Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Géométrie euclidienne

I Plutôt des préliminaires

1° Fonction scalaire de Leibniz

En guise de transition entre barycentres et géométrie euclidienne, on étudie la *fonction scalaire de Leibniz*. Étant donné une famille finie de points $(A_1, \dots, A_n)$ dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ – très souvent, un plan – et une famille finie de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on considère la fonction

$$f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2.$$

a) En introduisant, s'il existe, le barycentre idoine, donner une valeur simple de $f(M)$.
b) Application. Étant donnés deux points dans le plan et un réel $k > 0$, déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = k \cdot MB$.

2° Le sens de quelques expressions

a) Produits de mesures algébriques
On a vu que si A, B et M sont trois points alignés, avec disons M distinct de B, alors le rapport $\overline{MA}/\overline{MB}$ ne dépend que des points et pas du choix d'un repère affine de la droite. Expliquer pourquoi, dans un contexte *euclidien*, il est raisonnable de dire que

1. une mesure algébrique est bien définie au signe près ;
2. le produit de deux mesures algébriques $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est canoniquement défini.

b) Déterminants
Dans un espace vectoriel de dimension n, le déterminant d'une famille de n vecteurs $\mathbf{v} = (v, \dots, v_n)$ relativement à une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est le déterminant de la matrice A dont la j^{e} colonne est la colonne des coordonnées de v_j dans $\mathbf{e}$. On le note $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$.

1. Rappeler la relation entre $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$ et $\det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{v})$ lorsque $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont deux bases de l'espace.
2. Expliquer comment, dans un contexte *euclidien*, on peut choisir $\mathbf{e}$ pour que $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$ soit bien défini (resp. bien défini au signe près).

II Géométrie plane : *back to the future*

Dans ce paragraphe, on retrouve dans le contexte d'un plan euclidien (orienté s'il faut mesurer des angles), des propriétés géométriques bien connues mais admises depuis le collège ou le lycée.

1° Triangle rectangle et demi-cercles

Soit ABC un triangle non aplati. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au demi-cercle de diamètre $[BC]$.
En notant I le milieu de $[BC]$, on calculera AI^2 ou on prouvera l'égalité de la médiane, valable pour tout A : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2$ (cf. I1°).

2° Relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine euclidien. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) (sens ?). On suppose[1] que $H \neq B$ et on construit (comment ?) un repère orthonormé (H, i, j) avec $i = \overrightarrow{HB}/HB$. On note b (resp. c) l'abscisse de B (resp. C) et a l'ordonnée de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Quitte à échanger B et C, cela se fait sans perte de généralité.

(i) les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires ;

(ii) on a : $a^2 + bc = 0$;

(iii) on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (nom ?) ;

(iv) on a : $AI^2 = BC^2/4$ (interprétation ?) ;

(v) on a : $AB \cdot AC = AH \cdot BC$;

(vi) on a : $AH^2 = \cdot \overline{HC}$ (sens ?) ;

(vii) on a : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$; etc.

3° Un zeste de trigonométrie

Soit un plan affine euclidien orienté. Montrer que si A, B, C sont trois points distincts, on a :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{AB \cdot AC}, \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC}.$$

4° Applications conformes

Soit un plan affine euclidien orienté et f une bijection affine qui préserve les angles orientés. Montrer que f est une similitude directe, c'est-à-dire la composée d'une isométrie directe et d'une homothétie.

5° « Cas d'égalité des triangles »

Dans un plan affine euclidien, on se donne deux triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$. On suppose que ces deux triangles ont :

– soit trois côtés égaux ($AB = A'B'$, etc.) ;

– soit deux côtés égaux et les angles correspondants égaux ($AB = A'B'$ et $AC = A'C'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})\,[2\pi]$) ;

– soit deux angles égaux et les côtés adjacents égaux ($(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \pm(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}})\,[2\pi]$ et $AB = A'B'$).

Montrer qu'il existe une isométrie du plan qui envoie un triangle sur l'autre.

Adapter les arguments pour le cas des « trois côtés égaux ».

(À suivre...)