Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 1 : 7 mars 2015

Durée : 1 heure 30

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Exercice 1.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 1 (c'est-à-dire une droite) et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui possède deux points fixes distincts A et B. Que peut-on dire de f ?

On pourra par exemple choisir un repère et travailler en coordonnées.

Exercice 2. Projections et symétries

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ où l'on note (x, y, z) les coordonnées.

1. Sur un dessin, placer les points

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathscr{D}$ le sous-espace affine défini par le système

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3. \end{cases}$$

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.

   (b) Quelle est la nature de $\mathscr{D}$? Représenter $\mathscr{D}$ sur le dessin précédent.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y = 0$. On note p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$ et s la symétrie par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

   (a) Lesquels des points A_j $(0 \leqslant j \leqslant 7)$ appartiennent à $\mathscr{P}$? Représenter $\mathscr{P}$ sur le dessin précédent.

   (b) Déterminer les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y, z)$ par p.

   (c) Déterminer les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y, z)$ par s.

4. Quelles sont les coordonnées de l'image de $M = (x, y, z)$ par la projection sur le plan d'équation $z = 0$ parallèlement à l'axe (Oz) (contenant O et dirigé par le vecteur $(0, 0, 1)$).

Exercice 3. Homothéties-translations
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie de direction $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. On appelle *homothétie-translation* toute application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui est une homothétie ou une translation.

1. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Comment est définie l'application linéaire associée ?
2. Étant donnés un point $A \in \mathscr{E}$ et un réel $k \in \mathbb{R}^*$, on note $h_{A,k}$ l'homothétie de centre A et de rapport k. Étant donné un vecteur $v \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$, on note t_v la translation de vecteur v.
   (a) Est-il possible d'avoir la relation $h_{A,k} = t_v$?
   (b) Quelle est l'application linéaire associée à $h_{A,k}$? et à t_v ?
   (c) Montrer que les bijections réciproques $h_{A,k}^{-1}$ et t_v^{-1} sont des homothéties-translations.
3. On fixe un repère $(O, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$. En introduisant clairement les notations nécessaires, déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une homothétie $h_{A,k}$ et par une translation t_v.
4. On veut montrer que la composée de deux homothéties-translations est une homothétie-translation.
   Dans chaque cas, on pourra au choix raisonner vectoriellement ou en coordonnées.
   (a) Soient A et A' deux points de $\mathscr{E}$ et k et k' deux réels non nuls. Soit $f = h_{A,k} \circ h_{A',k'}$. On suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que f admet un unique point fixe A'' qui appartient à la droite (AA'). Montrer que $f = h_{A'',kk'}$.
   (b) Soient A et A' deux points de $\mathscr{E}$ et soit k un réel non nul. Soit $f = h_{A,k} \circ h_{A',1/k}$. Montrer que f est une translation et préciser son vecteur.
   (c) Soit $A \in \mathscr{E}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $v \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Déterminer $h_{A,k} \circ t_v$.
   (d) Identifier et traiter de même les derniers cas.
5. (a) Soit A un point de $\mathscr{E}$. On dit que $s_A = h_{A,-1}$ est une *symétrie centrale*. Justifier ce terme en déterminant deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ tels que s_A est la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{G}$.
   (b) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points de $\mathscr{E}$. Déterminer la nature de $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_n}$.
   Commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$.