Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Correction du contrôle n° 3

Questions de cours

A. C'est la définition du barycentre :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{A_i G} = \overrightarrow{0}.$$

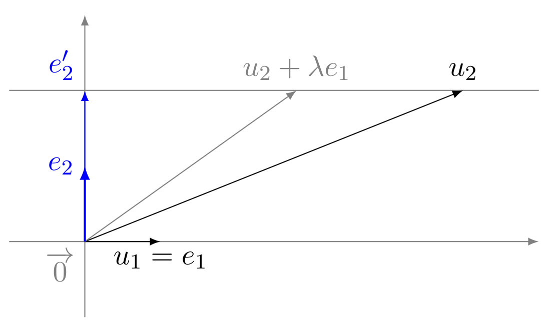
B. Soient $u_1 = (1,0)$ et $u_2 = (5,2)$.

Première solution. On commence par normaliser u_1, ce qui est immédiat ($\|u_1\| = 1$) : $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = u_1$. On cherche un vecteur de la forme $e_2' = u_2 + \lambda e_1$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) tel que $\langle e_2', e_1 \rangle = 0$. Puisque

$$\langle e_2', e_1 \rangle = \langle u_2, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle = 5 + \lambda,$$

on doit prendre : $\lambda = -5$, c'est-à-dire : $e_2' = (5,2) - 5(1,0) = (5,2) + (-5,0) = (0,2)$. Puis on normalise e_2' en posant : $e_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2' = \frac{1}{2}(0,2) = (0,1)$. On retrouve la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est incroyable.

Deuxième solution. On constate que u_1 est de norme 1. On cherche un vecteur e_2 orthogonal à $e_1 = u_1$, dans le même demi-plan de frontière $\mathrm{Vect}(e_1)$ que u_2 et de norme 1. Si le vecteur $e_2 = (0,1)$ ne vous saute pas aux yeux, ouvrez-les !



Exercice 1 : Bissectrices

1. Le triangle $MM'N$ est rectangle en M' donc, par le théorème de Pythagore, on a :

$$MN^2 = MM'^2 + NM'^2.$$

D'où $MN^2 \geqslant MM'^2$ et il y a égalité si et seulement si $NM' = 0$, c'est-à-dire si $N = M'$.

2. Notons Δ_M la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui contient M. Elle est dirigée par le vecteur v de coordonnées (a,b) et contient M, de sorte qu'un point M' de coordonnées (x',y') appartient à Δ_M si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda v$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x' - x = \lambda a \\ y' - y = \lambda b. \end{cases}$$

Or, le point $M' \in \Delta_M$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $M' \in \mathcal{D}$, *i.e.* si ses coordonnées satisfont à $ax' + by' + c = 0$. Cela se traduit par l'égalité :

$$a(\lambda a + x) + b(\lambda b + y) + c = 0, \quad i.e.\ \lambda = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}.$$

On a alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = MM' = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| = \frac{|ax + by + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3. Soit O l'intersection de $\mathcal{D}$ et DC' et soit e_1 un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ de norme 1 ; soit enfin e_2 un vecteur tel que la base (e_1, e_2) soit orthonormale. On oriente le plan de sorte qu'elle soit directe. Dans le repère (O, e_1, e_2), la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 0$ (évident, non ?). Soit e' un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ de norme 1 et soit α une mesure de l'angle $\widehat{(e_1, e')}$. Ainsi, e' a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ dans la base (e_1, e_2). On vérifie sans peine que $\mathcal{D}'$ a alors pour équation $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$.
   Si l'on remplace e' par $-e'$, la mesure α serait transformée en $\alpha + \pi$ et l'équation serait la même. L'angle α est une mesure (bien définie à π près) de l'angle de droites $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}')}$.
4. Soit M un point de coordonnées (x, y). On calcule la distance à $\mathcal{D}$ à vue :

$$d(M, \mathcal{D}) = |y|.$$

   Si l'on préfère appliquer la formule de la question précédente à l'équation $y = 0$, il faut prendre $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, ce qui donne : $|0x + y + 0|/\sqrt{0^2 + 1^2} = |y|$. Ouf, c'est pareil.

   On calcule la distance de M à $\mathcal{D}'$ avec $a = \sin\alpha$, $b = -\cos\alpha$ et $c = 0$ (et $a^2 + b^2 = 1$) :

$$d(M, \mathcal{D}') = |x\sin\alpha - y\cos\alpha|.$$

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{P}') &\iff |y| = |x\sin\alpha - y\cos\alpha| \\ &\iff y = x\sin\alpha - y\cos\alpha \text{ ou } y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ &\iff 2x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2y\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ ou } 2x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = -2y\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

   Comme on a supposé les droites sécants et donc distinctes, on a : $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$. Par suite (vérifier !), on a : $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ et $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$ donc $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$. D'où :

$$d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{P}') \iff x\sin\frac{\alpha}{2} = y\cos\frac{\alpha}{2} \text{ ou } x\cos\frac{\alpha}{2} = -y\sin\frac{\alpha}{2}.$$

   On reconnaît la réunion des droites passant par O et dirigées par les vecteurs de coordonnées $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$ et $(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})$.
5. Remarquons que le vecteur $v = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ n'est pas nul, sans quoi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires et les points alignés, contrairement à l'hypothèse. Soit $K = A + v$, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{AK} = v$.
   Soit $e_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$. On se place dans le repère orthonormé direct (A, e_1, e_2). Alors la droite $\mathcal{D} = (AB)$ a pour équation $y = 0$. Soit α une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, de sorte

qu'avec $\mathcal{D}' = (AC)$, la mesure de $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ vaut α à π près. De plus $\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. D'où les coordonnées de v :

$$v \ : \ \begin{pmatrix} 1+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, v est bien colinéaire à un vecteur directeur d'une des bissectrices.

6. Soit I l'intersection de deux des bissectrices, disons par exemple une de sommet A et l'autre de sommet C. Comme I appartient à la bissectrice de sommet A, on a : $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$; comme I appartient à une bissectrice de sommet C, on a : $d(I,(CA)) = d(I,(CB))$. Mais bien sûr, $(BA) = (AB)$, $(AC) = (CA)$ et $(CB) = (BC)$. D'où, par transitivité : $d(I,(BA)) = d(I,(BC))$, ce qui montre que I appartient à une bissectrice de sommet B.
7. (a) Soit $I' = \begin{bmatrix} A & B & C \\ BC & CA & AB \end{bmatrix}$. Alors, par la relation bien connue :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{BC+CA+AB}\left(\frac{1}{BC}\overrightarrow{AA} + \frac{1}{CA}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AB}\overrightarrow{AC}\right)\frac{AB\cdot AC}{BC+CA+AB}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right).$$

Ceci montre que I' appartient à la bissectrice intérieure issue de A. On montrerait de même qu'il appartient aux autres bissectrices intérieures, ce qui entraîne $I' = I$.

(b) Soit J l'intersection des bissectrices extérieures de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$. Alors $\overrightarrow{AJ}$ est orthogonal à $v = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$. On vérifie que $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} - \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ est orthogonal à v :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} - \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right\rangle = \left\| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

Ceci signifie que $\overrightarrow{AJ}$ est colinéaire à $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} - \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$. On montrerait de même que $\overrightarrow{BJ}$ est colinéaire à $\frac{\overrightarrow{BA}}{BA} - \frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$, puis par le même raisonnement qu'à la question précédente, que

$$J = \begin{bmatrix} A & B & C \\ -BC & -CA & AB \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 : Un tétraèdre régulier

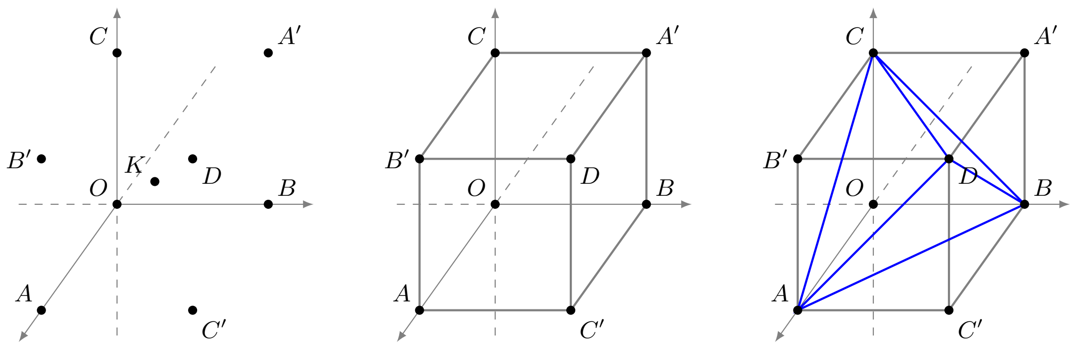
1. (a) Le symétrique d'un point M de coordonnées (x,y,z) par rapport à K est le point M' de coordonnées (x',y',z') tel que $(x+x')/2 = 1/2$, etc., c'est-à-dire : $x' = 1-x$, etc. On peut alors calculer les coordonnées suivantes :

$$A' : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B' : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C' : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui d'ailleurs est inutile pour tracer la figure en perspective [1] Voir figures.

(b) C'est un cube – on peut vérifier que chacune des faces est un carré.

1. En effet, une perspective est une projection, donc une application affine qui conserve donc le milieu, de sorte que le projeté du symétrique est le symétrique du projeté.



(c) Le tétraèdre $ABCD$ est régulier car on a :

$$AB = BC = CA = AD = BD = CD = \sqrt{2} :$$

ses quatre faces BCD, ACD, ABD et ABC sont donc des triangles équilatéraux.

2. (a) D'une part, I appartient à (CD). D'autre part, I a pour coordonnées :

$$I : \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc } \overrightarrow{IA} : \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

comme $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(1, 1, 0)$, le produit scalaire vaut : $\langle \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{CD} \rangle = 1/2 - 1/2 - 1 \times 0 = 0$. Autrement dit, (IA) est contenue dans le plan orthogonal à (CD) passant par A, ce qui entraîne que I est le projeté orthogonal de A sur (CD).

(b) On a :

$$\cos \widehat{AIB} = \frac{\langle \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB} \rangle}{IA \cdot IB}.$$

On a :

$$\overrightarrow{IA} : \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{IB} : \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\cos \widehat{AIB} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}^{\,2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, une mesure de $\widehat{AIB}$ est $\arccos \frac{1}{3}$.

3. (a) D'une part, E a pour coordonnées $(1/2, 1, 1/2)$. D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $(-1, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$: ils engendrent le plan vectoriel d'équation $z = 0$ [car ils sont linéairement indépendants et appartiennent à ce plan]. Donc le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :

$$z = \frac{1}{2}.$$

(b) Comme $\overrightarrow{BD}$ n'appartient pas à la direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$, le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (BD) en un point unique. Or, comme milieu de $[BD]$, le point E appartient à (BD) et par construction de $\mathcal{P}$, il appartient à $\mathcal{P}$. D'où : $\mathcal{P} \cap (BD) = \{E\}$.

(c) À vue, F est le milieu de $[BC]$. Et en effet, le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $(0,1/2,1/2)$, il appartient donc à $\mathcal{P}$ et, bien sûr, à (BC), dont la direction n'est pas incluse dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

4. (a) On a : $s\circ s(M)=M$ pour tout M donc s est une symétrie. Tout point du plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x-y=0$ est fixe par s. Or ce plan contient O, C et D donc $\mathcal{Q}=(OCD)$. Enfin, s permute A et B donc $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1,1,0)$, il est orthogonal à $\mathcal{Q}$ [regarder l'équation ou, plus long, calculer le produit scalaire avec $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$, qui engendrent $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$]. Ainsi, s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{Q}$.

   (b) Facile :

$$E:\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix},\quad H=s(E):\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix},\quad F:\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix},\quad G=s(F):\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}.$$

5. On a :

$$\overrightarrow{EF}:\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{HG}:\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{EH}:\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix},$$

donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, si bien que c'est un parallélogramme, et $\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\rangle=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$, de sorte que c'est un rectangle, et $EF^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=EH$, de sorte que c'est un carré.

6. Je passe.

7. Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$. Donc f est la composée d'une réflexion et d'une rotation dont l'axe est orthogonal au plan de la rotation : c'est une anti-réflexion.

8. Chacun des plans $(B'DA'C)$ et $(AC'BO)$ est orthogonal à Δ et les intersections avec Δ sont les points $(1/2,1/2,1)$ et $(1/2,1/2,0)$ qui sont les centres des carrés $B'DA'C$ et $AC'BO$. On a donc :

$$r(D)=A',\quad r(C)=B',\quad r(A)=C',\quad r(B)=O.$$

Puis la réflexion r' par rapport à $\mathcal{P}$ envoie un point M de coordonnées (x,y,z) sur $(x,y,1-z)$ (ah ? pourquoi ? parce que !). On en déduit :

$$f(D)=s'(A')=B,\quad f(C)=s'(B')=A,\quad f(A)=s'(C')=D,\quad f(B)=s'(O)=C.$$

Ainsi, le tétraèdre $ABCD$ est stable par f.0