Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 3 : mardi 17 mai 2016

Durée : 2 heures

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Questions de cours

A. Dans un espace affine, soit $\big\{(A_1,\alpha_1),\dots,(A_r,\alpha_r)\big\}$ un système de points pondérés. On suppose que $\sum_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$. Donner une égalité vectorielle qui caractérise le barycentre G de ce système et ne faisant intervenir que G, les α_i et les A_i.

B. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique. Soit la base de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\big((1,0),(5,2)\big)$. Déterminer la base orthonormale associée à cette base par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 1 : Bissectrices

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan euclidien. Soient M un point du plan, M' son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et N un point de $\mathcal{D}$.

1. Montrer brièvement que $MN \geqslant MM'$, avec égalité si et seulement si $N = M'$.
   On note $MM' = d(M,\mathcal{D})$: ce réel est appelé la *distance* de M à $\mathcal{D}$.
2. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ et M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
   Désormais, on fixe deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3. Montrer l'existence d'un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{D}$ a pour équation $y=0$ et $\mathcal{D}'$ une équation de la forme $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$. Que représente α ?
4. Montrer que l'ensemble des points M tels que $d(M,\mathcal{D}) = d(M,\mathcal{D}')$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. Préciser leurs équations en fonction des données. [On fera apparaître $\alpha/2$.]
   On appelle ces droites les *bissectrices* de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
5. Soient A, B, C trois points non alignés. Montrer que $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ est un vecteur directeur d'une des deux bissectrices de (AB) et (AC).
   On l'appelle *bissectrice intérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC. L'autre bissectrice de (AB) et (AC) est appelée *bissectrice extérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$.
6. Montrer que l'intersection de deux bissectrices d'angles différents du triangle appartient à une bissectrice du troisième angle.
   Ainsi, les trois bissectrices intérieures du triangle se coupent en un point I.
7. (a) Montrer que I est le barycentre $\begin{bmatrix} A & B & C \\ BC & CA & AB \end{bmatrix}$.
   (b) Déterminer les coordonnées barycentriques de l'intersection des bissectrices extérieures de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Exercice 2 : Un tétraèdre régulier

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct. On introduit les points suivants par leurs coordonnées :

$$O : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K : \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Dessiner les points O, A, B, C, D ainsi que les symétriques C' (resp. B', A') de C (resp. B, A) par rapport à K.
   (b) Que peut-on dire du solide $OAC'BDA'CB'$? Le faire apparaître sur le dessin.
   (c) Que peut-on dire du tétraèdre $ABCD$?
2. Soit I le milieu du segment $[CD]$.
   (a) Justifier que I est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).
   (b) Calculer une mesure de l'angle $\widehat{AIB}$.
   [On pourra faire intervenir la fonction arc cosinus dans le résultat.]
3. Soit E le milieu de $[BD]$ et soit $\mathcal{P}$ le plan contenant E et dirigé par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
   (a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
   (b) Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite (BD).
   (c) Déterminer l'intersection F de $\mathcal{P}$ avec la droite (BC).
4. Soit s l'application qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point de coordonnées (y, x, z).
   (a) Justifier brièvement que s est la réflexion par rapport au plan (OCD).
   (b) Calculer les coordonnées de $H = s(E)$ et $G = s(F)$.
5. Démontrer que $EFGH$ est un carré.
6. Dessiner un patron du solide $EFGHDC$.
7. Soit Δ la droite contenant K et dirigée (et orientée) par $\overrightarrow{OC}$. Soit r la rotation d'axe Δ et d'angle $\pi/2$, soit s' la réflexion de plan $\mathcal{P}$ et soit $f = s' \circ r$.
   (a) Quelle est la nature de f ?
   (b) Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est stable par f.