Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n^o 2 : 11 avril 2016

Durée : 1 heure 30

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Questions de cours

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine.

A. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Qu'est-ce que l'application linéaire associée à f ?

B. Soit $\big\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\big\}$ un système de points pondérés. On suppose que $\sum_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$. Donner *deux* égalités vectorielles qui caractérisent [1] le barycentre G de ce système :

  (a) l'une ne faisant intervenir que G et les A_i ;

  (b) l'autre faisant intervenir en plus un point quelconque O de $\mathscr{E}$.

C. Soit $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ la direction de $\mathscr{E}$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire euclidien sur $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soit $v \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$, on suppose que $\langle u, v \rangle = 0$ pour tout $u \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Montrer que $v = \overrightarrow{0}$.

Exercice 1.

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ où l'on note (x, y, z) les coordonnées.

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x - y = 1$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y, z)$ par s.
2. Déterminer les coordonnées de l'image de $M = (x, y, z)$ par la projection orthogonale sur l'axe (Oy), c'est-à-dire la droite contenant O et dirigée par le vecteur $(0, 1, 0)$.

Exercice 2.

Dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$, soient A et B deux points distincts et soit α un réel compris entre 0 et 1. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on pose

$$f(M) = \alpha\ MA^2 + (1 - \alpha)\ MB^2.$$

On note G le barycentre $\begin{bmatrix} A & B \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$. Soient M et H deux points de $\mathscr{E}$.

1. Démontrer que pour l'on a :

$$f(M) = MH^2 + f(H) + 2\big\langle \overrightarrow{MH}; \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} \big\rangle.$$

2. En déduire l'équivalence :

$$H = G \iff \forall M \in \mathscr{E},\ f(M) = MH^2 + f(H).$$

1. Une caractérisation est une condition nécessaire et suffisante qui peut remplacer les points de suspension finaux pour rendre la phrase suivante vraie : G est le barycentre de $\big\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\big\}$ si et seulement si...

Exercice 3.
Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan. Les coordonnées seront relatives au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Soit M un point du plan de coordonnées [2] (x, y). Montrer qu'il existe un unique triplet de réels (a, b, c) tels que $a + b + c = 1$ et
$$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$
Exprimer (a, b, c) en fonction de (x, y).

2. Soient M_1, M_2, M_3 trois points du plan. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on note (x_k, y_k) les coordonnées de M_k et (a_k, b_k, c_k) le triplet de réels tel que
$$M_k = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a_k + b_k + c_k = 1.$$
   (a) Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$
   On pourra supposer que M_1 et M_2 sont distincts (pourquoi ?) et considérer l'ensemble des M_3 pour lesquels le déterminant est nul.

   (b) En déduire que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Soit R (resp. Q, P) un point de la droite (AB) (resp. (BC), (CA)) distinct de A, B et C.
   (a) Montrer qu'il existe un réel r unique tel que
$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ 1 - r & r \end{bmatrix}.$$
   (b) Exprimer $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ en fonction de r.

   (c) Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$
   C'est le théorème de Menelaus.

2. Comme le plan n'est pas $\mathbb{R}^2$, on *évitera* d'écrire des égalités du genre : $M = (x, y)$ ou $M = \binom{x}{y}$.