Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2015-2016

Contrôle n° 4 : mardi 31 mai 2016

Durée : 3 heures

Exercice 1 : Droites stables par une rotation

Soit, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3, une rotation ρ distincte de l'identité. Soient Δ son axe (orienté) et θ son angle. Soient O un point de Δ.

On pourra travailler un repère adéquat.

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite contenant O stable par ρ.
   (a) Soit v un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. L'image $A' = \rho(A)$ de $A = O + v$ appartient à $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{\rho}(v)$ (où $O' = \rho(O)$) appartient à $\overrightarrow{\mathscr{D}}$.
   Comme $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ est dirigée par v, ce vecteur est proportionnel à v. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\rho}(v) = \lambda v$. Ceci signifie que v est un vecteur propre de $\overrightarrow{\rho}$.
   (b) Dans une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) telle que e_3 dirige Δ, la matrice de $\overrightarrow{\rho}$ est, en notant θ est l'angle de ρ :
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   Or les valeurs propres de cette matrice sont $e^{\pm i\theta}$ et 1. En général, $e^{\pm i\theta}$ n'est pas réel. Plus précisément, soit $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$, auquel cas 1 est la seule valeur propre réelle ; soit $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, et alors les valeurs propres sont 1 (simple) et 1 (double). On est donc dans l'un des cas suivants :
   — soit $\lambda = 1$, alors $v = \pm e_3$ et $\overrightarrow{\mathscr{D}} = \overrightarrow{\Delta}$; comme $O \in \Delta$ est fixé par ρ, on en déduit $\mathscr{D} = \Delta$;
   — soit $\lambda = -1$ et $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors v est dans le plan engendré par (e_1, e_2) : ainsi, $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à Δ et ρ est un demi-tour.
2. Par le même raisonnement qu'en 1a, on montre que $\overrightarrow{\mathscr{D}}'$ est engendrée par un vecteur propre v' de $\overrightarrow{\rho}$. D'où deux cas selon la valeur propre associée.
   Si la valeur propre est 1, v' dirige l'axe de ρ. Alors, $\mathscr{D}'$ *est* l'axe de ρ. En effet, fixons un point A de $\mathscr{D}'$: le plan orthogonal à Δ contenant A est stable par ρ (par construction de ρ) donc A est un point fixe de la rotation induite par ρ sur $\mathscr{P}_A$. Comme l'unique point fixe d'une rotation
   Sinon, la valeur propre est -1 et ρ est un demi-tour. Soit A un point de $\mathscr{D}'$ qui n'appartient pas à Δ et soit A' son image. Par construction de ρ, le plan $\mathscr{P}_A$ orthogonal à Δ contenant A est stable par ρ. Comme ρ est un demi-tour, sa restriction à $\mathscr{P}_A$ est une symétrie de centre $B \in \Delta \cap \mathscr{P}_A$. Mais alors, $\mathscr{D}' = (AA')$ coupe Δ en B.

Exercice 2 : Angle et plans bissecteurs de deux plans sécants

1. (a) Puisque M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, on a : $\langle \overrightarrow{MM'}, v\rangle = 0$ pour tout $v \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. Ceci vaut en particulier pour $v = \overrightarrow{M'N}$. Mais alors, par le théorème de Pythagore, on a : $MN^2 = MM'^2 + M'N^2$. D'où $MN \geqslant MM'$, et il y a égalité si et seulement si $M'N = 0$, c'est-à-dire si $N = M'$.

(b) Vu l'équation de $\mathscr{P}$, on sait que le vecteur n de coordonnées (a,b,c) est normal à $\mathscr{P}$. Soient (x',y',z') les coordonnées de M'. Alors

$$\langle \overrightarrow{MM'}, n\rangle = (x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c = -ax-by-cz+ax'+by'+cz' = -ax-by-cz-d.$$

(c) Comme $\overrightarrow{MM'}$ et n sont normaux à $\mathscr{P}$, ils sont colinéaires. Comme $n/\|n\|$ est un vecteur directeur de (MM') ou par la relation d'Al Kashi, on a :

$$d(M,\mathscr{P}) = MM' = \left|\langle \overrightarrow{MM'}, \frac{n}{\|n\|}\rangle\right| = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

2. Désormais, on fixe deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ (mais plus de repère).

(a) Les coordonnées $(0,0,0)$ de O sont solutions des équations de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, de même plus généralement que les triplets $(0,0,t)$ où t parcourt $\mathbb{R}$, ce qui montre que (Oz) est inclus dans $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$, qui est une droite. Autrement dit : $O\in(Oz)=\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$.

(b) Question mal comprise : ici, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont fixés, la seule chose qui peut varier est un repère dans lequel $\mathscr{P}$ a pour équation $y=0$ et $\mathscr{P}'$ a une équation de la forme $x\sin\alpha' - y\cos\alpha' = 0$ pour un certain $\alpha'\in\mathbb{R}$. Il faut déterminer les valeurs α' possibles.

Observons ce qui se passe dans le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $z=0$: là, $\mathscr{D}=\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}$ a pour équation $y=0$ et $\mathscr{D}'=\mathscr{P}'\cap\mathscr{Q}$ a pour équation $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$. On a vu au CC 3 que le réel α est une mesure de l'angle de droites $(\mathscr{D},\mathscr{D}')$. Une fois une orientation de QC choisie, il est déterminé à π près – si on change de vecteur directeur de $\mathscr{D}'$, on remplace α par $\alpha+\pi$. D'autre part, changer l'orientation de $\mathscr{Q}$ transforme α en $-\alpha$.

Ainsi, si α est une valeur possible, les autres sont $\varepsilon\alpha+k\pi$ où $\varepsilon\in\{-1,1\}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

NB : Pour tout α, il existe un unique $\alpha_0\in\{\varepsilon\alpha+k\pi\ :\ \varepsilon\in\{-1,1\},\ k\in\mathbb{Z}\}\cap[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$: c'est la mesure de l'angle entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Elle est déterminée par $|\cos\alpha| = |\cos\alpha_0|$.

(c) Soit $O\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$. Soit e_3 un vecteur directeur de $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ de norme 1 (deux choix possibles). Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{Q}}$ orthogonal à e_3 coupe $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ en une droite, soit e_1 un vecteur directeur de norme 1 de cette droite (deux choix possibles). Soit enfin e_2 un vecteur tel que (e_1,e_2,e_3) soit une base orthonormée (encore deux choix possibles). Le repère (O,e_1,e_2,e_3) convient (pourquoi ?).

(d) Voir figure 1.

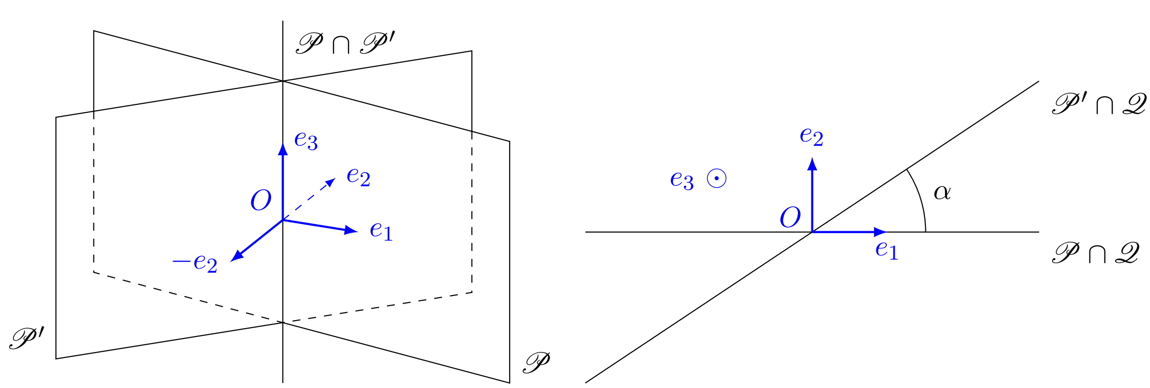

FIGURE 1 – Un repère adapté à une paire de plans

3. Soit M un point, soient (x,y,z) ses coordonnées. On applique les résultats de la question 1c aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, ce qui revient à prendre successivement (a,b,c,d) les valeurs $(0,1,0,0)$ et $(\sin\alpha, -\cos\alpha, 0, 0)$. Ainsi [1] :

$$\begin{aligned} d(M,\mathscr{P}) = d(M,\mathscr{P}') &\iff |y| = |x\sin\alpha - y\cos\alpha| \\ &\iff y = x\sin\alpha - y\cos\alpha \text{ ou } y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ &\iff 2x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2y\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ ou } 2x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = -2y\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Comme on a supposé les plans sécants et donc distincts, on a : $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$. Par suite (vérifier !), on a : $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ et $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$ donc $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$. D'où :

$$d(M,\mathscr{P}) = d(M,\mathscr{P}') \iff x\sin\frac{\alpha}{2} = y\cos\frac{\alpha}{2} \text{ ou } x\cos\frac{\alpha}{2} = -y\sin\frac{\alpha}{2}.$$

On reconnaît la réunion de deux plans admettant pour vecteurs normaux les vecteurs de coordonnées $(\sin\frac{\alpha}{2}, -\cos\frac{\alpha}{2}, 0)$ et $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, 0)$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les plans le sont aussi (tiens ? pourquoi ?).

4. (a) De deux choses l'une : soit $g(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$ et $g(\mathscr{P}') = \mathscr{P}'$, soit $g(\mathscr{P}) = \mathscr{P}'$ et $g(\mathscr{P}') = \mathscr{P}$. Dans le premier cas, on a (puisque g est une bijection [2]) : $g(\mathscr{P}\cap\mathscr{P}') = g(\mathscr{P})\cap g(\mathscr{P}') = \mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ et dans le deuxième cas, c'est pareil.

   (b) Soit t une translation de vecteur $v \neq \overrightarrow{0}$ qui stabilise $\mathscr{D} = \mathscr{P}\cup\mathscr{P}'$. Alors t stabilise $\mathscr{D}$. Soit $M \in \mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$. Alors $v = \overrightarrow{Mt(M)} \in \overrightarrow{\mathscr{D}}$.

   Réciproquement, une translation de vecteur appartenant à un sous-espace affine stabilise ce sous-espace affine (par définition des sous-espaces affines !). Au bilan, les translations qui stabilisent $\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'$ sont celles qui admettent un vecteur de translation dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}\cap\overrightarrow{\mathscr{P}'}$.

   (c) Soit ρ une rotation de G, disons d'axe Δ et d'angle θ. Il y a deux cas :
   - soit $\rho(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$ et $\rho(\mathscr{P}') = \mathscr{P}'$: par l'exercice 1, il y a quatre sous-cas :
     - soit $\Delta \subset \mathscr{P}$ et $\Delta \subset \mathscr{P}'$, alors $\Delta = \mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$, et ρ est un demi-tour ;
     - soit $\Delta \perp \mathscr{P}$ et $\Delta \subset \mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$ (pourquoi ?), et ρ est un demi-tour (car $\mathscr{D}$ est stable) ;
     - soit $\Delta \subset \mathscr{P}$ et $\Delta \perp \mathscr{P}'$, voir le cas précédent ;
     - soit $\Delta \perp \mathscr{P}$ et $\Delta \perp \mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles (pourquoi ?), ce qui est exclu ;
   - soit $\rho(\mathscr{P}) = \mathscr{P}'$ et $\rho(\mathscr{P}') = \mathscr{P}$: alors $\rho^2 \in G$ et ρ^2 stabilise les deux plans donc :
     - soit $\rho^2 = \mathrm{id}$, alors ρ est un demi-tour ; comme $\mathscr{D}$ est stable mais $\Delta \neq \mathscr{D}$ (sinon, $\rho(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$), $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à Δ ($\overrightarrow{\mathscr{D}}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{\rho}$) ; par suite, on se ramène au plan perpendiculaire $\mathscr{Q}$ à $\mathscr{D}$ contenant $\Delta\cap\mathscr{D}$ (pas vide ?) et là, on voit que $\mathscr{D}$ est l'intersection de $\mathscr{Q}$ et d'un plan médiateur de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$;
     - soit $\rho^2 \neq \mathrm{id}$ et alors, par le cas précédent :
       - soit $\Delta = \mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ et ρ^2 est un demi-tour, donc ρ a pour angle $\pm\pi/2$, donc $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$;
       - soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires, alors Δ est incluse dans $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{P}'$ et perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et ρ est d'angle $\pm\pi/2$.

1. Rappel : $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$
2. Pourquoi cette précision est-elle nécessaire au fait ?

(d) Même genre, un peu plus simple : on trouve les réflexions de plans les plans médiateurs de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$, les réflexions de plan perpendiculaire à $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ et, si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires, les réflexions de plan $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

(e) Rappelons qu'une anti-réflexion est la composée d'une rotation et d'une réflexion dont l'axe et le plan sont perpendiculaires. Supposons $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires, composons une rotation d'axe $\mathscr{D} = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est d'angle $\pi/2$ et une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Un vissage est la composée d'une rotation et d'une translation dont le vecteur dirige l'axe de la rotation. On peut composer un demi-tour d'axe $\mathscr{D}$ et une translation de vecteur directeur de $\mathscr{D}$, c'est un élément de G.

Exercice 3 : Distance entre deux droites

1. (a) On a : $\overrightarrow{A_1M'} = tv_1$ pour $t \in \mathbb{R}$ convenable. La valeur de t est déterminée par la condition : $\langle \overrightarrow{MM'}, v_1 \rangle = 0$, ce qui donne :

$$0 = \langle \overrightarrow{MA_1}, v_1 \rangle + \langle \overrightarrow{A_1M}, v_1 \rangle = -\langle \overrightarrow{A_1M}, v_1 \rangle + t\langle v_1, v_1 \rangle,$$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{A_1M'} = \langle \overrightarrow{A_1M}, v_1 \rangle v_1$.

(b) D'où M' : $(x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$ avec $t = (x - x_1)a_1 + (y - y_1)b_1 + (z - z_1)c_1$.

(c) La distance de M à $\mathscr{D}_1$ est MM'. Or, le triangle AMM' étant rectangle en M', on a :

$$MM'^2 = A_1M^2 - A_1M'^2 = A_1M^2 - \langle \overrightarrow{A_1M}, v_1 \rangle^2.$$

2. (a) *Première version :* On pose $e_3' = v_1 \wedge v_2$: ce vecteur n'est pas nul car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et il est orthogonal à v_1 et v_2. On prend $e_3 = e_3'/\|e_3'\|$.

Deuxième version : On complète la famille libre (v_1, v_2) en une base (v_1, v_2, v_3) puis on applique le procédé de Gram-Schmidt, ce qui donne une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) telle que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, d'où il résulte que e_3 est orthogonal à v_1 et v_2.

(b) Comme $\overrightarrow{\mathscr{P}_1} + \overrightarrow{\mathscr{D}_2}$ contient la base (v_1, v_2, e_3), c'est l'espace entier. Le critère vu en TD et revu en cours (ou l'inverse ?) assure que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D}_2$ n'est pas vide. De plus, $\overrightarrow{\mathscr{P}}_1 \cap \overrightarrow{\mathscr{D}}_2 = \mathrm{Vect}(v_1, e_3) \cap \mathrm{Vect}(v_2) = \{\overrightarrow{0}\}$ donc l'intersection est un point B_1.

(c) Comme B_1 et B_2 appartiennent à $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, on a :

$$\overrightarrow{B_1B_2} \in \overrightarrow{\mathscr{P}_1} \cap \overrightarrow{\mathscr{P}_2} = \mathrm{Vect}(v_1, e_3) \cap \mathrm{Vect}(v_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_3),$$

la dernière égalité étant due au fait que (v_1, v_2, e_3) est une base. Comme e_3 est orthogonal à v_1 et v_2, on peut affirmer que $(B_1B_2) \perp \mathscr{D}_1$ et $(B_1B_2) \perp \mathscr{D}_2$.

NB : On vérifie que (B_1B_2) est l'unique perpendiculaire[3] commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. En effet, si Δ en est une, elle est dirigée par e_3 (pourquoi ?) et le plan contenant $\mathscr{D}_1$ et Δ est $\mathscr{P}_1$ (pourquoi ?), de sorte que $\Delta \cap \mathscr{D}_1 \subset \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D}_1 = \{B_1\}$ (et *idem* pour B_2).

3. (a) On écrit $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2M_2}$. Comme M_1 et B_1 appartiennent à $\mathscr{D}_1$, les vecteurs $\overrightarrow{M_1B_1}$ et $\overrightarrow{B_1B_2}$ sont orthogonaux ; de même, $\langle \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2M_2} \rangle = 0$. En posant $v = \overrightarrow{M_1B_1} + \overrightarrow{B_2M_2}$, on a donc :

$$M_1M_2{}^2 = \langle \overrightarrow{B_1B_2} + v, \overrightarrow{B_1B_2} + v \rangle = B_1B_2{}^2 + \|v\|^2.$$

3. Rappel : deux droites *perpendiculaires* sont deux droites orthogonales qui se coupent.

(b) D'après ce qui précède, on a : $M_1M_2 \geqslant B_1B_2$, avec égalité si et seulement si $v = \overrightarrow{0}$, ce qui équivaut à $M_1 = B_1$ et $M_2 = B_2$. D'où : $d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = B_1B_2$.

4. (a) Comme φ est la restriction de la composée de deux applications affines à un sous-espace affine stable par φ, c'est une application affine.

On a vu que $\overrightarrow{A_1\pi_1(M)} = \langle \overrightarrow{A_1M}, v_1\rangle v_1$. De même, on a : $\overrightarrow{A_2\pi_2(M')} = \langle \overrightarrow{A_2M'}, v_2\rangle v_2$ pour tout point M'. D'où, en prenant $M' = \pi_1(M)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2\varphi(M)} &= \langle \overrightarrow{A_2\pi_1(M)}, v_2\rangle v_2\\ &= \langle \overrightarrow{A_1\pi_1(M)}, v_2\rangle v_2 + \langle \overrightarrow{A_2A_1}, v_2\rangle v_2\\ &= \langle \overrightarrow{A_1M}, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle v_2 + \langle \overrightarrow{A_2A_1}, v_2\rangle v_2\\ &= \langle \overrightarrow{A_2M}, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle v_2 + \langle \overrightarrow{A_1A_2}, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle v_2 + \langle \overrightarrow{A_2A_1}, v_2\rangle v_2.\end{aligned}$$

Soit x l'abscisse de M dans le repère (A_2, v_2) de $\mathscr{D}_2$. Alors $\overrightarrow{A_2M} = xv_2$ et on déduit du calcul précédent que l'abscisse de $\varphi(M)$ est

$$\langle v_1, v_2\rangle^2 x + c \quad \text{où} \quad c = \langle \overrightarrow{A_1A_2}, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle + \langle \overrightarrow{A_2A_1}, v_2\rangle.$$

Par conséquent, l'application linéaire associée à φ est la multiplication par $\langle v_1, v_2\rangle^2$.

(b) Soit θ une mesure de l'angle non orienté $(\widehat{v_1, v_2})$. Par hypothèse, ce n'est pas un multiple de π. Comme $\langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos\theta = \cos\theta$, on en déduit : $\big|\langle v_1, v_2\rangle\big| < 1$.

(c) En coordonnée[4], l'application φ correspond à $x \mapsto \langle v_1, v_2\rangle^2 x + c$. Par la question précédente, cette application est contractante. En tout état de cause, $\langle v_1, v_2\rangle^2 \neq 1$ donc elle admet un unique point fixe.

(d) *NB : Erreur d'énoncé dans cette question : $\pi_2(N) = N$ car $N \in \mathscr{D}_2$...*

Le vecteur $\overrightarrow{N\pi_1(N)}$ est orthogonal à v_1 car $\pi_1(N)$ est le projeté de N sur $\mathscr{D}_1$, que dirige v_1. Mais en notant $N' = \pi_1(N)$, on a : $\overrightarrow{N\pi_1(N)} = \overrightarrow{\pi_2(N')N'}$, de sorte que ce vecteur est orthogonal à v_2. Autrement dit, $(N\pi_1(N))$ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dont l'unicité a été montrée plus haut.

On en déduit que $N = B_2$ et $\pi_1(N) = B_1$, et que $N\pi_2(N) = d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$?

Exercice 4 : Point de Lemoine d'un triangle

1. (a) Comme $I = \begin{bmatrix} A & B & C\\ a & b & c\end{bmatrix}$, on montre que $A_1 = \begin{bmatrix} B & C\\ b & c\end{bmatrix}$.

En effet, on cherche $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $A_1 = \begin{bmatrix} B & C\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}$ et $\beta + \gamma = 1$. On sait que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$$

et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AA_1} = \lambda\overrightarrow{AI}$. On en déduit :

$$\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1} = \frac{\lambda}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right).$$

En identifiant (possible car $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre), il vient : $\beta = \lambda b/(a+b+c)$ et $\gamma = \lambda c/(a+b+c)$. La condition $\beta + \gamma = 1$ donne : $\lambda(b+c) = a+b+c$ d'où $\beta = b/(b+c)$ et $\gamma = c/(b+c)$.

4. Oui, « coordonnée » au singulier car l'application est définie sur une droite.

(b) De même, on montrerait que $A_0 = \begin{bmatrix} B & C \\ b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

(c) On a, d'après les questions précédentes [5] et la relation bien connue $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}(b+c)^2\overrightarrow{AA_1} &= \frac{(b+c)^2}{b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) = b(b+c)\overrightarrow{AB} + c(b+c)\overrightarrow{AC}\ ;\\ (b^2+c^2)\overrightarrow{AA_0} &= b^2\overrightarrow{AB} + c^2\overrightarrow{AC}\ ;\\ 2bc\overrightarrow{AA'} &= bc\overrightarrow{AB} + bc\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

D'où, puisque $b(b+c) = b^2 + bc$ et $c(b+c) = c^2 + c$:

$$(b+c)^2\overrightarrow{AA_1} = (b^2+c^2)\overrightarrow{AA_0} + 2bc\overrightarrow{AA'}.$$

2. Soit α une mesure de $\widehat{BAC}$.

(a) Grâce à l'expression $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\big)$, on retrouve une formule Al Kashi-*like* :

$$AA'^2 = \frac{1}{4}\big(AB^2 + AC^2 + 2\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle\big) = \frac{1}{4}\big(c^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha\big).$$

(b) De même :

$$\begin{aligned}AA_0{}^2 &= \left\|\frac{1}{b^2+c^2}\big(b^2\overrightarrow{AB} + c^2\overrightarrow{AC}\big)\right\|^2\\ &= \frac{1}{(b^2+c^2)^2}\Big(b^4AB^2 + 2b^2c^2\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle + c^4AC^2\Big)\\ &= \frac{1}{(b^2+c^2)^2}\Big(b^4c^2 + 2b^3c^3\cos\alpha + c^4b^2\Big)\\ &= \frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}(b^2 + 2bc\cos\alpha + c^2).\end{aligned}$$

(c) On en déduit que

$$(b^2+c^2)^2 \cdot AA_0{}^2 = b^2c^2(b^2 + 2bc\cos\alpha + c^2) = 4b^2c^2 \cdot AA'^2,$$

d'où la relation cherchée :

$$(b^2+c^2) \cdot AA_0 = 2bc \cdot AA'.$$

(d) Comme les vecteurs $(b^2+c^2)\overrightarrow{AA_0}$ et $2bc\overrightarrow{AA'}$ ont la même norme, leur somme engendre la bissectrice intérieure du issue de A dans le triangle $A'AA_0$. Par la question 1c, (AA_1) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A'AA_0}$.
Autrement dit, A_0 appartient à droite symétrique de la bissectrice (AA_1) par rapport à la médiane (AA'), c'est-à-dire que (AA_0) est la symédiane de ABC issue de A.

3. On vient de montrer que le point de Lemoine L, qui appartient à (AA_0), appartient à la symédiane issue de A. On montrerait de même qu'il appartient également aux deux autres symédianes. Autrement dit, le point de Lemoine est le point de concours des symédianes.

Voir aussi la feuille Geogebra en ligne.

5. Presque personne n'a pensé à les utiliser, vous trouvez ça raisonnable ?

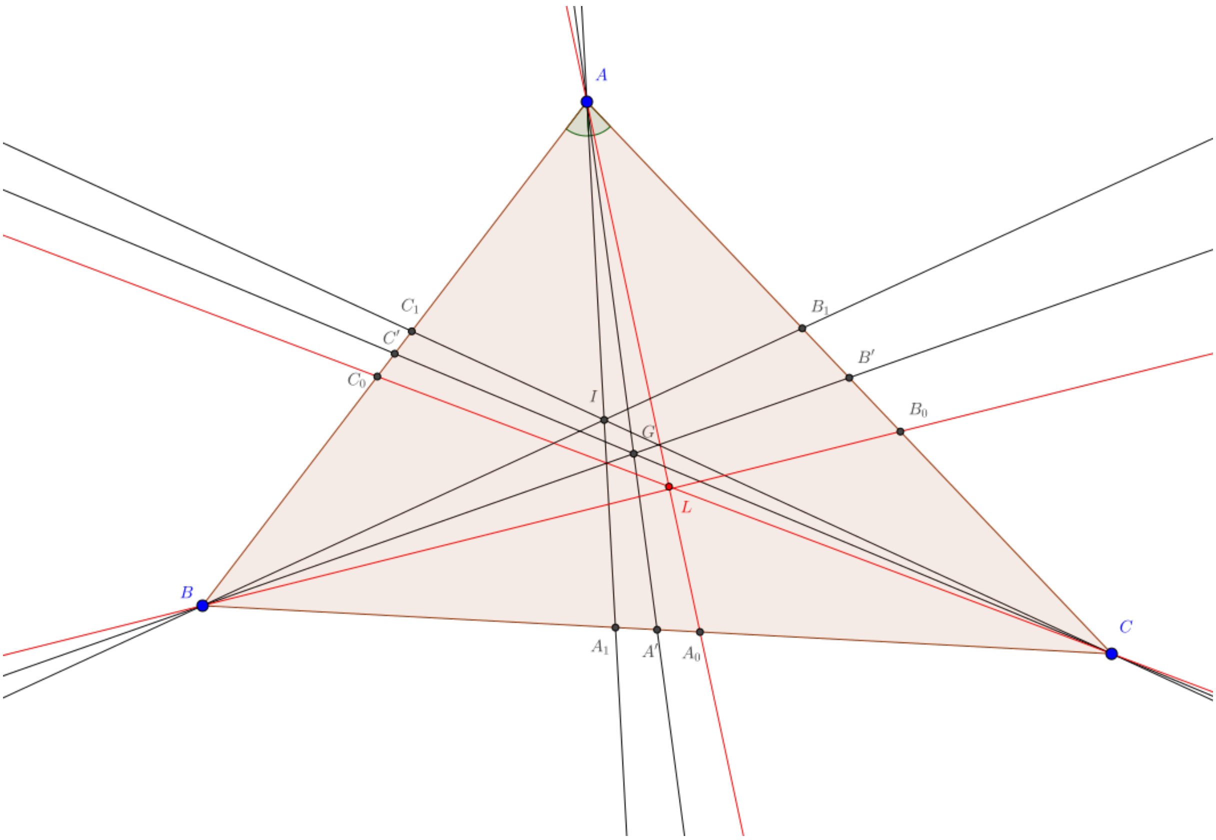

FIGURE 2 – Concours des symédianes