Courbes de Bézier

Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

1° Rappels

Polynômes de Bernstein : $B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$, $B_{k,n}(t) = 0$ sinon. En général, on prend $t \in [0,1]$.

Dans le plan, on choisit jusqu'à la fin de la fiche un entier $n \geqslant 1$ et une famille de points $(P_0, \ldots, P_n)$. On définit la *courbe de Bézier* sur les *points de contrôle* $(P_0, \ldots, P_n)$, notée $M_{[P_0,\ldots,P_n]}(t)$ ou plus simplement $M(t)$, par la formule suivante, indépendante du choix d'un point O du plan :

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = O + \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \overrightarrow{OP_k}, \quad \text{ou bien } M(t) = \begin{pmatrix} P_0 & \cdots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix}.$$

2° Propriétés des courbes de Bézier

a) « Invariance affine »

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine. Montrer que l'image par f de la courbe de Bézier sur les points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$ est la courbe de Bézier sur les points de contrôle $f(P_0), \ldots, f(P_n)$.

b) Enveloppe convexe

Montrer que la courbe est tout entière contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.

c) Influence de l'ordre des points

Montrer sur un exemple (disons avec $n = 4$) que l'ordre des points de contrôle est important.
Déterminer une permutation non triviale des points de contrôle qui ne modifie jamais la courbe de Bézier.

d) Contrôle pseudo-local

Vérifier que si on bouge un et un seul des points de contrôle P_j, la courbe entière est modifiés (sauf éventuellement ses extrémités si $j \notin \{0, n\}$).
Justifier qualitativement que si l'on bouge le point P_j, la courbe est modifiée « surtout » pour les valeurs de t au voisinage de j/n.

e) Interpolation aux extrémités

Vérifier que $M(0) = P_0$, que $M(1) = P_n$.
Montrer que la courbe admet un vecteur tangent en $t = 0$ et que ce vecteur dirige la demi-droite $[P_0 P_1)$; montrer la courbe admet un vecteur tangent en $t = 0$ et que ce vecteur dirige la demi-droite $[P_n P_{n-1})$.

3° Autour de l'algorithme de Casteljau

Algorithme de Casteljau : à $t \in [0,1]$ fixé, on définit $M_{j,0} = P_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ puis, à l'étape $\ell \in \{1, \ldots, n\}$:

$$M_{j,\ell} = M_{j,\ell}(t) = \begin{pmatrix} M_{j,\ell-1}(t) & M_{j+1,\ell-1}(t) \\ 1-t & t \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant j \leqslant n - \ell).$$

Alors, on a : $M_{0,n}(t) = M(t)$.

a) Justification (vue en cours)

Vérifier la relation fontamentale :

$$\begin{pmatrix} P_0 & \cdots & P_{n+1} \\ B_{0,n+1}(t) & \cdots & B_{n+1,n+1}(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} P_0 & \cdots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_{n+1} \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix} \\ 1-t & t \end{matrix} \right).$$

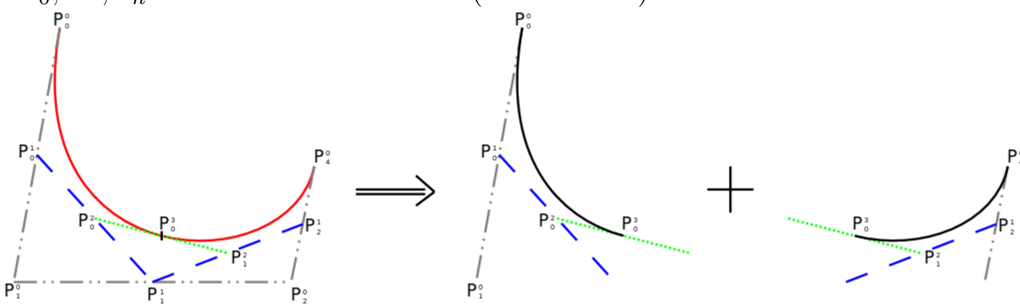
En déduire la validité de l'algorithme de Casteljau, c'est-à-dire que $M_{0,n}(t) = M(t)$.

b) Construction effective
Observer le tableau suivant, le commenter, l'implémenter (par exemple avec Geogebra)...

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
M_{0,0} & & M_{1,0} & & M_{2,0} & & \cdots & & M_{n-1,0} & & M_{n,0} \\
& M_{0,1} & & M_{1,1} & & \cdots & & M_{n-2,1} & & M_{n-1,1} & \\
& & M_{0,2} & & M_{2,2} & & & & M_{n-2,2} & & \\
& & & \ddots & & & & \iddots & & & \\
& & & & \ddots & & \iddots & & & & \\
& & & & & M_{0,n} & & & & &
\end{array}$$

(On pourra l'utiliser pour démontrer que l'algorithme de Casteljau est correct, c'est-à-dire que l'on a bien : $M_{0,n}(t) = M(t)$ pour tout t.)

c) Recollement
Observer la figure ci-dessus (tirée de wikipedia) et montrer que la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$ s'obtient en concaténant (« recollant ») deux courbes de Bézier bien choisies.



Voici l'identité à démontrer : pour $u \in [0,1]$, on note $N(u)$ le point courant de la courbe de Bézier associée à $M_{0,0}(t), M_{0,1}(t), \ldots, M_{0,n}(t)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
N(u) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-u)^{n-k} u^k M_{0,k}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-u)^{n-k} u^k \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (1-t)^{k-\ell} t^\ell P_\ell
\end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que l'on a :

$$N(u) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (ut)^\ell (1-ut)^{n-\ell} P_\ell.$$

d) Application : tangente
En déduire en particulier que la tangente à la courbe de Bézier en $M(t)$ est la droite passant par $M_{0,n-1}(t)$ et $M_{1,n-1}(t)$).

4° Points de contrôle pour une courbe polynômiale

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(B_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[t]$ des polynômes de degré $\leqslant n$.

b) On se donne une courbe polynomiale $M(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [0,1]$), où x et y sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à un entier x donné. Montrer que M est une courbe de Bézier pour un choix convenable de points de contrôle $P_0 = M(0)$, $P_1, \ldots, P_n = M(1)$.