Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 4 : mardi 31 mai 2016

Durée : 3 heures

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*
— *On traitera les exercices dans l'ordre que l'on voudra et on pourra utiliser librement les résultats d'un exercice dans un autre.*

Exercice 1 : Droites stables par une rotation

Soit, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3, une rotation ρ distincte de l'identité. Soient Δ son axe (orienté) et θ son angle. Soient O un point de Δ.

On pourra travailler un repère adéquat.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite contenant O stable par ρ.
   (a) Soit v un vecteur directeur de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Montrer que v est un vecteur propre de $\overrightarrow{\rho}$.
   (b) Montrer que l'on est dans l'un des cas suivants :
   — soit $\mathcal{D} = \Delta$;
   — soit $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à Δ et ρ est un demi-tour (*i.e.*, $\theta \equiv \pi$ $[2\pi]$).
2. Soit $\mathcal{D}'$ une droite quelconque stable par ρ. Montrer que $\mathcal{D}'$ contient un point de Δ.

Exercice 2 : Angle et plans bissecteurs de deux plans sécants

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.

1. Dans cette question, on fixe un repère orthonormé dans lequel les coordonnées d'un point « générique » seront notées (x, y, z). De plus, soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathcal{E}$. Soient M un point de $\mathcal{E}$, M' son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ et N un point de $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer brièvement que $MN \geqslant MM'$, avec égalité si et seulement si $N = M'$.

   On note $MM' = d(M, \mathcal{P})$: ce réel est appelé la *distance* de M à $\mathcal{P}$.
   On suppose que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, où (a, b, c, d) est un quadruplet de réels tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et que M a pour coordonnées (x, y, z).

   (b) Donner les coordonnées d'un vecteur n normal à $\mathcal{P}$. Calculer $\langle \overrightarrow{MM'}, n \rangle$ en fonction des données. (Ici, M' est encore le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. Il est utile d'introduire ses coordonnées mais inutile de les calculer.)
   (c) En déduire que $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
2. Désormais, on fixe deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ (mais plus de repère).
   (a) Supposons qu'il existe un repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3) dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 0$ et $\mathcal{P}'$ une équation de la forme $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$. Que peut-on dire de l'origine O ? la droite contenant O et dirigé par e_3 (« l'axe (Oz) ») ?
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de α ?
   La plus petite valeur positive de α est appelée l'angle entre les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   (c) Montrer l'existence d'un tel repère.
   (d) Faire un dessin où apparaissent les plans et le repère.

Exercice 3 : Distance entre deux droites
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère canonique et du produit scalaire canonique. On considère deux points $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ainsi que deux vecteurs $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$. On suppose que ces vecteurs sont tous deux de norme 1. On note $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite passant par A_1 (resp. A_2) et dirigée par v_1 (resp. v_2).

1. Soit π_1 la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_1$. On fixe un point M de $\mathbb{R}^3$ et on note $M' = \pi_1(M)$.
   (a) Donner une expression vectorielle de $\overrightarrow{A_1M'}$.
   (b) En déduire les coordonnées de M'.
   (c) Donner une expression de la distance de M à $\mathcal{D}_1$ (sans coordonnées).
2. On suppose désormais que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles ; autrement dit, la famille (v_1, v_2) est libre.
   (a) Justifier de deux façons qu'il existe un vecteur e_3 de norme 1 et orthogonal à v_1 et v_2 : en utilisant le produit vectoriel et sans l'utiliser.
   (b) Soit $\mathcal{P}_1$ le plan contenant A_1 et dont la direction est $\mathrm{Vect}(v_1, e_3)$. Justifier que $\mathcal{P}_1$ coupe $\mathcal{D}_2$ en un point B_1. On définit de même $\mathcal{P}_2 = A_2 + \mathrm{Vect}(v_2, e_3)$ et $B_2 \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D}_1$.
   (c) Démontrer que (B_1B_2) est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. La distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$ est définie par
$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \inf_{(M_1, M_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} d(M_1, M_2).$$
   (a) Soient $M_1 \in \mathcal{D}_1$ et $M_2 \in \mathcal{D}_2$. Démontrer que
$$M_1M_2^2 = B_1B_2^2 + \|v\|^2,$$
   où v est un vecteur à déterminer.
   (b) En déduire $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.
4. On se propose d'étudier l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2 \\ M & \longmapsto & \pi_2 \circ \pi_1(M). \end{array}$$
   (a) Justifier brièvement que φ est affine. Quelle est l'application linéaire associée à φ ?

   On suppose désormais que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas la même direction.
   (b) Que peut-on déduire de cette hypothèse sur $\left|\langle v_1, v_2 \rangle\right|$?
   (c) Montrer l'existence d'un unique point $N \in \mathcal{D}_2$ tel que $N = \varphi(N)$.
   (d) Montrer que $\overrightarrow{N\pi_2(N)}$ est orthogonal à v_2. En déduire qu'il est orthogonal à v_1. Que vaut $\left\|\overrightarrow{N\pi_2(N)}\right\|$?

Exercice 4 : Point de Lemoine d'un triangle
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. On considère un triangle non aplati ABC. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
La *symédiane* issue du sommet A est l'image de la médiane (AA') par la réflexion par rapport à la bissectrice (intérieure) issue de A. On définit de même les symédianes issues de B et C.

On rappelle du CC3 que l'intersection des trois bissectrices intérieures, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit, peut s'écrire comme barycentre de la façon suivante :

$$I = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

On introduit le *point de Lemoine* L comme un barycentre :

$$L = \begin{bmatrix} A & B & C \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Soit A_1 l'intersection de la bissectrice (AI) et de (BC). Donner ses coordonnées barycentriques.

   (b) Donner de même les coordonnées barycentriques de l'intersection A_0 de (AL) et (BC).

   (c) Montrer que
   $$(b+c)^2\overrightarrow{AA_1} = (b^2+c^2)\overrightarrow{AA_0} + 2bc\overrightarrow{AA'}.$$

2. Soit α une mesure de $\widehat{BAC}$.

   (a) Donner une expression de AA'^2 en fonction de b, c et α.
   Pour cette question, on utilisera à nouveau l'expression de A' comme barycentre de B et C. (De même pour la suivante.)

   (b) Donner une expression de $AA_0{}^2$ en fonction de b, c et α.

   (c) En déduire que $(b^2+c^2)\cdot AA_0 = 2bc \cdot AA'$.

   (d) En déduire que (AA_1) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A'AA_0}$, puis que A_0 appartient à symédiane issue de A.

3. Montrer que les trois symédianes sont concourantes et que leur intersection est le point de Lemoine L.