Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 1 : 7 mars 2015

Durée : 1 heure 30

Exercice 1.

Première solution (version compacte). Une application affine est déterminée par l'image du repère affine (A, B). Ici, c'est l'identité qui envoie A sur A et B sur B.

Première solution. Le couple (A, B) est un repère affine de $\mathscr{E}$. Or on sait que pour tout couple (A', B') de $\mathscr{E}$, il existe une unique application affine qui envoie A sur A' et B sur B'. L'identité est donc l'unique application affine qui envoie A sur A et B sur B.

Deuxième solution (à mains nues). On a : $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{f}$ est l'identité sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Pour $M \in \mathscr{E}$ quelconque, on a : $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} = M$.

Troisième solution (en coordonnées). Fixons un repère (O, u) de $\mathscr{E}$. Comme on est en dimension 1, il existe a et b réels tels que pour tout point M d'abscisse x, l'abscisse de l'image de M est $ax + b$. Soit x_A (resp. x_B) l'abscisse de A (resp. B). Comme A et B sont fixes, on a :

$$\begin{cases} x_A a + b = x_A \\ x_B a + b = x_B \end{cases}$$

d'où par différence : $(a-1)(x_A - x_B) = 0$, puis $a = 1$ car $x_A \neq x_B$. En reportant, il vient alors : $b = 0$. Ainsi, $f(M)$ a pour abscisse x, c'est-à-dire que $f(M) = M$, et ce pour tout M. Autrement dit, f est l'identité.

Exercice 2. Projections et symétries

1. Voir la figure 1

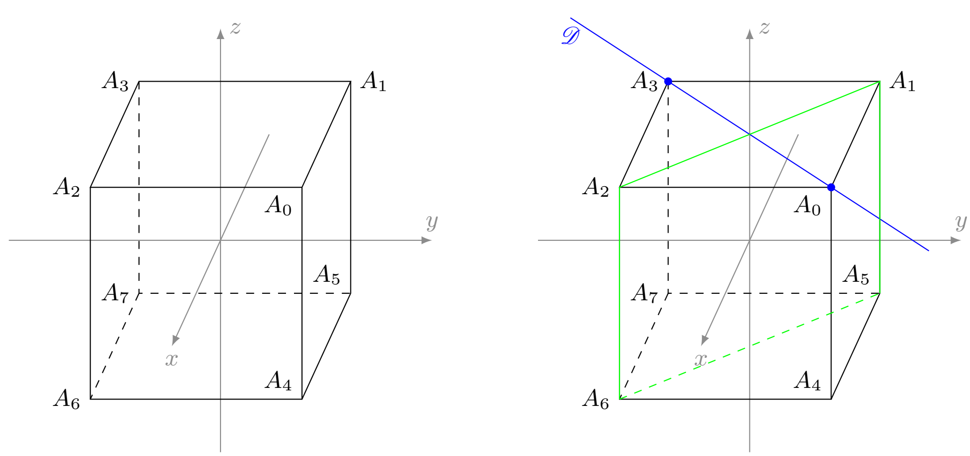

FIGURE 1 – Un cube

2. (a) On résout le système :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$
$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1. \end{cases}$$

(b) On déduit de cette représentation paramétrique que $\mathscr{D}$ est la droite passant par le point $A_3 = (-1, -1, 1)$ (en prenant $t = -1$) et dirigée par le vecteur $v = (1, 1, 0)$ (coefficients de t). Elle passe également par le point $A_0 = (1, 1, 1)$ (pour $t = 1$), c'est la droite (A_0A_3) (en bleu sur la figure).

3. (a) Les points dont la première et la deuxième coordonnées sont opposées appartiennent à $\mathscr{P}$: ce sont A_1, A_2, A_5 et A_6. Comme ils forment un parallélogramme, c'est commode pour le dessin (en vert sur la figure).

(b) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $v = (1, 1, 0)$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M + \lambda v \in \mathscr{P}$. Or $M + \lambda v = (x+\lambda, y+\lambda, z)$ et ce point appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $x+\lambda+y+\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -(x + y)/2$. Par suite,

$$p(M) = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, z\right).$$

(c) On cherche $s(M) = M'' = (x'', y'', z'')$ tel que $M' = p(M)$ soit le milieu de $[MM'']$. Cela donne le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x + x''}{2} = \dfrac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ \dfrac{y + y''}{2} = -\dfrac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ \dfrac{z + z''}{2} = z \end{cases} \iff \begin{cases} x'' = (x - y) - x = -y \\ y'' = (-x + y) - y = -x \\ z'' = 2z - z = z. \end{cases}$$

4. C'est un cheveu sur la soupe. Sans calcul, le projeté est : $(x, y, 0)$.

Exercice 3. Homothéties-translations

1. L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à f est définie ainsi. Soit v un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soient A et M deux points tels que $\overrightarrow{AM} = v$. Alors : $\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$.

2. (a) Supposons que $h_{A,k} = t_v$. Alors, comme A est fixe par $h_{A,k}$, on a : $v = \overrightarrow{At_v(A)} = \overrightarrow{Ah_{A,k}(A)} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. D'où $t_v = \mathrm{Id}$, ce qui impose que $k = 1$.

(b) Notons $h = h_{A,k}$. Pour $M \in \mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{h(A)h(M)} = \overrightarrow{Ah(M)} = k\overrightarrow{AM}$. Par suite, $\overrightarrow{h_{A,k}} = k\,\mathrm{Id}$.

Soit $t = t_v$. Pour A et M points quelconques de $\mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{At(A)} = v = \overrightarrow{Mt(M)}$ donc $AMt(M)t(A)$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{t(A)t(M)} = \overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{t} = \mathrm{Id}$.

(c) On vérifie immédiatement que $h_{A,k}^{-1} = h_{A,1/k}$ et t_v^{-1} : ce sont donc des homothéties-translations.

3. Soit $M \in \mathscr{E}$, soient $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées. On note aussi $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées de A. Soit $M' = h_{A,k}(M)$ et soient $(x'_1, \ldots, x'_n)$ les coordonnées de M'. L'égalité $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$ donne :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x'_i - a_i = k(x_i - a_i), \quad i.e. x'_i = kx_i + (1-k)a_i.$$

Soient $(b_1, \ldots, b_n)$ les coordonnées de $v \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. On note $(x''_1, \ldots, x''_n)$ les coordonnées de $M'' = t_v(M)$. L'égalité $\overrightarrow{MM''} = v$ donnent :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x''_i - x_i = b_i, \quad i.e. x''_i = x_i + b_i.$$

4. (a) Soit $M \in \mathscr{E}$, on note $M' = h_{A',k'}(M)$ et $M'' = h_{A,k}(M)$. Alors : $\overrightarrow{A'M'} = k'\,\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{AM''} = k\,\overrightarrow{AM'}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM''} &= k\overrightarrow{AM'}\\ &= k\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{A'M'}\\ &= k\overrightarrow{AA'} + kk'\overrightarrow{A'M}\\ &= k\overrightarrow{AA'} + kk'\overrightarrow{A'A} + kk'\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

Ainsi, M est fixe si et seulement si

$$M = M'' \iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM''} \iff (1-kk')\overrightarrow{AM} = k(1-k')\overrightarrow{AA'}.$$

Comme $kk' \neq 1$, il existe un unique point fixe A'' défini par : $\overrightarrow{AA''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{AA'}$.
Soit M quelconque à nouveau. Des égalités

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AM''} = k\overrightarrow{AA'} + kk'\overrightarrow{A'A} + kk'\overrightarrow{AM}\\ \text{et} \quad & \overrightarrow{AA''} = k\overrightarrow{AA'} + kk'\overrightarrow{A'A} + kk'\overrightarrow{AA''},\end{aligned}$$

on tire par différence :

$$\overrightarrow{A''M} = kk'\,\overrightarrow{A''M},$$

ce qui établit que $f = h_{A'',kk'}$.

(b) Les calculs précédents restent valables et donnent, lorsque $kk' = 1$:

$$\overrightarrow{AM''} = k\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}, \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{MM''} = k\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A}.$$

Ceci signifie que f est la translation de vecteur $k\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A}$.

(c) Soit $g = h_{A,k} \circ t_v$. On fixe $M \in \mathscr{E}$. Alors : $M' = t_v(M) = M + v$. Soit $M'' = g(M)$, on a :

$$\overrightarrow{AM''} = k\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{AM} + kv.$$

Si $k = 1$, on a bien sûr : $h_{A,k} = \mathrm{Id}$ donc $g = t_v$ (on le voit : $\overrightarrow{MM''} = v$). Sinon, g admet pour unique point fixe le point A'' tel que $(1-k)\overrightarrow{AA''} = kv$. On obtient alors par différence :

$$\overrightarrow{A''M''} = k\overrightarrow{A''M},$$

de sorte que $g = h_{A'',k}$.

(d) Left to the reader.

5. (a) Pour $k = -1$, $s_A = h_{A,-1}$ est la symétrie par rapport à $\mathscr{F} = \{A\}$ parallèlement à $\mathscr{G} = \mathscr{E}$.

   (b) Pour $n = 1$, s_{A_1} est une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale.

   Pour $n = 2$, $s_{A_1} \circ s_{A_2}$ est la composée de deux homothéties dont le produit des rapports vaut 1 donc c'est une translation.

   On montre par récurrence que $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_n}$ est :
   — une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale, si n est impair ;
   — une translation si n est pair.
   L'hérédité est justifiée par les questions 4b et 4c.