Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Groupe des isométries du cube

«Le plan» (resp. «l'espace») désigne un espace affine de dimension 2 (resp. 3) euclidien orienté muni si nécessaire d'un repère orthonormé direct. On se donne une partie X du plan ou de l'espace et on note G le groupe des isométries g qui envoient X sur X.

I Groupes finis d'isométries

1° Supposons X *finie*. Montrer que G fixe l'isobarycentre de X. Qu'en déduit-on sur les coordonnées de l'image d'un point par un élément de G lorsqu'on se place dans un repère qui a cet isobarycentre pour origine (ce que l'on fera désormais) ?

2° Soit G^+ l'ensemble des isométrie de G qui sont directes (i.e. leur déterminant vaut 1).
a) Montrer que G^+ est un sous-groupe distingué[1] de G.
b) On suppose que $G \setminus G^+$ contient un élément g_1. Montrer que l'application $G^+ \to G \setminus G^+$, $g \mapsto gg_1$ est une bijection.

II Groupes de polygones

On se place dans le plan.

1° Parallélogrammes

Soit $X = ABCD$ un parallélogramme – c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ – dont le centre est l'origine du repère.
a) Caractérisations classiques
– Montrer que $ABCD$ est un losange SSI les diagonales sont perpendiculaires : $(AC) \perp (BD)$.
– Montrer que $ABCD$ est un rectangle SSI les diagonales sont isométriques : $AC = BD$.
b) Décrire G dans le cas où :
– $ABCD$ est un parallélogramme qui n'est ni losange, ni rectangle ;
– $ABCD$ est un losange ;
– $ABCD$ est un rectangle mais pas un carré ;
– $ABCD$ est un carré.
[Examiner ce qu'il advient des diagonales. Pour un parallélogramme, on vérifiera qu'il y a exactement deux rotations dans G et pas de réflexion. Pour un losange ou un rectangle, on exhibera deux réflexions supplémentaires. Pour un carré, on exhibera une rotation supplémentaire.]

2° Polygone régulier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta = \exp(2i\pi/n)$. On prend pour X l'ensemble des points d'affixe ζ^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
a) Montrer que l'isobarycentre de X est l'origine O du repère.
b) Décrire les rotations qui appartiennent à G. Montrer qu'elles forment un groupe engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/n$.
c) Vérifier que la réflexion σ d'axe l'axe des abscisse préserve X.
d) Montrer que tout élément de G s'écrit de façon unique sous forme $\sigma^\varepsilon \rho^k$, où $\varepsilon \in \{0,1\}$ et $0 \leqslant k < n$.

III Groupe du cube

On note G le groupe des isométries qui préservent le cube X dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

1. On rappelle qu'un sous-groupe H est une partie de G stable par composition et passage à l'inverse et qu'il est dit distingué si, pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, on a : $ghg^{-1} \in H$.

1° Vérifier que le centre du cube est bien l'origine du repère.

2° Quelques éléments de G

a) Exhiber trois + quatre réflexions dans G.
b) Exhiber six demi-tours dans G.
c) Exhiber quatre rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ dans G.

3° Octaèdre

Soit Y l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.
a) On dit que l'enveloppe convexe de Y est un octaèdre : justifier ce nom.
b) Vérifier que les points de Y sont les centres des faces du cube.
c) Justifier sans trop détailler que G préserve les faces du cube, puis que les éléments de G stabilisent Y.
d) À l'aide du contrôle du 30 avril, montrer que G contient au plus 48 éléments et préciser la forme de leurs matrices.
e) Vérifier que chacune de ces 48 possibilités est bien une isométrie du cube. Retrouver les exemples de la question précédente.

4° Action sur les diagonales

a) On appelle *grandes diagonales* les quatre droites passant par l'origine et dirigées par $v_{\varepsilon\varepsilon'} = (1, \varepsilon, \varepsilon')$ où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$. Montrer que l'ensemble de ces quatre droites est stable par G.
Un élément g de G définit donc une permutation de ces quatre droites, c'est-à-dire un élément π_g du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.
b) Vérifier que l'application $\pi : G \to \mathfrak{S}_4$, $g \mapsto \pi_g$ est un morphisme de groupes [2].
c) Soit φ une isométrie linéaire pour qui les quatre vecteurs $v_{\varepsilon\varepsilon'}$ sont des vecteurs propres. Montrer que les quatre valeurs propres correspondantes sont égales.
d) En déduire que l'application π induit une injection de G^+ dans $\mathfrak{S}_4$.
e) À l'aide des demi-tours de la question précédente, montrer que $\pi(G^+)$ contient les transpositions, puis que $\pi(G^+) = \mathfrak{S}_4$.
f) Combien d'éléments contient G ?

2. C'est-à-dire que $\pi_{gg'} = \pi_g \pi_{g'}$ pour tous $g, g' \in G$.