$. Cela signifie que l'image d'un vecteur directeur v de Δ par $\overrightarrow{s}$ appartient à $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Vect}(v)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{s}(v) = \lambda v$. Or les espaces propres de $\overrightarrow{s}$ sont les droites $\overrightarrow{\mathscr{D}}$, associée à la valeur propre 1, et $\overrightarrow{\mathscr{D}}^{\perp}$, associée à la valeur propre -1. D'où : $v \in \overrightarrow{\mathscr{D}}$ ou $v \in \overrightarrow{\mathscr{D}}^{\perp}$, de sorte que Δ est parallèle ou perpendiculaire à $\mathscr{D}$.
Si $\Delta = \mathscr{D}$, on a bien sûr : $s(\Delta) = \Delta$. Si Δ est parallèle à et différente de $\mathscr{D}$, son image est distincte de Δ [par exemple parce qu'un point et son image sont dans deux demi-plans différents de frontière $\mathscr{D}$ alors qu'une droite parallèle à $\mathscr{D}$ est tout entière dans un demi-plan ; ou bien parce que dans un repère orthonormé convenable où $\mathscr{D}$ a pour équation $y = 0$, une telle droite a une équation de la forme $y = a$ avec $a \neq 0$ et son image $y = -a$].
Si Δ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$, de sorte que $\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta}$, et soit A l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ. Alors $s(\Delta) = s(A) + \overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = A + \overrightarrow{\Delta} = \Delta$.

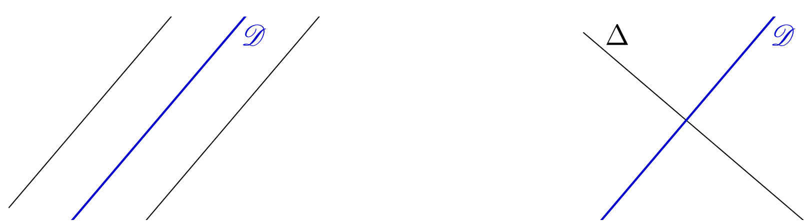

Figure 1 – Droite strictement parallèle (non stable) et droite perpendiculaire (stable)

Exercice 3. (4 points)
Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A et de rayon $R > 0$. Soit B un point, on fixe une droite $\mathscr{D}$ qui contient B et coupe $\mathscr{C}$ en M et M'.

1. Voir la figure 2.
2. Comme $AM = AM' = R$, le point A est sur la médiatrice de $[MM']$ donc $(AP) \perp (MM')$.

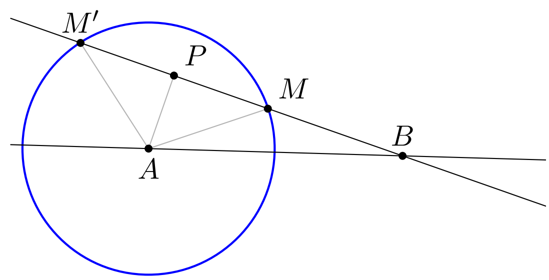

FIGURE 2 – Puissance d'un point par rapport à un cercle

3. Soit P le milieu de $[MM']$. On a :

$$\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'} \rangle = \langle \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM'} \rangle = BP^2 + \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} \rangle + \langle \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'} \rangle.$$

Le triangle ABP est rectangle en P et on a : $BP^2 = AB^2 - AP^2$.
On a : $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{0}$, ce qui annule le terme du milieu et donne :

$$\langle \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'} \rangle = -PM^2 = -AM^2 + AP^2$$

grâce au théorème de Pythagore à nouveau. Au bilan :

$$\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'} \rangle = AB^2 - AP^2 - AM^2 + AP^2 = AB^2 - R^2.$$

Exercice 4. (10 points)

1. On a : $\sum_{j=0}^n \alpha_i \overrightarrow{A_j M} = \overrightarrow{0}$. De plus, pour tout $j \geqslant 1$, on a : $\overrightarrow{A_j M} = \overrightarrow{A_j A_0} + \overrightarrow{A_0 M}$ donc :

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \, \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}, \quad \text{d'où : } \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} \overrightarrow{A_0 A_i}.$$

On a donc : $x_i = \dfrac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. On a : $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0 A_i}$. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $M = \left(\begin{smallmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{smallmatrix} \right)$. On a alors en identifiant les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ le système :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j}.$$

Posons $s = \sum_{j=0}^n \alpha_j$, qui est un réel non nul, le système précédent devient :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \alpha_i = s x_i \quad \text{et} \quad \alpha_0 = s - \sum_{i=1}^n \alpha_i = s\Big(1 - \sum_{i=1}^n x_i\Big). \tag{1}$$

Réciproquement, pour $s \in \mathbb{R}^*$, on définit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ par les équations (1), alors par la première question, le barycentre $\left(\begin{smallmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{smallmatrix} \right)$ a bien pour coordonnées :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \frac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} = \frac{s x_i}{s} = x_i.$$

3. Une méthode consiste à écrire les hypothèses en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ce qui revient à calculer les coordonnées dans la base du repère $\mathscr{R}$:
$$\overrightarrow{BM} = -\ell a\overrightarrow{AB} + \ell c\big(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\big) = -\ell(a+c)\overrightarrow{AB} + \ell c\overrightarrow{AC}.$$
D'autre part :
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = (kb-1)\overrightarrow{AB} + kc\overrightarrow{AC}.$$
Comme $\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\big)$ est une base, il vient :
$$\begin{cases} -\ell(a+c) = kb-1 \\ \ell c = kc. \end{cases}$$
Comme $c \neq 0$, on a $k = \ell$ puis, en reportant dans la première équation : $-k(a+c) = kb-1$, soit : $k = 1/(a+b+c)$. On reporte :
$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$
D'après les premières questions, M est bien le barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (25 points)

1. (a) La droite (AB) est l'axe des abscisses, elle a pour équation $y = 0$. Quant à (AC), elle passe par l'origine et elle est dirigée par le vecteur $\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$ qui a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$, donc une équation est : $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$.
Les équations des bissectrices s'obtiennent en remplaçant θ par $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne en posant $\alpha = \frac{\theta}{2}$:
$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \quad \text{et} \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0.$$
(b) Soit M tel que $d\big(M, (AB)\big) = d\big(M, (AC)\big)$. Cela s'écrit : $y^2 = (x\sin\theta - y\cos\theta)^2$. En regroupant tout dans un même membre et en développant, il vient :
$$-\sin^2\theta\, x^2 + 2\sin\theta\cos\theta xy + \sin^2\theta y^2 = 0.$$
Comme ABC n'est pas aplati, $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ donc $\sin\theta \neq 0$, ce qui autorise à diviser. On fait apparaître l'angle $\alpha = \theta/2$ par : $\sin\theta = 2\sin\alpha\cos\alpha$ et $\cos\theta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Ainsi, M est équidistant de (AB) et (AB) si et seulement si
$$-2\sin\alpha\cos\alpha x + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)xy + 2\sin\alpha\cos\alpha y^2 = 0. \tag{2}$$
Or le produit des deux équations trouvées à la question précédente est :
$$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha x^2 + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)xy - \sin\alpha\cos\alpha y^2,$$
donc l'équation 2 définit la réunion des deux bissectrices issues de A.

2. (a) D'après ce qui précéde, on a : $d\big(I, (AB)\big) = d\big(I, (AC)\big)$ et $d\big(I, (BA)\big) = d\big(I, (BC)\big)$, d'où : $d\big(I, (AC)\big) = d\big(I, (BC)\big)$ et I appartient à une bissectrice issue de C.
Soient E, F, G les projections orthogonales de I sur (BC), (AC) et (AB). On a donc par exemple : $IE = d\big(I, (BC)\big)$ et $(IE) \perp (BC)$ donc le cercle de centre I et de rayon IE est tangent à (BC). Comme $IE = IF = IG$, il est tangent aux trois côtés.

(b) La bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC est dirigée par

$$v = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{AB \cdot AC}\big(AC\overrightarrow{AB} + AB\overrightarrow{AC}\big) = \frac{1}{bc}\big(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\big).$$

Comme $I \in A + \mathrm{Vect}(v)$, il existe donc k tel que $\overrightarrow{AI} = k\big(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\big)$.

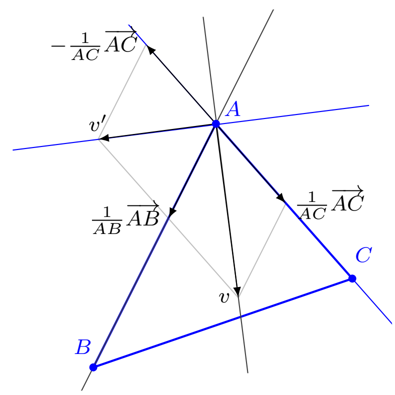

FIGURE 3 – Bissectrices intérieure et extérieure (voir les losanges)

De même, un vecteur directeur de (BI) est :

$$v = \frac{1}{BA}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{BC}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{AB \cdot BC}\big(BC\overrightarrow{AB} + AB\overrightarrow{AC}\big) = \frac{1}{ac}\big(a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}\big).$$

Il existe donc ℓ tel que $\overrightarrow{BI} = \ell\big(a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{AC}\big)$. D'après la dernière question de l'exercice 3, I est bien le barycentre annoncé.

(c) Le même raisonnement que pour I montre que $d\big(I_C, (AB)\big) = d\big(I_C, (AC)\big)$ et $d\big(I_C, (BA)\big) = d\big(I_C, (BC)\big)$, d'où : $d\big(I_C, (AC)\big) = d\big(I_C, (BC)\big)$ et I_C appartient à une bissectrice issue de C (il se trouve que c'est la bissectrice intérieure, voir plus bas). Comme avec I, du fait que I_C est à la même distance $D = d\big(I_C, (AC)\big)$ des trois droites, le cercle de centre I_C et de rayon D est tangent aux trois droites.

(d) La bissectrice extérieure issue de A (resp. B) est dirigée par $v' = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$ (resp. $\frac{1}{BA}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$). Par suite, il existe k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AI_C} = k\Big(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}\Big) = \frac{k}{AB \cdot AC}\big(AC\,\overrightarrow{AB} - AB\overrightarrow{AC}\big) = \frac{k}{bc}\big(b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}\big),$$
$$\overrightarrow{BI_C} = \ell\Big(\frac{1}{AB}\,\overrightarrow{BA} - \frac{1}{BC}\overrightarrow{BC}\Big) = \frac{\ell}{AB \cdot BC}\big(BC\,\overrightarrow{AB} - AB\overrightarrow{AC}\big) = \frac{\ell}{ac}\big(a\overrightarrow{BA} - c\overrightarrow{BC}\big).$$

Comme le triangle n'est pas aplati, on a : $a + b - c \neq 0$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).

D'après la dernière question de l'exercice 3, I_C est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & -c \end{pmatrix}$.

Remarque : on en déduit que $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{a+b-c}\big(a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}\big)$ et donc que I est sur la bissectrice *intérieure* issue de C, comme annoncé et visible sur le dessin.

3. (a) Comme O appartient aux médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$, on a : $OA = OB$ et $OB = OC$ donc $OA = OC$, *i.e.* O appartient à la médiatrice de $[AC]$. Le cercle de centre O et de rayon OA contient donc B et C. Inversement, si un cercle passe par A, B et C, alors son centre appartient à la médiatrice de A et B donc c'est O.

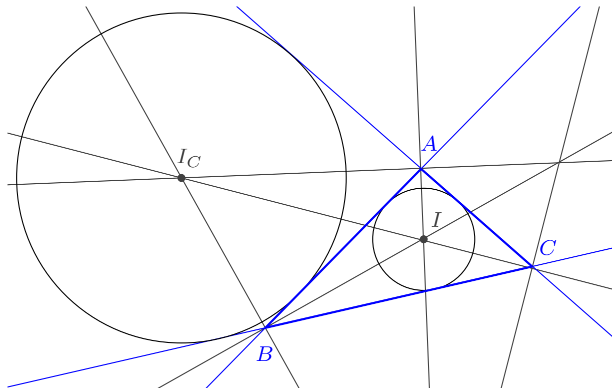

Figure 4 – Cercle inscrit et un des trois cercles exinscrits

(b) Voici un dessin.

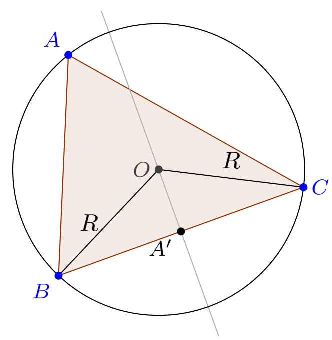

Figure 5 – Loi des sinus

(c) Par le théorème de l'angle inscrit, on a : $2(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \pmod{2\pi}$

Démontrer que $\dfrac{\sin \widehat{A}}{BC} = \dfrac{1}{2R}$, où $\widehat{A}$ est une mesure de l'angle géométrique $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Par conséquent, l'angle géométrique $\widehat{A}$ du triangle ABC est égal à l'angle $\widehat{O} = \widehat{A'OC}$ du triangle $A'OC$. Le sinus de cet angle vaut :

$$\sin \widehat{A} = \sin \widehat{O} = \frac{A'C}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

4. On en déduit la « loi des sinus » :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R},$$

puis

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 2R \sin \widehat{A} & 2R \sin \widehat{B} & 2R \sin \widehat{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \sin \widehat{A} & \sin \widehat{B} & \sin \widehat{C} \end{pmatrix}.$$