Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Applications affines

On se place le plus souvent dans un plan affine ou un espace affine de dimension 3, – euclidien lorsqu'il le faut – muni d'un repère – orthonormé lorsqu'il le faut – ou, ce qui revient au même, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ – muni du produit scalaire euclidien si nécessaire.

I Applications affines

1° On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.
a) Déterminer une application affine qui envoie le parallélogramme P de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sur le parallélogramme P' délimité par les droites d'équations $2x-y+1=0$, $2x-y-1=0$, $x+y=2$, $x+y=5$.
b) Existe-t-il une application affine qui envoie P sur le quadrilatère Q dont les sommets sont $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,0)$, $(-1,0)$?
c) Combien existe-t-il d'applications affines qui envoient P sur P' ?

2° On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer une application affine qui envoie le parallélépipède de sommets $\{(\pm1,\pm1,\pm1)\}$ et celui que délimitent les plans d'équations $x+y+z=-1$, $x+y+z=2$, $-x+z=1$, $-x+z=3$, $2x+y-z=-2$, $2x+y-z=3$.

3° Applications affines et sous-espaces affines

a) Montrer que l'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine. Montrer que l'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.
b) Montrer que pour tout sous-espace affine, on peut trouver une application affine et un point dont c'est l'image réciproque (pour tout s.e.a. $\mathscr{F}$ d'un e.a. $\mathscr{E}$, il existe $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}'$ affine et $v'\in\mathscr{E}'$ tels que $\mathscr{F}=f^{-1}(v')$).
Montrer que pour tout sous-espace affine, on peut trouver une application affine et un sous-espace affine dont c'est l'image (pour tout s.e.a. $\mathscr{F}$ d'un e.a. $\mathscr{E}$, il existe $f:\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$ affine et $\mathscr{F}'\subset\mathscr{E}'$ tels que $\mathscr{F}=f(\mathscr{F}))$.

II Projections

1° Deux calculs explicites

a) Soit D la droite d'équation $x+y=1$ et Δ la droite d'équation $x-2y+1=0$. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point du plan par la projection sur D parallèlement à Δ (resp. sur Δ parallèlement à D). Quelle relation entre les deux projections ?
b) Soit D la droite passant par $A=(1,2,3)$ et dirigée par $v=(1,1,1)$ et soit P le plan d'équation $x+y+z=1$. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point du plan par la projection sur D parallèlement à P (resp. sur P parallèlement à D). Quelle relation entre les deux projections ?

2° Soit p une application affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ dirigé par E dans lui-même telle que $p\circ p=p$. Montrer que p est une projection. Préciser ses éléments caractéristiques. Contre-exemple si on ne suppose plus p affine ?

III Plus sur les applications affines

Les exercices de cette page sont tirés du livre *Géométrie* de Michèle Audin (de même que certains des précédents).

1° Un « truc » utile

Soit φ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel E. On suppose que l'image de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire. Écrire cette hypothèse en termes de $\forall$, $\exists$. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie vectorielle. Comparer les deux écritures et montrer que φ est quand même une homothétie vectorielle.

2° Principe de conjugaison (premier avatar)

a) Étant donnés un point O dans un espace affine et un scalaire l, on note $h_{O,l}$ l'homothétie de centre O et de rapport l. Pour φ affine, décrire $\varphi h_{O,l} \varphi^{-1}$.

b) Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires. On peut donc parler de la projection $p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{F}'$. Pour φ affine, décrire $\varphi p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'} \varphi^{-1}$.

3° Centre du groupe affine

Quelles sont les applications affines φ telles que pour toute application affine ψ, on ait : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

4° Homothéties-translations

Montrer que l'ensemble des transformations affines d'un espace affine qui sont soit une homothétie, soit une translation, est stable par composition et passage à l'inverse. Comment se représentent ces transformations en coordonnées ?

5° Problème de Varignon

Étant donnés n points $A_1,\ldots, A_n$ d'un plan affine $\mathscr{P}$, existe-t-il n points $B_1,\ldots, B_n$ tels que $A_1,\ldots, A_n$ soient les milieux respectifs des segments $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$,…, $[B_nB_1]$? (On étudiera en particulier les cas $n = 3$ et $n = 4$.)