Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Géométrie euclidienne (suite)

I Encore quelques relations dans le plan

Soit ABC un triangle non aplati, on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; $\widehat{A}$ l'angle géométrique défini par $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, etc. ; enfin, R le rayon du cercle circonscrit au triangle.

1° Relation d'Al Kashi

Montrer que l'on a (très facile à partir de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

2° Loi des sinus

Montrer que l'on a :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

II Exercices de commande

1° Principe de conjugaison et centre

On se place dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien orienté.

a) Soit D (resp. H) une droite (resp. un plan) de $\mathbb{R}^3$, et soit r_D (resp. s_H) le demi-tour (resp. la réflexion) autour de D (resp. de plan H). Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $fs_Hf^{-1} = s_{f(H)}$ (resp. que $fr_Df^{-1} = r_{f(D)}$).

b) Soit f une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute isométrie (resp. isométrie directe) g de $\mathbb{R}^3$, $fg = gf$;

(ii) pour toute réflexion (resp. tout demi-tour) g, $fg = gs$;

(iii) $f = \mathrm{Id}$.

[Les implications (i)⇒(ii) et (iii)⇒(i) sont triviales ; on peut remarquer que (ii)⇒(i) résulte d'un théorème du cours ; enfin, pour (ii)⇒(iii), on remarquera que tout point est l'intersection de trois plans (resp. de deux droites) et qu'un plan (resp. une droite) est l'ensemble des points fixes d'une réflexion (resp. d'un demi-tour).]

2° Écriture

a) Soit $\omega = {}^t(a\ b\ c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal d'un vecteur $v = {}^t(x\ y\ z)$ sur la droite $\mathbb{R}\omega$. En déduire les coordonnées de l'image de v par la réflexion d'hyperplan $v^\perp$ et par le demi-tour d'axe $\mathbb{R}\omega$.

b) Donner les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y, z)$ par les réflexions de plans d'équations $y = z$ et $x = z$; décrire la composée (dans chaque ordre possible).

3° Décomposition

Décomposer chacune des isométries suivantes comme produits d'involutions (demi-tours ou réflexions, selon si l'isométrie est directe ou pas).

a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ -bx + ay \end{pmatrix}$ où $a^2 + b^2 = 1$, $ab \neq 0$;

b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$;

c) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-2y+z\\x+2y+2z\\-2x-y+2z\end{pmatrix}$;

d) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-2y+z\\x+2y+2z\\2x+y-2z\end{pmatrix}$.

4° **Reconnaissance**

Donner la nature (rotation, réflexion, composée d'une rotation et d'une réflexion, etc.) et les éléments caractéristiques (points fixes, angle...) des isométries de la question précédente.

III Sur les polyèdres réguliers

1° **Tétraèdre régulier**

a) Calculer la hauteur d'un tétraèdre régulier de côté a.
b) Calculer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier de côté a.
c) On fixe un tétraèdre régulier de côté a et on considère le tétraèdre dont les sommets sont les centres des faces : calculer la longueur de ses arêtes et son volume.

2° **Icosaèdre régulier**

Soient a, b réels, $0 < a < b$. On considère les points suivants de $\mathbb{R}^3$, qui forment trois rectangles :

$$(\pm a, \pm b, 0), \quad (0, \pm a, \pm b), \quad (\pm b, 0, \pm a).$$

Trouver une relation entre a et b pour que ces points soient les sommets d'un icosaèdre régulier.

3° **Simplexe régulier**

a) Expliquer pourquoi on peut dire que
– un segment est un 1-simplexe régulier ;
– un triangle équilatéral est un 2-simplexe régulier ;
– un tétraèdre régulier est un 1-simplexe régulier ;
b) On fixe un entiers $n \in \mathbb{N}^*$. Partant des exemples précédents, définir ce qu'est un n-simplexe régulier dans $\mathbb{R}^n$. Combien de sommets possède-t-il ? de faces de dimension $n-1$? de facettes de dimension k ?
c) Montrer l'existence d'un n-simplexe régulier de deux façons :
– en « relevant » une hauteur depuis le centre d'un $n-1$-simplexe ;
– en considérant l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
d) Montrer que deux n-simplexes réguliers sont semblables.
e) Reprendre les questions a et b du paragraphe 1°. Quelle est la limite du volume du n-simplexe de côté 1 lorsque n tend vers l'infini ? du rayon de la sphère circonscrite ?

4° **Caractéristique d'Euler-Poincaré**

Compléter le tableau suivant, dans lequel on désigne par S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces d'un polyèdre.

nom	S	A	F	$S-A+F$
tétraèdre				
cube				
octaèdre				
dodécaèdre				
icosaèdre				
...				