Université Claude Bernard-Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012-2013

Applications affines, barycentres

I Préliminaire : mesure algébrique

Dans un espace affine $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{D}$ une droite affine dirigée par une droite vectorielle D. Soit u une base de D et A, B deux points de $\mathscr{D}$. On note $\overline{AB}$ le scalaire tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot u$.
a)Soit O un point de $\mathscr{D}$ et x_A, x_B les abscisses de A et B dans le repère (O, u) de $\mathscr{D}$. Établir que l'on a : $x_B - x_A = \overline{AB}$.
b)Soit (O', u') un autre repère de $\mathscr{D}$. Quelle relation a-t-on entre les abscisses de A et B dans les repères (O, u) et (O', u') ? entre les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{AB}'$?
c)Soient M, N, P, Q quatre points, avec $P \neq Q$. Montrer que le rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$ ne dépend pas du choix d'un repère de $\mathscr{D}$ ou d'une base de D.

II Homothéties-translations

On appelle homothétie-translation une application affine qui est soit une homothétie, soit une translation...

1° Incursion métrique

Dans cette question, on se place dans un plan affine euclidien. Montrer que l'image d'un cercle par une homothétie-translation est un cercle; préciser le nouveau centre, le nouveau rayon. [Il y a un petit piège!]
On se donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres O et O' et de rayons r et r' non nuls. Montrer qu'il existe toujours deux homothéties-translations qui envoient $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$; les décrire en fonction des données (centre et rapport ou vecteur). [On distinguera les cas $r = r'$ et $r \neq r'$.]

2° Les homothéties-translations comme groupe

a)Montrer que la composée de deux homothéties-translations en est une. Déterminer son centre et son rapport ou son vecteur.
b)En déduire que $\mathscr{H}\mathscr{T}$ est un groupe.
c)Décrire, avec des notations évidentes (ou pas) : $h_{O,k} t_u h_{O,k}^{-1}$.
d)Comment se représentent les homothéties-translations en coordonnées? Reprendre les questions précédentes en coordonnées.

3° Théorème de Menelaüs

Dans un plan affine, soit ABC un triangle non aplati (une base affine...). Soit P un point de la droite (BC), Q un point de (CA) et R un point de (AB). On suppose B distinct de R et P.

a)On suppose que P, Q et R sont alignés. Pourquoi peut-on supposer, sans perte de généralité, que $Q \neq B$? Soit h_3 l'homothétie de centre R qui envoie B sur A ; h_2 l'homothétie de centre Q qui envoie A sur C ; h_1 l'homothétie de centre P qui envoie C sur B. En remarquant que B est fixe par la composée $h_1 \circ h_2 \circ h_3$, montrer la relation

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1.$$

b)On suppose que la relation ci-dessus est satisfaite et que $P \neq Q$. Soit R' l'intersection de (PQ) et (AB). Montrer que l'on a : $\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$, et en déduire que $R = R'$.

c)Traiter les cas dégénérés (B égal à R ou P, P et Q égaux...).

III Applications affines (encore)

1° Une situation classique

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine. Soient M_0 un point de la droite (AB) et :

- M_1 le projeté de M_0 sur (AC) parallèlement à (BC) ;
- M_2 le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AB) ;
- M_3 le projeté de M_2 sur (AB) parallèlement à (AC) ;
- M_4 le projeté de M_3 sur (AC) parallèlement à (BC) ;
- M_5 le projeté de M_4 sur (BC) parallèlement à (AB) ;
- M_6 le projeté de M_5 sur (AB) parallèlement à (AC).

En calculant les coordonnées des points M_k dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, montrer que $M_6 = M_0$.

2° Groupe du triangle

On fixe, dans un plan affine, un triangle ABC non aplati. On note G le groupe des transformations affines bijectives qui préservent ABC.

a)Combien d'éléments contient G ? Rappeler pourquoi en utilisant le cours.

b)Décrire tous les éléments de G en donnant les coordonnées de l'image d'un point quelconque du plan en fonction des coordonnées du point dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ où O est le centre de gravité du triangle.

3° Groupe du tétraèdre

On reprend les mêmes questions avec un tétraèdre $ABCD$ dans un espace affine de dimension 3. On se contentera de décrire en coordonnées l'application qui permute A et B et fixe C et D et celle qui permute circulairement A, B, C et D ($A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$).

IV Barycentres

1° Mesure algébrique (bis)

Si M est le barycentre de $\begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$, quelle relation entre λ et $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$? entre λ et $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$?

2° Théorème de Thalès

Énoncer le théorème de Thalès dans le plan et dans l'espace. Le démontrer en utilisant la préservation du barycentre par une projection affine. Démontrer la réciproque dans le plan. Quid dans l'espace ?

3° Une situation classique (bis)

On reprend les notations de III.1°. Vérifier que M_0 peut s'écrire comme barycentre des points A et B. Exprimer M_1 comme un barycentre de A et C, M_2 comme un barycentre de B et C, etc. Redémontrer ainsi sans calcul que $M_6 = M_0$.

4° Préservation du barycentre et applications affines

On sait qu'une application affine préserve le barycentre. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n, $(A_0, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ un autre espace affine. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application qui préserve le barycentre (sens ?). On veut montrer que f est affine.
a) Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels dont la somme n'est pas nulle et soit M le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i)\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Calculer les coordonnées de M dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$.
b) En utilisant les points $A'_i = f(A_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, montrer que f est affine.

V Convexité

1°

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe si, pour tout $x, x' \in I$ et tout $t \in [0,1]$, on a : $f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x')$.
Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe, c'est-à-dire si $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

2° Théorème de Gauss-Lucas

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. On note α son coefficient dominant, $z_1, \ldots, z_r$ ses racines, $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicités correspondantes, de sorte que $P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{m_k}$.
a) Décomposer la fraction rationnelle $F = P'/P$ en éléments simples.
b) Montrer que toute racine w de P' est dans l'enveloppe convexe des z_k. [Si w n'est pas l'un des z_k, on partira de l'égalité $F(w) = 0$.]

3° Points extrémaux d'un tétraèdre

On rappelle (ou pas) qu'un point M appartenant à un ensemble convexe $\mathscr{C}$ est un point extrémal si, pour tout couple de points $(A, B) \in \mathscr{C}^2$ tel que M appartient au segment $[AB]$, on a : $M = A$ ou $M = B$.

a)Montrer que M est un point extrémal SSI $\mathscr{C} \setminus \{M\}$ est convexe.

b)Soit $\mathscr{T}$ un tétraèdre, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires A, B, C et D. Montrer que les points extrémaux de $\mathscr{T}$ sont A, B, C et D.

c)Montrer qu'une partie convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.