Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 2 : 11 avril 2016

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

A. L'application linéaire associée à f est l'unique application linéaire $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{E}}$ telle que pour tous points A et B de $\mathscr{E}$,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

B. Supposant que $\sum_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$, le barycentre G est caractérisé par :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^r \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$;

(b) pour O point quelconque de $\mathscr{E}$, $\displaystyle\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} \sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{OA_j}$.

C. Supposons que $\langle u, v\rangle = 0$ pour tout $u \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. En prenant $u = v$, on trouve : $\langle v, v\rangle = 0$, et donc, puisque $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie positive, $v = \overrightarrow{0}$.

Exercice 1.

1. Le vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $u = (1, -1, 0)$. Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'image $M'' = (x'', y'', z'')$ de M par la réflexion s par rapport à $\mathscr{P}$ est de la forme $M'' = M + tu$, où t est le réel tel que le milieu M' de $[MM'']$ appartient à $\mathscr{P}$. On calcule :

$$M'' = (x + t, y - t, z), \quad M' = \Big(x + \frac{t}{2}, y - \frac{t}{2}, z\Big)$$

donc

$$x + \frac{t}{2} - \Big(y - \frac{t}{2}\Big) = 1,$$

ce qui donne $t = -x + y + 1$ et enfin :

$$M'' = (y + 1, x - 1, z) \quad \Big(\text{et } M' = \Big(\frac{x + y + 1}{2}, \frac{x + y - 1}{2}, z\Big)\Big).$$

2. À vue, l'image est $\hat{M} = (0, y, 0)$.

Exercice 2.

1. On a, en notant $\beta = 1 - \alpha$ (et en remarquant que $\alpha + \beta = 1$) :

$$\begin{aligned} f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 &= \alpha\Big\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\Big\|^2 + \beta\Big\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\Big\|^2 \\ &= \alpha MH^2 + 2\alpha\langle\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HA}\rangle + \alpha HA^2 + \beta MH^2 + 2\beta\langle\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HB}\rangle + \beta HB^2 \\ &= MH^2 + f(H) + 2\Big\langle\overrightarrow{MH}; \alpha\overrightarrow{HA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{HB}\Big\rangle. \end{aligned}$$

2. *Première solution :* Plutôt que procéder par équivalence, on y va par double implication. Supposons d'abord que $H = G$. Soit $M \in \mathscr{E}$. Alors, d'après la question précédente, on a :

$$f(M) = MG^2 + f(G) + 2\left\langle \overrightarrow{MG}; \alpha\overrightarrow{GA} + (1-\alpha)\overrightarrow{GB} \right\rangle = MG^2 + f(G) + 2\left\langle \overrightarrow{MG}; \overrightarrow{0} \right\rangle = MG^2 + f(G).$$

Réciproquement, supposons que $f(M) = MH^2 + f(H)$ pour tout M. Alors, par 1,

$$\left\langle \overrightarrow{MH}; \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} \right\rangle = 0$$

pour tout M. Choisissons M tel que $\overrightarrow{MH} = \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB}$ (*cf.* C), alors :

$$\left\| \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} \right\|^2 = 0,$$

d'où $\alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, par Ba, H est le barycentre de $\big\{(A, \alpha), (B, 1-\alpha)\big\}$.

Deuxième solution : Par la question 1, on a :

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathscr{E},\ f(M) = MH^2 + f(H) &\iff \forall M \in \mathscr{E},\ \left\langle \overrightarrow{MH}; \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} \right\rangle = 0 \\
&\iff \forall u \in \overrightarrow{\mathscr{E}},\ \left\langle u; \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} \right\rangle = 0 \\
&\iff \alpha\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0} \quad \text{(par C)} \\
&\iff H = G \quad \text{(par Ba).}
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Par définition des coordonnées, on a : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Supposons que

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad \text{avec } a + b + c = 1.$$

Alors, par Bb (prendre $O = A$),

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1}\left(a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC},$$

ce qui entraîne, puisque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base : $b = x$ et $c = y$, puis $a = 1-b-c = 1-x-y$. D'où l'unicité de (a, b, c) (si le triplet $(1-x-y, x, y)$ convient).
Récirpoquement, on a : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (1-x-y)\overrightarrow{AA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc, d'après Bb (prendre $O = A$) :

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 1-x-y & x & y \end{bmatrix}.$$

Ceci prouve que $(a, b, c) = (1-x-y, x, y)$ est l'unique triplet qui convient.

2. (a) Si $M_1 = M_2$, le résultat est évident. En effet, les trois points sont alignés et les deux premières lignes du déterminant sont égales donc le déterminant est nul : il y a bien équivalence.
On suppose que $M_1 \neq M_2$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des M de coordonnées (x, y) tels que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0.$$

On a, en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Comme $M_1 \neq M_2$, l'un des deux coefficients $y_1 - y_2$ et $x_2 - x_1$ n'est pas nul, de sorte que $\mathscr{D}$ est une droite. Or $M_1 \in \mathscr{D}$ et $M_2 \in \mathscr{D}$ (deux lignes égales, déterminant nul). Donc $\mathscr{D}$ est la droite $(M_1 M_2)$.

Ainsi, $M_3 \in \mathscr{D}$ SSI $M_3 \in (M_1 M_2)$ SSI M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

(b) Par 1, on a : $a_k = 1 - x_k - y_k$, $b_k = x_k$, $c_k = y_k$ donc, en ajoutant la deuxième et la troisième colonne à la première, ce qui ne change pas le déterminant, on a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - x_1 - y_1 & x_1 & y_1 \\ 1 - x_2 - y_2 & x_2 & y_2 \\ 1 - x_3 - y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

La question 2a donne alors l'équivalence souhaitée.

3. (a) Par 1, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ unique tel que $a + b + c = 1$ et $R = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}$. Cela donne : $\overrightarrow{AR} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Mais $R \in (AB)$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base donc $c = 0$. Posons $r = b$ (alors, $a = 1 - r$), c'est l'unique réel tel que

$$R = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 1 - r & r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 1 - r & r \end{bmatrix}.$$

(b) De $(1 - r)\overrightarrow{RA} + r\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0}$, on déduit : $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\dfrac{1 - r}{r}$ ($r \neq 0$ car $R \neq A$).

(c) On montrerait de même qu'il existe deux réels uniques et non nuls p et q tels que $P = \begin{bmatrix} B & C \\ 1 - p & p \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} C & A \\ 1 - q & q \end{bmatrix}$ et que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{1 - p}{p}$ et $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\dfrac{1 - q}{q}$.

D'après 2b, P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 - p & p \\ q & 0 & 1 - q \\ 1 - r & r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Par la règle de Sarrus (par exemple), ce déterminant vaut :

$$(1 - p)(1 - q)(1 - r) + pqr.$$

Ainsi, P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{1 - p}{p} \times \frac{1 - q}{q} \times \frac{1 - r}{r} = -1,$$

c'est-à-dire (observer que les trois signes « − » à gauche éliminent celui de droite) :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$