Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle final : 2 juin mars 2015

Durée : 3 heures

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Exercice 1.
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 1 et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui possède deux points fixes distincts A et B. Que peut-on dire de f ?

Exercice 2.
Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan. Les coordonnées seront relatives au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c \neq 0$. Calculer les coordonnées du barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
2. Soit M de coordonnées (x, y). Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
3. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. On suppose que les barycentres suivants existent :
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} B & C \\ b & c \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & C \\ a & c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que A, M et P sont alignés et que P appartient à la droite (BC).
   On montrerait de même que B, M et Q d'une part, C, M et R d'autre part sont aussi alignés, que Q appartient à (AC) et R à (AB).
   (b) Calculer $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$, $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ et $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ en fonction de a, b, c.
   (c) En déduire que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.
4. Soit P (resp. Q, R) un point de la droite (BC) (resp. (AC), (AB)). On suppose P, Q et R distincts de A, B et C.
   (a) On pose $c = 1$, $b = -\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ et $a = -\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$. Calculer $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ et exprimer P, Q et R comme des barycentres des points A, B, C.
   (b) On suppose que $a + b + c \neq 0$. Montrer que (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.
   On pourra introduire le barycentre $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
   (c) On suppose que $a + b + c = 0$. Montrer que (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles.
   C'est le théorème de Céva.
5. On se place désormais dans un plan affine *euclidien*. Soient P, Q et R des points sur les segments $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ privés de leurs extrémités.

(a) Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1.$$

(b) Démontrer que $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} \times \dfrac{AB}{AC}$.
Utiliser la loi des sinus dans deux triangles judicieusement choisis.

(c) En déduire que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} \times \frac{\sin \widehat{CBQ}}{\sin \widehat{ABQ}} \times \frac{\sin \widehat{ACR}}{\sin \widehat{BCR}} = 1.$$

C'est la « version trigonométrique du théorème de Céva ».

6. On suppose toujours que le plan est euclidien. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Soit M un point à l'intérieur du triangle ABC. On note M_a (resp. M_b, M_c) le symétrique de M par rapport à la bissectrice (AI) (resp. (BI), (CI)).
   (a) Faire un dessin.
   (b) Quelles sont les images des droites (AB) et (AM) par la réflexion d'axe (AI) ?
   (c) Démontrer que les droites (AM_a), (BM_b) et (CM_c) sont concourantes.
   On pourra partir du fait que (AM), (BM) et (CM) sont concourantes et appliquer deux fois la version trigonométrique du théorème de Céva.

   Le point de concours s'appelle le conjugué isogonal *de M par rapport à ABC.*

Exercice 3.
On se place dans l'espace affine euclidien orienté $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$ standard. Soit $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{T}$) le cube (resp. le tétraèdre) défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathscr{S} = \{A_0, \dots, A_7\}$ (resp. $\mathscr{S}_{\mathscr{T}} = \{A_1, A_2, A_4, A_7\}$), où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Faire un dessin.
2. Soit $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ le groupe des isométries g de $\mathbb{R}^3$ telles que $g(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. On rappelle qu'une isométrie g de $\mathscr{E}$ appartient à $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ si et seulement si $g(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$.
   (a) Quelle est l'idée clé de la preuve de ce résultat ?
   Une réponse en deux mots peut suffire !
   (b) Démontrer que l'origine $O = (0, 0, 0)$ est fixée par tout élément g de $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$.
3. Soient I le milieu de $[A_1A_2]$ et J le milieu de $[A_4A_7]$ et soit $\mathscr{P}$ le plan médiateur de $[IJ]$. Soit enfin s la réflexion de plan $\mathscr{P}$.
   (a) Donner une équation de $\mathscr{P}$. Sur le dessin précédent, représenter I, J et $\mathscr{T} \cap \mathscr{P}$.

(b) Soit r la rotation d'axe la droite (IJ) orientée par le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et d'angle $\pi/2$. Écrire les coordonnées de l'image $r(M)$ d'un point $M = (x, y, z) \in \mathscr{E}$ par r.

(c) Même question avec la réflexion s de plan $\mathscr{P}$.

(d) Soit $\mathscr{Q}$ un plan stable par $r \circ s$. Démontrer que la droite $\overrightarrow{\mathscr{Q}}^{\perp}$ est propre pour $\overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s}$. En déduire tous les plans stables par $r \circ s$.

(e) Les isométries r, s et $r \circ s$ appartiennent-elles à $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$?

(f) Les isométries r, s et $r \circ s$ préservent-elles le tétraèdre $\mathscr{T} = A_1A_2A_4A_7$?

4. On va construire un dodécaèdre régulier en ajoutant « des petits toits » sur chaque face de $\mathscr{C}$. Soient a et b deux réels, avec $0 < a < 1$ et $1 < b$. Considérons les points :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b+1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ b+1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -a \\ b+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dessiner le cube et les solides $A_0A_1A_3A_2EF$ et $A_0A_1A_5A_4GH$.

(b) Donner une équation du plan (A_0A_1E).

(c) Déterminer une condition sur a et b pour que le plan (A_0A_1E) contienne G. Vérifier qu'il contient alors H.

(d) Déterminer une condition sur a et b pour assurer l'égalité de distances $A_0E = GH$.

(e) Déterminer a et b de sorte que le plan (A_0A_1E) contienne G et que $A_0E = GH$.

(f) Vérifier que l'on a : $A_0E = EA_1 = A_1H = HG = GA_0$.

(g) Calculer l'angle formé par les plans (A_0A_1E) et (A_0A_2E).
On le caractérisera par une ligne trigonométrique dont on donnera une expression.

Rappel : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté standard, le produit vectoriel de deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ est } \quad v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}.$$

C'est un vecteur orthogonal à v_1 et v_2 et sa norme est $\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot |\sin(\widehat{v_1, v_2})|$.