Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Un peu de coniques

1° **Remords : volume d'un octaèdre régulier ? d'un icosaèdre régulier ?**

2° **Réduction d'une conique**

Stratégie de réduction d'une conique

On veut étudier la conique ayant pour équation, dans un repère orthonormé :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Voici des étapes assez habituelles :
- est-ce une conique à centre ou pas : déterminant de la partie quadratique, $ac - b^2$;
- s'il y a un centre :
  - genre de la conique : signe du déterminant ;
  - s'il y a un centre, le déterminer : $ax^2 + 2dx = a(x+d)^2 - \cdots$, idem pour y ; faire le changement de repère idoine ; [1]
  - déterminer les axes de la conique : vecteurs propres et valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; faire le changement de repère idoine ;
  - pour une hyperbole : déterminer les asymptotes ;
  - tracer ;
- s'il n'y a pas de centre :
  - déterminer la direction de la branche parabolique : factoriser la partie quadratique de l'équation ;
  - trouver le sommet éventuel, un repère adapté...
  - tracer.

Éléments caractéristiques et tracé des coniques suivantes

a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 + \sqrt{2}(y - x) = 8$;
b) $x^2 - 4xy + y^2 + x + y + 1 = 0$;
c) $mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$;
d) $mx^2 - 4mx - (m-1)^2y^2 + 2 = 0$ $(m \in \mathbb{R})$;
e) $\dfrac{x^2}{k-1} + \dfrac{y^2}{k+1} = 1$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$;

3° **Quelques exercices différents**

a) Une hyperbole est *équilatère* si ses asymptotes sont perpendiculaires. Montrer qu'alors, dans un repère convenable, elle possède une équation de la forme $xy = k$ avec $k > 1$.

b) Soient A, B, C trois points d'une hyperbole équilatère. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que H appartient à l'hyperbole.

c) Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole et $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ ses asymptotes. Soit M un point de $\mathscr{H}$, il se projette orthogonalement sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en H et H'. Montrer que $MH \cdot MH'$ ne dépend pas de $\mathscr{H}$.

d) Soit P un polynôme réel de degré trois. Nature de $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x) = P(y)\right\}$?

e) Soient cinq point du plan « en position générale ». Montrer qu'il existe une unique conique – éventuellement dégénérée – qui les contient.

---

1. NB : Que faire si on a par exemple : $xy - 2x - 4y + 1 = 0$?