Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Contrôle final : 2 juin mars 2015

Exercice 1.
Première solution : Un couple de points distincts sur une droite en est un repère affine. Il existe une unique application affine qui envoie ce repère sur (A, B), c'est l'identité.
Deuxième solution : Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$, l'abscisse $F(x)$ de l'image d'un point M d'abscisse x est de la forme : $F(x) = ax+b$ où a et b sont des scalaires indépendants de M. Comme $f(A) = A$, on a : $0 = F(0) = b$. Comme $f(B) = B$ et que B a pour abscisse 1, on a : $1 = F(1) = a$. D'où : $F(x) = x$ pour tout x et f est l'identité.
Troisième solution : Soit $M \in (AB)$. Soit x tel que $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 1-x & x \end{smallmatrix}\right)$ (c'est l'unique valeur telle que $\overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AA}+x\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB}$: c'est l'abscisse de M dans le repère précédent). Par préservation du barycentre par une application affine, on a : $f(M) = \left(\begin{smallmatrix} f(A) & f(B) \\ 1-x & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 1-x & x \end{smallmatrix}\right) = M$.

Exercice 2.
Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan. Les coordonnées seront relatives au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Le barycentre $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$ est caractérisé par :
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC},$$
donc les coordonnées de M sont $\left(\frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$.
2. Par définition des coordonnées, on a :
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (1-x-y)\overrightarrow{AA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$
donc $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1-x-y & x & y \end{pmatrix}$.
Plus généralement, si $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$, la question précédente donne : $x = \frac{b}{a+b+c}$ et $y = \frac{c}{a+b+c}$. Posons $k = a+b+c \neq 0$, alors $b = kx$, $c = ky$ et $a = k-b-c = k(1-x-y)$.
Réciproquement, pour tout $k \neq 0$, $\begin{pmatrix} A & B & C \\ k(1-x-y) & kx & ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1-x-y & x & y \end{pmatrix} = M$
3. (a) On a, par associativité du barycentre :
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ a & b+c \end{pmatrix},$$
d'où : $a\overrightarrow{MA}+(b+c)\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, A, M et P sont alignés. De plus, $b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ donc P appartient à la droite (BC).
   (b) Comme $B \neq C$ et $bc \neq 0$, P n'est confondu ni avec B, ni avec C. De $b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$, on déduit donc : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{c}{b}$. De même, $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{a}{c}$ et $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{b}{a}$.

(c) Par simplification, il vient : $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(-\dfrac{c}{b}\right)\left(-\dfrac{a}{c}\right)\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -1$.

4. (a) On a : $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = b \times \left(-\dfrac{1}{a}\right) = -\dfrac{b}{a}$. Cela signifie que $a\overrightarrow{RA} + b\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire que $R = \begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}$. De même, $P = \begin{pmatrix} B & C \\ b & c \end{pmatrix}$, et $Q = \begin{pmatrix} A & C \\ a & c \end{pmatrix}$

(b) L'hypothèse $a+b+c \neq 0$ permet d'introduire le barycentre $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, on a : $M \in (AP) \cap (BQ) \cap (CR)$, d'où le résultat.

(c) On suppose que $a+b+c = 0$. On a :

$$-a\overrightarrow{AP} = (b+c)\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

et

$$-b\overrightarrow{CR} = (a+c)\overrightarrow{CR} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} = -b\overrightarrow{CA} - c\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} = c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi, (AP) et (CR) sont parallèles. On montre de même que (AP) et (BQ) le sont.

5. (a) Comme les points P, Q et R sont sur les segments, les trois rapports $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$, $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ et $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ sont strictement négatifs. De plus, (AP), (BQ) et (CR) ne peuvent pas être parallèles. Par suite, elles sont concourantes SSI $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ SSI $\dfrac{PB}{PC} \times \dfrac{QC}{QA} \times \dfrac{RA}{RB} = 1$.

(b) On a, puisque l'angle $\widehat{BPC}$ est plat : $\sin\widehat{APB} = \sin\widehat{APC}$. Par la loi des sinus dans APB et APC, on a :

$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{BP} = \frac{\sin\widehat{APB}}{AB} \text{ et } \frac{\sin\widehat{CAP}}{CP} = \frac{\sin\widehat{APC}}{AC},$$

d'où :

$$\sin\widehat{BAP} \times \frac{AB}{PB} = \sin\widehat{APB} = \sin\widehat{APC} = \sin\widehat{CAP} \times \frac{AC}{PC}$$

et $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} \times \dfrac{AB}{AC}$.

(c) On montrerait de même : $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{ABQ}} \times \dfrac{BC}{BA}$ et $\dfrac{RA}{RB} = \dfrac{\sin\widehat{ACR}}{\sin\widehat{BCR}} \times \dfrac{CA}{CB}$.

Ainsi, (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes SSI $\dfrac{PB}{PC} \times \dfrac{QC}{QA} \times \dfrac{RA}{RB} = 1$ SSI

$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} \times \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{ABQ}} \times \frac{BC}{AB} \times \frac{\sin\widehat{ACR}}{\sin\widehat{BCR}} \times \frac{AC}{AB} = 1$$

SSI

$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} \times \frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{ABQ}} \times \frac{\sin\widehat{ACR}}{\sin\widehat{BCR}} = 1.$$

6. (a) Voir la figure 1.

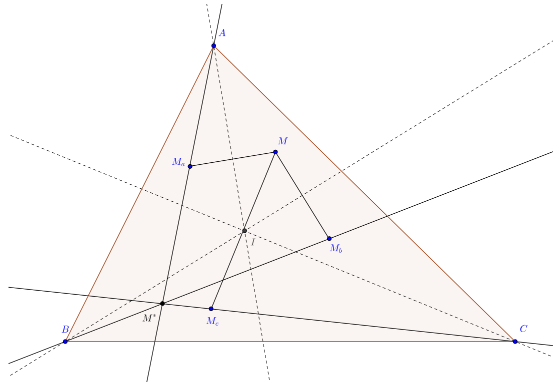

FIGURE 1 – Conjugué isogonal

(b) Comme (AI) est la bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC, on sait que (AB) et (AC) sont symétriques par rapport à (AI). Par ailleurs, le symétrique de A (resp. M) est A (resp. M_a) donc l'image de (AM) est (AM_a).
De même, la réflexion d'axe (BI) (resp. (CI)) échange (BA) et (BC) (resp. (CB) et (CA)) et envoie (BM) sur (BM_b) (resp. (CM) sur (CM_c))

(c) Démontrer que les droites (AM_a), (BM_b) et (CM_c) sont concourantes.
Comme (AM), (BM) et (CM) sont concourantes et comme $\widehat{BAP} = \widehat{BAM}$, etc., on a par la version trigonométrique du théorème de Céva :

$$\frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}} \times \frac{\sin \widehat{CBM}}{\sin \widehat{ABM}} \times \frac{\sin \widehat{ACM}}{\sin \widehat{BCM}} = 1.$$

D'après les propriétés de symétrie précédentes, on a $\widehat{BAM} = \widehat{CAM_a}$, $\widehat{CAM} = \widehat{BAM_a}$, etc. D'où :

$$\frac{\sin \widehat{CAM_a}}{\sin \widehat{BAM_a}} \times \frac{\sin \widehat{ABM_b}}{\sin \widehat{CBM_b}} \times \frac{\sin \widehat{BCM_c}}{\sin \widehat{ACM_c}} = 1.$$

Si on note P' (resp. Q', resp. R') l'intersection de (AM_a) et de (BC) (resp. (BM_b) et (CA), resp. (CM_c) et (AB)), on a $\widehat{CAM_a} = \widehat{CAP'}$, $\widehat{BAM_a} = \widehat{BAP'}$, etc., donc

$$\frac{\sin \widehat{CAP'}}{\sin \widehat{BAP'}} \times \frac{\sin \widehat{ABQ'}}{\sin \widehat{CBQ'}} \times \frac{\sin \widehat{BCR'}}{\sin \widehat{ACR'}} = 1.$$

Cela montre que $(AM_a) = (AP')$, (AM_b) et (AM_c) sont concourantes.

Exercice 3.

1. Voir la figure 2.
2. (a) Pour montrer qu'une isométrie qui préserve un cube en préserve les sommets, l'idée clé est celle de *point extrémal*.

   (b) On vérifie rapidement que $O = (0, 0, 0)$ est l'isobarycentre de $\mathscr{S}$. Tout élément g de $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ est une bijection affine et préserve $\mathscr{S}$ donc elle établit une permutation de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire que $\mathscr{S} = \{A_0, \ldots, A_7\} = \big\{g(A_0), \ldots, g(A_7)\big\}$. Or, par préservation du barycentre par une application affine et par « commutativité », on a :

$$g(O) = \begin{pmatrix} g(A_0) & g(A_1) & \cdots & g(A_7) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_7 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = O.$$

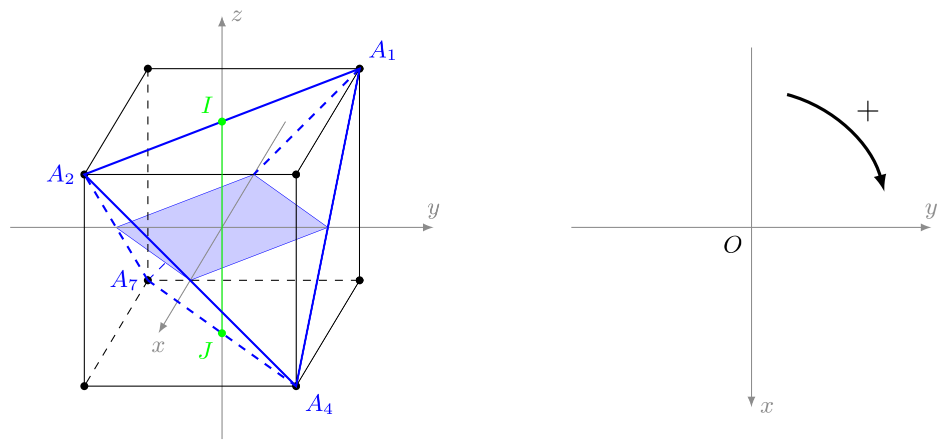

FIGURE 2 – Cube et tétraèdre ; $\mathscr{P}$ vu de haut

3. (a) On calcule les coordonnées de I et J facilement : $I = (0,0,1)$ et $J = (0,0,-1)$. L'orientation de la droite (IJ) est « vers le bas ». Le plan $\mathscr{P}$ est donc le plan d'équation $z = 0$, qu'on peut appeler « plan (Oxy) », sauf que l'orientation induite par $\overrightarrow{IJ}$ est l'inverse de l'orientation habituelle (celle qui fait de la base canonique de ce plan, $\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$, une base directe). Les plans perpendiculaires à (IJ) sont stables par r. Comme O appartient à (IJ) (c'est le milieu de $[IJ]$!), son image est O : on peut considérer r comme une isométrie vectorielle (i.e. r s'identifie à $\overrightarrow{r}$). L'image du vecteur $(1,0,0) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ est $-(0,1,0)$ à cause de l'orientation, l'image de $(0,1,0)$ est $(1,0,0)$. Enfin, $(0,0,1)$ qui dirige (IJ) est invariant. La matrice de $\overrightarrow{r}$ dans la base canonique est donc :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et, pour $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$r(M) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Évident, non ? On a : $s(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$, dont la matrice est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $g = r \circ s$ (on a : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s}$). Comme $\mathscr{Q}$ est stable par g, $\overrightarrow{\mathscr{Q}}$ est stable par $\overrightarrow{g}$: $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{\mathscr{Q}}) \subset \overrightarrow{\mathscr{Q}}$. Comme $\overrightarrow{g}$ est une bijection, l'inclusion est une égalité et on en déduit : $\overrightarrow{g}^{-1}(\overrightarrow{\mathscr{Q}}) = \overrightarrow{\mathscr{Q}}$. Soit u un vecteur directeur de $\overrightarrow{\mathscr{Q}}^{\perp}$. On a, pour tout vecteur $v \in \overrightarrow{\mathscr{Q}}$:
$$\langle \overrightarrow{g}(u), v \rangle = \left\langle \overrightarrow{g}(u), \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{g}^{-1}(v)\right) \right\rangle = \langle u, \overrightarrow{g}^{-1}(v) \rangle = 0,$$
puisque $\overrightarrow{g}^{-1}(v) \in \overrightarrow{\mathscr{Q}}$ et que $u \in \overrightarrow{\mathscr{Q}}^{\perp}$. Par suite, $\overrightarrow{g}(u)$ est colinéaire à u, c'est-à-dire que u est un vecteur propre de $\overrightarrow{g}$.
Les valeurs propres de la matrice $AB = BA$ sont $\pm i$ et -1. Il n'y a qu'un seul espace propre, la droite $\overrightarrow{\mathscr{Q}}^{\perp}$ engendrée par $(0,0,1)$. Autrement dit, $\mathscr{Q}$ est un plan « horizontal – parallèle à $\mathscr{P}$.

Mais si $z \neq 0$, l'image de (x, y, z) est $(y, -x, -z)$, qui n'est pas dans le même plan parallèle à $\mathscr{P}$ que (x, y, z) (les cotes sont différentes !). Donc le seul plan stable par $r \circ s$ est $\mathscr{P}$.

(d) Comme r et s permutent les coordonnées en changeant quelques signes, l'image de $\mathscr{S}$ par r et s – et donc par $r \circ s$ – est $\mathscr{S}$.

(e) On a : $r(A_1) = A_0 \notin \mathscr{T}$ et $s(A_1) = A_5 \notin \mathscr{T}$ donc ni r ni s ne stabilise $\mathscr{T}$. En revanche, on vérifie que $g = r \circ s$ stabilise $\mathscr{S}_0$: $g(A_1) = A_4$, $g(A_2) = A_7$, $g(A_7) = A_1$, $g(A_4) = A_2$. Donc g stabilise $\mathscr{T}$.

4. (a) Voir la figure 3

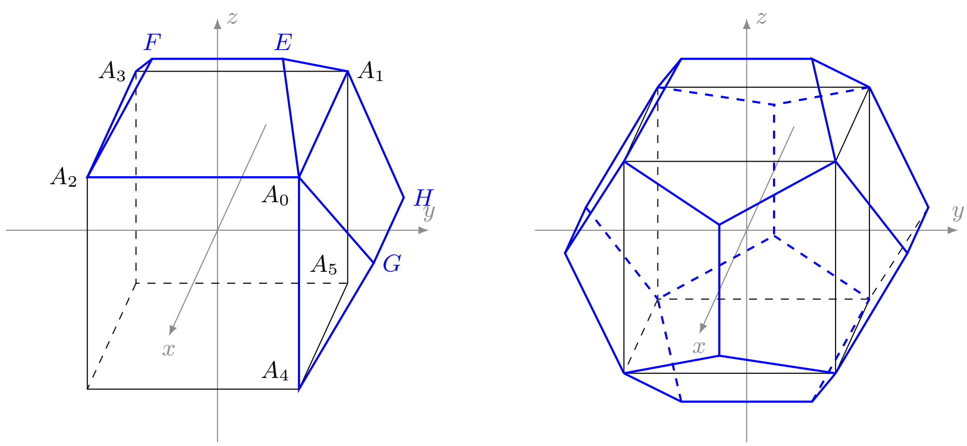

Figure 3 – Cube et deux toits et le dodécaèdre qui s'en déduit

(b) On a : $A_0 = (1, 1, 1)$, $A_1 = (-1, 1, 1)$, $E = (0, a, b+1)$. On en déduit :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_0E} = \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ b \end{pmatrix}, \quad v = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} \wedge \overrightarrow{A_0E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Étant donné $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$M \in (A_0A_1E) \iff \langle \overrightarrow{A_0M}, v \rangle = 0 \iff -b(y-1) + (a-1)(z-1) = 0.$$

(c) Le point G a pour coordonnées $(a, b+1, 0)$. Il appartient à (A_0A_1E) si et seulement si $-b(b+1-1) + (a-1)(0-1) = 0$, c'est-à-dire si $b^2 = 1 - a$.
La seule coordonnée qui distingue H et G est l'abscisse et l'équation de (A_0A_1E) ne dépend pas de x, donc $G \in (A_0A_1E)$ si et seulement si $H \in (A_0A_1E)$.

(d) On a :

$$\overrightarrow{A_0E} = \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ b \end{pmatrix}, \; A_0E^2 = 1 + (a-1)^2 + b^2, \quad \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; GH^2 = 4a^2,$$

d'où l'équivalence :

$$A_0E = GH \iff 1 + (a-1)^2 + b^2 = 4a^2 \iff b^2 = 3a^2 + 2a - 2.$$

(e) D'après ce qui précède, $G \in (A_0A_1E)$ et $A_0 = GH$ si et seulement si

$$\begin{cases} b^2 = 1-a \\ b^2 = 3a^2+2a-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^2 = 1-a \\ a^2+a-1=0. \end{cases}$$

On calcule l'unique solution positive a et on reporte dans l'autre équation :

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad b^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ici, il n'est pas interdit d'être habile :

$$b^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

de sorte que $b+1 = (\sqrt{5}+1)/2$, ce qui donne les coordonnées :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Un calcul de routine donne : $A_0E = EA_1 = A_1H = HG = GA_0 = 2a = \sqrt{5}-1$.

(g) On a calculé un vecteur normal à (A_0A_1E), c'est $v = (0, -b, a-1)$ ci-dessus. On a :

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}-3}{2} \end{pmatrix}, \quad \|v\|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2 = -2\sqrt{5}+5.$$

On a par ailleurs :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_0E} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{5}-3}{2} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}, \quad w = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2} \wedge \overrightarrow{A_0E} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$\|w\|^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

L'angle formé par les plans (A_0A_1E) et (A_0A_1G) est caractérisé par le cosinus de l'angle $(\widehat{v,w})$, que l'on calcule ainsi :

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}{\sqrt{\frac{35-15\sqrt{5}}{2}}} \simeq -0{,}44721,$$

expression un peu sale qui donne un angle de 2.03444 rad ou 116,56° ou 116° 33′ 54″ environ.