Géométrie élémentaire (cours de S. Parmentier): programme du CC1 2013

Voici une liste des notions de cours au programme du CC1. Les multiples exemples de cours ne sont pas repris ici mais sont importants.

Des exemples de questions figurent dans le sujet du CC1 de 2012 et biensûr dans les tds de J. Germoni.

Les barycentres ne figurent pas au programme de ce CC1.

1. Espace affine usuel sur un corps commutatif K: il s'agit de l'ensemble K^n des $n-$ uplets d'éléments de K muni de l'application

$$\begin{aligned}&K^n \times K^n \to K^n\\&(A=(a_1,\ldots,a_n), B=(b_1,\ldots,b_n)) \mapsto \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ldots,b_n-a_n)\end{aligned}$$

Cette application satisfait à la relation de Chasles: $\forall A,B,C \in K^n$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

2. Repère de K^n: $\mathcal{R}=(O,(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n))$ où $O \in K^n$ (l'origine du repère) et $(\vec{b}_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de l'espace vectoriel K^n.

3. Base affine: tout $n+1$ uplets $\mathcal{B}=(P_0,\ldots,P_n), P_i \in K^n$, tel que $(P_0,(\overrightarrow{P_0P_1},\ldots,\overrightarrow{P_0P_n}))$ soit un repère de K^n.

4. Coordonnées d'un point dans le repère $\mathcal{R}$: tout point $M \in K^n$ s'écrit d'une unique manière sous la forme

$$M=O+\overrightarrow{OM}=O+\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{b}_i.$$

Les scalaires $x_i \in K, i \in [1,n]$, sont appelés les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

5. Changement de repères: pour 2 repères $\mathcal{R}=(O,(\vec{b}_i))$ et $\mathcal{R}'=(O',(\vec{b}'_i))$, la relation

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$$

s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{b}_j=\sum_{j=1}^{n} z_j\vec{b}_j+\sum_{i=1}^{n} x'_i\vec{b}'_i=\sum_{j=1}^{n} z_j\vec{b}_j+\sum_{i=1}^{n} x'_i(\sum_{j=1}^{n} P_{ji}\vec{b}_j)$$

où $z_1,\ldots,z_n$ sont les coordonnées de O' dans le repère $\mathcal{R}$ et P est la matrice de passage de $(\vec{b}_i)$ à $(\vec{b}'_i)$. Matriciellement, on a

$$X=Z+PX'.$$

6. Sous-espaces affines: soit $P \subset K^n$ une partie non vide. On dit que P est un sous-espace affine de K^n s'il existe $A \in P$ et un sous-espace vectoriel $W \subset K^n$ tels que

$$P=\{M, \overrightarrow{AM} \in W\}.$$

Le sous-espace W est appelé la direction de P et est noté $\overrightarrow{P}$. La dimension de P est par déf. $dim_K\overrightarrow{P}$. Pour un sous-espace affine P on a: $\forall B \in P, P=\{M, \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{P}\}$.

7. Intersection: Si elle est non vide, l'intersection $\bigcap_{j\in J} P_j$ de toute famille $(P_j)_{j\in J}$ de sous-espaces affines de K^n est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{j\in J}\overrightarrow{P_j}$.

8. Critère d'intersection de 2 sous-espaces affines: soient P, P' 2 sous-espaces affines, $A \in P, A' \in P'$.

$$P \cap P' \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{P} + \overrightarrow{P}'.$$

9. Sous-espaces affines supplémentaires: 2 sous-espaces affines P, P' de K^n sont dits supplémentaires si

$$K^n = \overrightarrow{P} \oplus \overrightarrow{P'}.$$

Par le critère 8, $P \cap P' \neq \emptyset$ et par le point 7, $P \cap P'$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{P'} = \{\vec{0}\}$. Dès lors $P \cap P'$ est un singleton.

10. Enveloppe affine: soit une partie $Q \subset K^n$. L'intersection de tous les sous-espaces affines de K^n contenant Q est appelée l'enveloppe affine de Q. Cette enveloppe est notée $\langle Q \rangle$.
C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace affine de K^n contenant Q.

11. Enveloppe affine d'une famille finie $\{M_j, j \in [0, m]\}$ de points de K^n:

$$\langle M_0, \ldots, M_m \rangle = M_0 + Vec(\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_m}).$$

12. Equation d'un sous-espace P dans un repère $\mathcal{R}$: soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les cordonnées d'un point $M \in K^n$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, (\vec{b}_i)_{1 \leq i \leq n})$, $d = dim\, P$, $A \in P$ et soit $L : K^n \to K^{n-d}$ une application linéaire telle que $Ker\, L = \overrightarrow{P}$. On a

$$M \in P \Leftrightarrow L(\overrightarrow{AM}) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow L(\overrightarrow{OM}) = L(\overrightarrow{OA}),$$

ce qui s'écrit en coordonnées sous la forme d'un système de $n-d$ équations linéaires indépendantes

$$\begin{aligned} l_{11}x_1 + \ldots + l_{1n}x_n &= d_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots &= \vdots \\ l_{n-d\,1}x_1 + \ldots + l_{n-d\,n}x_n &= d_{n-d} \end{aligned}$$

Cas particulier: un hyperplan affine ($d = n-1$) est donné dans $\mathcal{R}$ par une seule équation (qui est unique à un scalaire près).
Pour P de dimension $d \leq n-1$, le système d'équations revient à réaliser P comme intersection de $n-d$ hyperplans affines. Lorsque $d \leq n-2$ ce système d'équations n'est pas unique.

13. Applications affines: une application $f : K^n \to K^{n'}$ est dite affine s'il existe un point $M \in K^n$ et une application linéaire $L : K^n \to K^{n'}$ tels que

$$\forall N \in K^n, \ \overrightarrow{f(M)f(N)} = L(\overrightarrow{MN}) \quad (\star)$$

Si $(\star)$ est satisfaite pour M et tout N, elle est satisfaite pour tout $(M, N) \in K^n \times K^n$; L est uniquement déterminée par f et est notée $\overrightarrow{f}$.

14. Soient $A \in K^n, A' \in K^{n'}$ et $L : K^n \to K^{n'}$ une application linéaire. Il existe une unique application affine $f : K^n \to K^{n'}$ telle que $f(A) = A'$, $\overrightarrow{f} = L$. f est donnée par

$$\forall M \in K^n, \quad f(M) = A' + L(\overrightarrow{AM}).$$

15. Soient $f : K^n \to K^{n'}, f' : K^{n'} \to K^{n''}$ 2 applications affines.

- f est injective (surjective) ssi $\overrightarrow{f}$ est injective (surjective).

- $f' \circ f$ est affine et $\overrightarrow{f' \circ f} = \overrightarrow{f'} \circ \overrightarrow{f}$.

- Si f est bijective (auquel cas $n = n'$), f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

16. Soit une base affine $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de K^n et un $n+1-$ uplet arbitraire $(P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$ de points de $K^{n'}$.

Il existe une unique application affine $f : A \to A'$ telle que pour tout i, $f(P_i) = P'_i$.

Démo: Ecrire le point $P \in K^n$ dans le repère $(P_0, (\overrightarrow{P_0P_i})_{1 \le i \le n})$: $P = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{P_0P_i}$ avec $x_i \in K$.

Pour toute application affine $f : K^n \to K^{n'}$ on a

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P}) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P_i}).$$

La condition pour tout $i, f(P_i) = P'_i$ donne

$$f(P_0) = P'_0 \quad (1)$$

et pour $i \neq 0$,

$$\overrightarrow{P'_0P'_i} = \overrightarrow{f(P_0)f(P_i)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P_i}) \quad (2)$$

(1) donne l'image d'un point. (2) donne $\overrightarrow{f}$ car $(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ est une base. Dès lors notre condition détermine f (par 14) et f est donnée par

$$f(P) = P'_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P'_0P'_i}.$$

Lorsque $n = n'$, f est une bijection affine ssi $(P'_0, \ldots, P'_n)$ est une base affine de K^n.

17. Applications affines et sous-espaces: soit $f : K^n \to K^{n'}$ affine, $P \subset K^n, P' \subset K^{n'}$, 2 sous-espaces affines.

- $f(P)$ est un sous-espace affine de $K^{n'}$. Pour $A \in P$ on a $f(P) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P})$.

- $f^{-1}(P')$ est un sous-espace affine de K^n. Pour $A \in f^{-1}(P')$ on a $f^{-1}(P') = A + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{P'})$.

18. Soit $f : K^n \to K^{n'}$ affine. L'image $f(\langle Q \rangle)$ de l'enveloppe affine (cf 11) de la partie finie $Q \subset K^n$ est l'enveloppe affine $\langle f(Q) \rangle \subset K^{n'}$.

19. Projections affines: soit P un sous-espace affine de K^n de direction $\overrightarrow{P}$ et $W \subset K^n$ un sous-espace vectoriel tel que $K^n = \overrightarrow{P} \oplus W$.

Pour un point $M \in K^n$ désignons par P_M l'unique sous-espace affine de K^n passant par M et tel que $\overrightarrow{P_M} = W$. P et P_M sont alors supplémentaires (cf 9) et $P \cap P_M$ est un singleton. Notons $P \cap P_M = \{p(M)\}$. L'application

$$p : K^n \to K^n : M \mapsto p(M)$$

est affine et est appelée la projection affine sur P parallèlement à la direction W. Pour un point $O \in P$ on a, pour tout $M \in K^n$,

$$p(M) = O + pr_{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{OM})$$

où $\overrightarrow{OM} = pr_{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{OM}) + pr_W(\overrightarrow{OM})$ est la décomposition de $\overrightarrow{OM}$ relative à la somme directe $K^n = \overrightarrow{P} \oplus W$.

On a $p \circ p = p$. Toute application affine f telle que $f \circ f = f$ est appelée un projecteur affine. Pour $O \in f(K^n)$, c'est la projection affine sur $O + Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{K^n})$ parallèlement à $Ker\,\overrightarrow{f}$.

20. Symétries affines: on reprend les notations du 19. L'application

$$s : K^n \to K^n : M \mapsto O + pr_{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{OM}) - pr_W(\overrightarrow{OM})$$

est appelée la symétrie affine de sous-espace P et de direction W. On a $s \circ s = id$. Toute application affine f telle que $f \circ f = id$ est appelée une symétrie affine. Toute symétrie affine admet un point fixe O et est la symétrie de sous-espace $O + ker(\overrightarrow{f} - id_{K^n})$ et de direction $Ker(\overrightarrow{f} + id_{K^n})$.

21. Groupes affines: par le point 15, l'ensemble GA_n des bijections affines de K^n est un groupe pour la composition des applications.
- L'application

$$GA_n \to GL_n(K) : f \mapsto \overrightarrow{f}$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est le sous-groupe (distingué) des translations de K^n.
- Soit $O \in K^n$. L'ensemble G_O des bijections affines $g \in GA_n$ fixant O ($g(O) = O$) est un sous-groupe de GA_n.
- Toute bijection affine $f \in GA_n$ se décompose d'une manière unique sous la forme

$$f = \tau \circ g$$

où τ est une translation et $g \in G_O$: τ est la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$ et $g(M) = O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$.
En d'autres termes: l'application

$$GA_n \to K^n \times GL_n(K) : f \mapsto (\overrightarrow{Of(O)}, \overrightarrow{f})$$

est une bijection.

22. Bijections affines stabilisant une partie: soit une partie $Q \subset K^n$. L'ensemble G_Q des bijections affines $f \in GA_n$ telles que $f(Q) = Q$ (i.e. telles que $\forall q \in Q, f(q) \in Q$ et $f^{-1}(q) \in Q$) est un sous-groupe du groupe affine.

23. Le groupe du tétraèdre: soit $T = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ l'ensemble des sommets d'un tétraèdre (non aplati) de R^3 et G_T le sous-groupe de GA_n stabilisant T. Toute $f \in G_T$ induit par restriction à T une bijection

$$f_{|T} : T \to T.$$

Il existe donc une permutation $\sigma \in S_4$ telle que pour tout $i \in [1, 4]$,

$$f_T(P_i) = P_{\sigma(i)}.$$

L'application

$$\phi : G_T \to S_4 : f \mapsto \sigma$$

est un morphisme de groupes.
ϕ est surjectif: en effet, (P_1, P_2, P_3, P_4) étant une base affine de R^3, par 16, pour toute $\sigma \in S_4$, il existe une unique application affine f telle que $f(P_i) = P_{\sigma(i)}, i \in [1, 4]$. Comme f envoie une base affine sur une base affine, elle est bijective, i.e. $f \in G_T$.
ϕ est injectif: en effet si $\sigma = \sigma'$ i.e. si $f_{|T} = f'_{|T}$, f et f' coincident sur la base affine (P_1, P_2, P_3, P_4) donc $f = f'$ par 16.
Conclusion: G_T est isomorphe à S_4. En particulier, $\mid G_T \mid = 24$.

Géométrie élémentaire (cours de S. Parmentier): programme du CC2 2013

Voici une liste des notions de cours au programme du CC2. Il s'agit du chapitre intitulé *barycentres et convexité* et du chapitre *rappels sur les espaces euclidiens et groupe orthogonal.* Les angles orientés et sphériques, a fortiori la formule d'Euler, ne sont pas au programme du CC2.
Bien sûr, les notions importantes du premier résumé sont supposées acquises. Les exemples de cours ne sont pas tous repris mais sont importants, idem pour les travaux dirigés.

On considère l'espace affine R^n.

I.

24. Barycentres

Pour $r+1$ points $P_0, P_1, \ldots, P_r \in R^n$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r \in R$ vérifiant

$$\sum_{i=0}^{r} a_i \neq 0,$$

l'application $f : R^n \to R^n$ définie par

$$P \mapsto \sum_{i=0}^{r} a_i \, \overrightarrow{PP_i}.$$

est une bijection.

Le *barycentre* des points pondérés $(P_i, a_i)_{0 \leq i \leq r}$ est l'unique point $S \in R^n$ pour lequel

$$f(S) = \mathbf{0}.$$

Pour tout point $Q \in R^n$ on a

$$S = Q + \frac{1}{\sum_{j=0}^{r} a_j} \sum_{i=0}^{r} a_i \, \overrightarrow{QP_i}.$$

Remarques et terminologie:

- l'expression explicite qui précède ne dépend pas du point Q. En particulier on peut prendre $Q = P_0$.

- dans le cours, j'utilise la notation

$$S = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}.$$

- pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a\,a_0 & a\,a_1 & \cdots & a\,a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}.$$

- le barycentre

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est appelé l' *isobarycentre* de $(P_i)_{0\leq i\leq r}$. En particulier

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le point milieu du segment $[A, B]$.

25. Propriété 1 (fondamentale): le barycentre est *associatif*, ce qui signifie:
pour toute partition

$$\{0, 1, \ldots, r\} = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_q$$

vérifiant

$$\forall k \in \{0, \ldots q\}, \sum_{i\in I_k} a_i \neq 0$$

on a

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_q \\ \sum_{i\in I_0} a_i & \sum_{i\in I_1} a_i & \cdots & \sum_{i\in I_q} a_i \end{pmatrix}$$

où S_k est le barycentre des points pondérés $(P_i, a_i)_{i\in I_k}$.

Bis repetita: l'*associativité* du calcul barycentrique est importante. Elle est souvent utilisée pour faire la preuve de propriétés d'incidence.

Par exemple l'assertion

- les 3 droites passant par les milieux des arètes opposées d'un tétraèdre de sommets A, B, C, D sont concourantes -

provient de

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

26. Applications affines et barycentres.

Propriété 2 (fondamentale): Les applications affines conservent les barycentres, ce qui signifie:
Toute application affine $f : R^n \to R^{n'}$ satisfait à

$$f(\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f(P_0) & f(P_1) & \cdots & f(P_r) \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

27. Bijections affines conservant une partie finie $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_r\} \subset R^n$

Propriété 3 (fondamentale):

- L'ensemble $G_P := \{f \in GA_n,\ f(P) = P\}$ des bijections affines qui conservent P est un sous-groupe du groupe affine GA_n.

- Pour toute $f \in G_P$,

$$f(\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour rappel: dire qu'une bijection affine f conserve une partie P, ce que l'on écrit $f(P) = P$, signifie

$$\forall p \in P, f(p) \in P\, et\, f^{-1}(p) \in P.$$

Ceci *n'implique pas* que les points de P sont des points fixes de f.
Par exemple, la rotation ρ du plan R^2 de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ conserve l'ensemble des sommets

$$A = (1,0), B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

du triangle équilatéral (cf les racines 3-ièmes de l'unité dans $C \simeq R^2$) sans fixer ceux-ci puisque

$$\rho(A) = B, \quad \rho(B) = C, \quad \rho(C) = A.$$

La deuxième assertion de la propriété 3 est un exemple simple de *théorème de point fixe*: si la bijection affine f conserve P i.e. si f permute les points de P, alors f fixe l'isobarycentre des points de P. C'est un cas particulier de la propriété 2.

28. Exemple important de groupe conservant une partie finie: le groupe du tétraèdre (cf point 23 du resumé 1).

L'exemple du tétraèdre se généralise, avec la même preuve, à toute dimension $n \geq 2$:
Pour toute base affine $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ de R^n le groupe G_P des bijections affines qui conservent la partie $P = \{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$ est isomorphe au groupe des permutations S_{n+1}.
En particulier, le groupe des bijections affines du plan R^2 qui conservent les sommets d'un triangle est isomorphe à S_3.
Comme décrit dans le corrigé du CC1, la situation est très différente pour les polygones du plan à $n \geq 4$ sommets car ces sommets ne forment plus une base affine du plan. Par exemple, le groupe du carré G_C est d'ordre 8. En général le groupe du polygone régulier du plan à $n \geq 3$ côtés, appelé le *groupe diédral* est d'ordre $2n$. Observez que $2n =\mid S_n \mid = n!$ ssi $n = 3$. Pour $n \geq 4$, certaines permutations des sommets du polygone ne sont pas les restrictions à l'ensemble des sommets d'une bijection affine du plan.

29. Convexité

Soient $P_0, P_1 \in R^n$. Le *segment*

$$[P_0, P_1] = \{ \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ 1-t & t \end{pmatrix}, t \in [0,1]\}$$

est l'ensemble des barycentres des points pondérés (P_0, a) et (P_1, b) avec $a \geq 0, b \geq 0, a+b \neq 0$.
Def: Une partie $C \subset R^n$ est dite *convexe* si

$$\forall (P_0, P_1) \in C^2, \quad [P_0, P_1] \subset C.$$

Propriétés:
- l'intersection $C \cap C'$ de parties convexes C et C' est convexe
- l'image $f(C)$ d'une partie convexe C par une application affine f est convexe.
- l'image réciproque $f^{-1}(C')$ d'un convexe C' par une application affine f est convexe.

Toute application affine

$$f : R^n \to R : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$$

est appelée un *forme affine*. En considérant l'une de ses équations dans le repère canonique, tout hyperplan affine de R^n s'écrit $f^{-1}(0)$ pour une forme affine f non constante (unique à un multiple près). Pour une telle forme affine

$$R^n = f^{-1}(R_{>0}) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(R_{<0}) \quad \text{(réunion disjointe de convexes)}$$

Les parties $f^{-1}(R_{>0})$, resp. $f^{-1}(R_{\geq 0})$, sont appelées *demi - espaces ouverts*, resp. *fermés*. Idem pour $<$.

Def.

(1) On dit que la partie $P \subset R^n$ est un *polyèdre convexe* s'il existe des formes affines non constantes $f_j : R^n \to R, j \in [1, d]$, telles que P soit l'intersection finie

$$P = \bigcap_{1 \leq j \leq d} f_j^{-1}(R_{\geq 0})$$

des demi-espaces fermés associés aux f_j.

(2) On appelle *frontière* ou *bord* du polyèdre convexe P l'ensemble des $\mathbf{x} \in P$ pour lesquels il existe $j \in [1, d], f_j(\mathbf{x}) = 0$. On appelle *intérieur* de P, l'ensemble des $\mathbf{x} \in P$ pour lesquels $f_j(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $j \in [1, d]$. Notons ∂P le bord et $Int(P)$ l'intérieur de P. On a

$$P = Int(P) \bigcup \partial P.$$

(3) On dit que $P \subset R^n$ est un *polytope* si P est un polyèdre convexe *borné* et *d'intérieur non vide*. Pour $n = 2$ un polytope est appelé un *polygone*.

Exemples/contre-exemples:
- Tout demi espace fermé de R^n est un polyèdre convexe non borné d'intérieur non vide.
- Toute droite affine D du plan est un polyèdre convexe non borné d'intérieur vide. En effet, si $D = f^{-1}(0)$, on a

$$D = f^{-1}(R_{\geq 0}) \bigcap (-f)^{-1}(R_{\geq 0}).$$

- Tout segment fermé $[P_0, P_1]$ du plan est un polyèdre convexe borné d'intérieur vide.
- Tout tétraèdre T plein non aplati de R^3, tout cube plein de R^3,... sont des polytopes.
- (voir point 30) L'enveloppe convexe $[P_0, \dots, P_n]$ d'une base affine $(P_0, \dots, P_n)$ de R^n est un polytope.

30. Enveloppe (ou clôture) convexe d'une partie finie $P \subset R^n$.

Def: On appelle *enveloppe convexe* de P la plus petite partie convexe (pour l'inclusion) de R^n contenant P. C'est l'intersection des parties convexes de R^n contenant P.

Par analogie au segment $[P_0, P_1]$, je noterai $[P]$ l'enveloppe convexe de la partie P.

Proposition: soit $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_r\}$. On a

$$[P] = \left\{ \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}, \, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} a_i \neq 0 \right\}$$

i.e. l'enveloppe convexe de P est l'ensemble des *barycentres des points pondérés* $(P_i, a_i)_{0 \leq i \leq r}$ *à poids* a_i *positifs.*

Remarque: la preuve de cet énoncé très utile utilise une récurrence sur le nombre $r \geq 2$ de points de P.

31. Image affine d'une enveloppe convexe.

Comme corollaire immédiat de la conservation des barycentres (propriété 2 du point 26) on a la

Propriété 4: soit $P \subset R^n$ une partie finie et $f : R^n \to R^{n'}$ une application affine. Alors, $f([P]) = [f(P)]$.

En mots: l'image par f de l'enveloppe convexe de $\{P_0, \ldots, P_r\}$ est l'enveloppe convexe des points images $\{f(P_0), \ldots, f(P_r)\}$.

Exemple: soient A, B, C, D les quatre sommets d'un tétraèdre.
L'enveloppe convexe $[A, B, C, D]$ est le tétraèdre plein. Par le corollaire, toute bijection affine f conservant l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D\}$ conserve aussi le tétraèdre plein $[A, B, C, D]$.

Toute bijection affine conservant l'ensemble des sommets d'un cube, conserve le cube plein. Par la propriété 3 cette bijection fixe le centre du cube (car c'est l'isobarycentre de ses sommets).

II.

32. Polynômes de Bernstein

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \, 0 \leq k \leq n, t \in [0,1]$$

Partition de l'unité: $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) = 1$

Relation de récurrence: $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)$ avec la convention $B_{l,m}(t) = 0$ pour $l < 0$ et pour $l > m$.

33. Courbe de Bézier sur les points de contrôles $P_0, \ldots, P_n$ du plan d'origine O:

$$M(t) = O + \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \overrightarrow{OP_k}$$

i.e.

$$M(t) = \begin{pmatrix} P_0 & \ldots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \ldots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Proposition:

$$\begin{pmatrix} P_0 & \ldots & P_{n+1} \\ B_{0,n+1}(t) & \ldots & B_{n+1,n+1}(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} P_0 & \ldots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \ldots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix} \\ 1-t \end{matrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_{n+1} \\ B_{0,n}(t) & \ldots & B_{n,n}(t) \end{pmatrix} \\ t \end{matrix} \right)$$

34. Algorithme de Casteljau: cet algorithme, basé sur la proposition du point 33, détermine, pour $t \in [0,1]$, le point $M(t)$ de la courbe de Bézier par un calcul de barycentres successifs:

Initialiser $M_{j,0} = P_j$ et poser, à l'étape $l \in [1, n]$,

$$M_{j,l} = \begin{pmatrix} M_{j,l-1} & M_{j+1,l-1} \\ 1-t & t \end{pmatrix}, j \in [0, n-l].$$

On a alors $M_{0,n}(t) = M(t)$.

III.

Pour ce qui suit, des rappels (plus complets que ceux du cours sur les questions euclidiennes vectorielles) et les preuves de cours figurent au chapitre 2 du poly que je vous ai transmis. J'omets les rappels ici.

$(E, \langle\, , \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, i.e. un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire $E \times E \to R : (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$. La distance euclidienne est donnée par

$$d(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}.$$

35. Groupe orthogonal

Il s'agit du groupe

$$O(E) = \{f \in End(E), \forall u, v \in E, \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle\}.$$

Soit $O^{\pm}(E) = \{f \in O(E), det(f) = \pm 1\}$. $O^+(E) < O(E)$ est un sous-groupe distingué, $O^-(E)$ n'est pas un sous-groupe de $O(E)$ et

$$O(E) = O^+(E) \bigcup O^-(E).$$

Le groupe $O(E)$ est égal au groupe $Isom(E)$ des isométries linéaires (i.e. des endomorphismes de E qui conservent la distance d).

36. Groupe orthogonal et réflexions

Pour rappel, on appelle symétrie (linéaire) tout endomorphisme $s \in End(E)$ tel que $s^2 = id$. s étant annulé par le polynôme scindé simple $X^2 - 1$ sur R, s est diagonalisable de spectre $Spec(s) \subset \{+1, -1\}$ et on a

$$E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id).$$

Prop. $s \in O(E) \Leftrightarrow Ker(s - id)^{\perp} = Ker(s + id)$.

Def. On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale pour laquelle $dim(Ker(s - id)) = dimE - 1$.

Théorème: Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E)$. Plus précisément, quel que soit $f \in O(E)$ il existe p réflexions $s_1, \ldots, s_p$ avec $p \leq dim(E)$ telles que

$$f = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_p.$$

37. Somme directe adaptée à un endomorphisme orthogonal

Théorème: soit $f \in O(E)$. Il existe une décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} W_i$$

avec

$$\forall i,\ f(W_i) \subset W_i,\ dim\, W_i \leq 2 \ \text{ et } \ \forall i \neq j,\ W_i \perp W_j.$$

Etapes de la preuve: (i) commencer par montrer que pour $f \in End(E)$ il existe un sous-espace $W \subset E$ non nul de dimension au plus 2 tel que $f(W) \subset W$.

(ii) observer ensuite que pour $f \in O(E)$, $f(W) \subset W$ implique $f(W^\perp) \subset W^\perp$.

(iii) Le théorème résulte d'une récurrence: c'est vrai pour $n = 1$. Supposer l'assertion vraie pour tout espace euclidien de dimension $\leq n$ et soit E de dimension $n+1$. Pour $f \in O(E)$, choisir un sous-espace $W \subset E$ non nul de dimension au plus 2 tel que $f(W) \subset W$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $f_{|_{W^\perp}} \in O(W^\perp)$.

38. Forme normale matricielle

Pour rappel: $f \in O(E) \Leftrightarrow$ la matrice A de f dans toute base orthonormée de E satisfait à

$${}^tAA = 1_n = A\,{}^tA.$$

Théorème: soit $f \in O(E)$. Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice A de f dans cette base s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où $p_+ + p_- + 2r = dimE = n$ et $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

Cette forme matricielle résulte du théorème du point 37 et des observations suivantes:

(1) toute valeur propre réelle d'un endomorphisme orthogonal est soit $+1$ soit -1.

(2) en dimension 2, $O^+(E)$ est constitué des rotations, de matrice $R(\theta)$ dans une base orthonormée et $O^-(E)$ est constitué des réflexions de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée constituée de vecteurs propres.

39. Isométries affines.

Pour $P, Q \in R^n$, notons $d(P,Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$ la distance euclidienne.

Def: Une application affine $f : R^n \to R^n$ est appelée une isométrie (affine) si quels que soient $P, Q \in R^n$, $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.

Prop. Une application affine $f : R^n \to R^n$ est une isométrie (affine) ssi $\overrightarrow{f} \in O(R^n)$.

Théorème. L'ensemble Is_n des isométries affines de R^n est un sous-groupe du groupe affine GA_n. Pour $O \in R^n$, l'application

$$Is_n \to R^n \times O(R^n) : f \mapsto (\overrightarrow{Of(O)}, \overrightarrow{f})$$

est une bijection.

Remarque: il s'agit de la restriction aux isométries de la bijection du point 21 du résumé 1. Comme pour le point 21, cette bijection n'est pas un isomorphisme de groupes de Is_n sur le produit des groupes $(R^n, +)$ et $(O(R^n), \circ)$.

On pose
$$Is_n^{\pm} = \{f \in Is_n,\, det(\overrightarrow{f}) = \pm 1\}.$$

Is_n^+ est un sous-groupe distingué de Is_n appelé *le groupe des déplacements*. Is_n^- n'est pas un sous-groupe de Is_n. Is_n^- est appelé *l'ensemble des anti-déplacements*. On a

$$Is_n = Is_n^+ \bigcup Is_n^-.$$

Géométrie élémentaire (cours de S. Parmentier): programme du CC3 2013

Voici un résumé des notions importantes présentées depuis le CC2. Je n'ai pas suivi l'ordre de présentation du cours. En particulier, *les angles orientés* ne sont pas repris dans ce résumé et ne figurent pas au programme du CC3.

Le CC3 porte sur l'ensemble du cours.

J'attire votre attention sur les équations de sous-espaces, le calcul d'incidence, i.e. des points d'intersection de sous-espaces, les applications affines, en particulier les homothéties, les projections, les symétries, les isométries affines notamment les réflexions et les rotations, les isométries transformant une configuration en une autre configuration du même type (par exemple, une paire de droites sur une paire de droites, un cube sur un cube, ...); le chapitre sur les barycentres et la convexité est fondamental. Parmi les notions n'ayant pas encore fait l'objet d'un contrôle, ne vous présentez pas au CC3 sans avoir révisé la fonction de volume euclidien et le calcul du volume de polytopes, les notions d' angles géométriques et sphériques, la formule d'Euler (sans démo), la réduction des coniques.

La note N du cours sera calculée comme suit: $N = CC1/20 + Max(CC2, CC3)/40 + CC3/40$.

40. Fonction de volume euclidien.

Def. On appelle *fonction de volume euclidien de dimension $n \leq N$ dans R^N* toute application

$$vol_n : (R^N)^n \to R$$

invariante par dilatation:

$$\forall c \in R, \quad vol_n(a_1, \ldots, ca_i, \ldots, a_n) =| c | \, vol_n(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n),$$

invariante par cisaillement:

$$\forall c \in R, i \neq j, \quad vol_n(a_1, \ldots, a_i + ca_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = vol_n(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$

invariante par isométrie linéaire:

$$\forall Q \in O(R^N), \quad vol_n(Qa_1, \ldots, Qa_n) = vol_n(a_1, \ldots, a_n),$$

normalisée:

$$vol_n(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

où $e_1, \ldots, e_n$ sont les n premiers éléments de la base canonique.

Lemme: toute fonction de $n-$ volume est nulle sur une famille liée et vaut le produit des normes des vecteurs sur une famille orthogonale.

41. Matrice de Gram

Soit $(a_l)_{1 \leq l \leq n}$ n éléments de R^N. On note $(\mid)$ le produit scalaire standard de R^N.

Def. On appelle *matrice de Gram* de $(a_l)_{1 \leq l \leq n}$ la matrice $n \times n$ symétrique suivante:

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \big((a_i \mid a_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Si A désigne la matrice de type $N \times n$ des composantes de $a_1, \ldots, a_n$ dans la base canonique (plus généralement dans une base orthonormée) de R^N, on a

$$G(a_1, \ldots, a_n) =^t A\, A.$$

Propriété: on suppose $(a_l)_{1 \leq l \leq n}$ libre. $G(a_1, \ldots, a_n)$ est alors une matrice définie positive, en particulier son déterminant est un réel strictement positif.

42. La fonction de volume euclidien est unique.

Théorème: Il existe une unique fonction de volume euclidien de dimension $n \leq N$, elle est donnée par

$$vol_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{det(G(a_1, \ldots, a_n))}.$$

Remarque: ce résultat est important. La preuve (un peu technique) omise en cours ne vous sera pas demandée.

Le cas $n = N$: lorsque $n = N$, on a

$$vol_N(a_1, \ldots, a_N) = \sqrt{det({}^t A\, A)} = \sqrt{det^t A\, det A} =\mid det A \mid .$$

Bis repetita: le déterminant est en valeur absolue une mesure de volume.

43. Parallélotopes et leur volume.

Soit $(P_0, \ldots, P_N)$, un $N+1-$ uplet de points de l'espace affine R^N.

Def. On appelle *parallélotope* porté par $(P_l)_{0 \leq l \leq N}$ la partie

$$Q(P_0, \ldots, P_N) := \{P_0 + \sum_{1 \leq i \leq N} \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i},\, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}.$$

On appelle *volume du parallélotope* $Q(P_0, \ldots, P_N)$ le volume euclidien de $(\overrightarrow{P_0 P_l})_{1 \leq l \leq N}$, i.e.

$$vol\, Q(P_0, \ldots, P_N) = vol_N(\overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_N}).$$

Application affine et volume: pour tout parallélotope Q et toute application affine $f : R^N \to R^N$, on a

$$vol\, f(Q) =\mid det\, \vec{f} \mid vol\, Q.$$

44. Disgression, *à titre informatif*, sur la notion générale de 'mesure' ou 'volume'.

Par le point 43. on sait associer à tout parallélotope Q un réel $vol(Q)$ appelé son volume (son aire lorsque Q est un parallélogramme du plan). La question est de savoir comment définir une notion *d'aire* pour une partie plus générale P du plan, une notion *de volume* pour une partie de l'espace, etc.. Il s'agit donc de savoir comment *mesurer* certaines parties de R^N ou plus généralement certaines parties d'un ensemble X. Cette *théorie de la mesure* est formalisée comme suit:

On se donne un ensemble X et on note $P(X)$ l'ensemble de ses parties.
Les parties de X à mesurer sont alors vues comme éléments d'une collection $\mathcal{A} \subset P(X)$ satisfaisant aux conditions naturelles suivantes

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire: si $M \in \mathcal{A}$ alors $X \setminus M \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par passage à la réunion dénombrable: si $\{M_i\}_{i\in I}$ est une famille dénombrable de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i\in I} M_i \in \mathcal{A}$.

Def. On appelle *mesure* sur $\mathcal{A}$ toute application

$$\mu : \mathcal{A} \to R_+ \cup \{\infty\}$$

qui est additive au sens suivant: pour toute famille dénombrable $\{M_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ de parties deux à deux disjointes ($i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset$),

$$\mu(\bigcup_{i\in I} M_i) = \sum_{i\in I} \mu(M_i).$$

Il est facile de voir que toute mesure est additive au sens commun:

$$\forall (M,N) \in \mathcal{A}^2, \quad \mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N) - \mu(M \cap N)$$

en particulier si $M \cap N$ est de mesure nulle (par exemple si M et N sont deux polygones du plan juxtaposés suivant une arête commune), on a bien

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N) \qquad (\star)$$

Le résultat principal sur R^N s'énonce alors comme suit:

Il existe une unique mesure μ sur une collection $\mathcal{A} \subset P(R^N)$ (contenant ouverts, fermés et réunions dénombrables de ceux-ci) telle que pour tout parallélotope droit $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ on ait

$$\mu(Q) = vol_N(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N).$$

Cette mesure appelée *mesure de Lebesgue* se transforme comme vol_N par transformation affine, i.e. $\forall M \in \mathcal{A}$ et toute application affine $f : R^N \to R^N$ on a

$$\mu(f(M)) = \mid det \overrightarrow{f} \mid \mu(M)$$

Il s'ensuit que pour tout parallélotope $Q \subset R^N$, on a

$$\mu(Q) = vol_N(Q).$$

Pour la suite, j'écrirai $vol(M)$ au lieu de $\mu(M)$.

45. Le volume d'un tétraèdre.

J'utilise ici l'additivité du volume (formule $(\star)$ du point 44).

Soit T le tétraèdre de sommets P_0, P_1, P_2, P_3 et Q le parallélotope $Q(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

Prendre l'homothétie h de rapport 2 et de centre P_0. Alors

$$vol(h(T)) = vol(Q) + 3vol(T) - vol(T), \quad vol(h(T)) = 2^3 vol(T)$$

i.e.

$$6\, vol(T) = vol(Q).$$

La formule du déterminant pour $vol(Q)$ donne

$$vol(Q) = base(Q) \times hauteur(Q),$$

dès lors

$$\begin{aligned} vol(T) &= \frac{1}{3} \times \frac{\text{base}(Q)}{2} \times \text{hauteur}(Q) \\ &= \frac{1}{3} \times \text{ base}(T) \times \text{ hauteur}(T) \end{aligned}$$

46. Le volume d'une pyramide.

Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les sommets d'un polygone du plan $\mathbf{P}$ d'équation $z = 0$ dans R^3, $P_0 \in R^3 \setminus \mathbf{P}$ et soit Π la pyramide $[P_0, P_1, \ldots, P_n]$.

Pour obtenir le volume de Π on peut procéder comme suit: notons H le projeté orthogonal de P_0 sur le plan de base $\mathbf{P}$ et supposons ici que H est distinct des sommets du polygone. Décomposons Π en n tétraèdres pleins en prenant les enveloppes convexes $T_1 = [P_0, H, P_1, P_2], \ldots, T_{n-1} = [P_0, H, P_{n-1}, P_n], T_n = [P_0, H, P_n, P_1]$. On a

$$\Pi = \bigcup_{1 \le j \le n} T_j.$$

Les faces des tétraèdres étant de volume nul on a

$$\begin{aligned} vol(\Pi) &= \sum_{1 \le i \le n} vol(T_i) \\ &= \frac{1}{3} \times \sum_{1 \le i \le n} (\text{base}(T_i) \times \text{hauteur}(T_i)) \\ &= \frac{1}{3} \times \sum_{1 \le i \le n} \text{base}(T_i) \times \text{hauteur}(\Pi) \\ &= \frac{1}{3} \times \text{base}(\Pi) \times \text{hauteur}(\Pi) \end{aligned} .$$

Remarque générale: pour calculer le volume d'un solide, réunion de polyèdres convexes, on peut procéder par découpage (comme pour la pyramide Π) en se ramenant à des polytopes de volume déjà calculé (par exemple des tétraèdres).

47. Angles géométriques.

Soit E un espace vectoriel euclidien de produit scalaire $(\,|\,)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall u, v \in E, \quad |\, (u \mid v) \,| \le \|\, u \,\| \,\|\, v \,\|$$

il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$cos\,\theta = \frac{(u \mid v)}{\|\, u \,\| \,\|\, v \,\|}.$$

Le réel θ est appelé *l'angle non orienté de vecteurs u et v* ou encore *l'angle géométrique de vecteurs u et v*.

Soit $\langle u \rangle$ et $\langle v \rangle$ deux droites vectorielles de E portées par u et v. Notons α l'angle non orienté de vecteur u, v et β l'angle non orienté de vecteurs $u, -v$. On appelle *angle non orienté de droites* $\langle u \rangle$ *et* $\langle v \rangle$ le réel

$$\min\,(\alpha, \beta) \in [0, \pi/2].$$

Soit H un hyperplan vectoriel de E et $D = \langle u \rangle$ une droite vectorielle. Soit $v \in E$ tel que $H^{\perp} = \langle v \rangle$ et α l'angle non orienté de droites $\langle v \rangle$ et D. *L'angle non orienté entre* H *et* D est le réel β défini par

$$\beta = \pi/2 - \alpha \in [0, \pi/2].$$

48. Triangles et angles sphériques.

Soit

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in R^3, \mid\mid \mathbf{x} \mid\mid = 1\}$$

la sphère unité de R^3 centrée en $O = (0, 0, 0)$.
On appelle *grand cercle* de S^2 l'intersection de tout plan Π passant par O avec S^2. Un grand cercle est donc le cercle de rayon 1 tracé sur un plan Π passant par O.

Deux grands cercles distincts se coupent en deux points antipodaux A et $-A$.

Par toute paire de points $A, B \in S^2$ tels que $B \neq \pm A$ passe un unique grand cercle, intersection du plan affine $\langle O, A, B \rangle$ avec S^2.

On appelle *triangle sphérique* de sommets $A, B, C \in S^2$ la partie de S^2 délimitée par trois arcs de grands cercles joignant $A, B; B, C; C, A$.
Soient A, B, C les sommets d'un triangle sphérique, $\Pi = \langle \overrightarrow{OA} \rangle^{\perp}$ le plan équatorial opposé à A et B', C' les projetés orthogonaux de B et C sur l'équateur Π.

L'angle sphérique α *au point* A est par définition l'angle non orienté de vecteurs $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$, i.e. c'est l'unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$cos\,\alpha = \frac{(\overrightarrow{OB'} \mid \overrightarrow{OC'})}{\mid\mid \overrightarrow{OB'} \mid\mid \mid\mid \overrightarrow{OC'} \mid\mid}.$$

Remarque: la définition qui précède diffère dans sa formulation de celle faite en cours (parce que celle du cours demanderait une figure). Il s'agit toutefois du même angle. Pour le voir, faites une figure.

49. Formule de Girard.

Soit un triangle sphérique T de sommets A, B, C et d'angles sphériques α, β, γ

Théorème: On a

$$\text{Aire } (T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

En particulier, si l'aire de T est non nulle, on a

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

50. Formule d'Euler.

Soit P un polytope de R^3 (i.e. un polyèdre convexe borné d'intérieur non vide) constitué de S sommets, A arêtes et F faces.

Théorème: On a

$$F - A + S = 2.$$

La preuve procède comme suit:

(i) Tout polygone à l côtés $[P_1, P_2, \ldots, P_l]$ se décompose en $l-2$ triangles

$$[P_1, P_2, P_3], [P_1, P_3, P_4], \ldots, [P_1, P_{l-1}, P_l].$$

Dès lors toute face de P est réunion de triangles pleins.

(ii) Choisir l'origine O du repère canonique à l'intérieur de P et considérer l'application

$$p : R^3 \setminus \{O\} \to S^2 \subset R^3 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z).$$

La restriction de p au bord ∂P de P (pour rappel, le bord est la réunion des faces) est alors une bijection de ∂P sur S^2, chaque triangle des faces de P étant envoyé sur un triangle sphérique de S^2.

(iii) Par le (ii), la sphère S^2 apparait comme réunion de triangles sphériques images des triangles des faces de P. On obtient la formule d'Euler en sommant les angles sphériques aux sommets de 2 façons différentes:

(1) pour chaque sommet, la somme des angles vaut 2π. La somme totale est donc égale à $2\pi S$.

(2) pour chaque triangle T d'une face, par Girard, la somme des 3 angles est égale à

$$\text{Aire}(T) + \pi.$$

Une face f à s sommets étant constituée (par (i)) de $s-2$ triangles, cette face f contribue

$$\text{Aire}(f) + (s-2)\pi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2\pi S &= \sum_{\text{faces } f} (\text{aire}(f) + (\#\text{ sommets de } f - 2)\pi) \\ &= \text{aire } (S^2) + \pi(2A) - 2\pi F \\ &= 2\pi(2 + A - F). \end{aligned}$$

51. Polytopes réguliers.

Proposition. Soit $a, s \in N \setminus \{0\}$ et P un polytope de R^3, S le nombre de ses sommets, A le nombre de ses arêtes, et F le nombre de ses faces. Supposons que P soit tel que

(1) chaque sommet de P porte a arêtes

(2) chaque face de P a s sommets.

Alors (a, s, A, F, S) peut prendre les 5 valeurs

$$(3, 3, 6, 4, 4), (3, 4, 12, 6, 8), (3, 5, 30, 12, 20), (4, 3, 12, 8, 6), (5, 3, 30, 20, 12).$$

Def. On dit qu'un polytope $P \subset R^3$ est régulier de type (a, s) si

(R1) toutes ses faces sont des polygones réguliers à s sommets isométriques (i.e. identiques à isométrie près).

(R2) chaque sommet appartient à a faces, i.e. porte a arêtes.

Par la proposition qui précède il y a *au plus cinq types de polytopes réguliers* dans R^3.

Théorème. Il y a exactement cinq types de polytopes réguliers dans R^3.

Il s'agit, dans l'ordre de la proposition, du tétraèdre, de l'hexaèdre (le cube), du dodécaèdre (dont le bord est constitué de 12 pentagones réguliers identiques), de l'octaèdre (de bord formé de 8 triangles équilatéraux identiques) et de l'icosaèdre (dont le bord est un assemblage de 20 triangles équilatéraux identiques).

Remarque: en cours, nous nous sommes limités à indiquer une construction de ces polytopes par pliage à l'aide d'un patron.

52. Les coniques du plan.

On se place dans le plan affine R^2 rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Tout point M du plan s'écrit donc $M = O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ pour d'uniques $x, y \in R$.

On appelle conique le lieu géométrique des points du plan dont les coordonnées (x,y) satisfont à une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2l_1x + 2l_2y + d = 0$$

où $a, b, c, d, l_1, l_2 \in R$ sont tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Notons $\mathcal{C}$ ce lieu. $\mathcal{C}$ est donc l'ensemble des points du plan dont l'affixe annule un polynôme de degré 2 en deux variables.

Si l'on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(R), \quad L = (l_1\, l_2) \in M_{1,2}(R), \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

l'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit

$${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X} + 2L\mathbf{X} + d = 0.$$

53. Réduction des coniques.

Afin d'établir une classification des coniques et de disposer d'une méthode pratique de repré - sentation de celles-ci, on cherche à effectuer un changement de repère orthonormé

$$(O,\vec{i},\vec{j}) \mapsto (O',\vec{i}',\vec{j}')$$

pour simplifier au mieux l'équation (si possible faire disparaitre le terme linéaire $2L\mathbf{X}$ et écrire la partie quadratique ${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X}$ sous forme de somme de carrés).

I. On suppose A inversible, i.e. $b^2 - ac \neq 0$.

On commence par éliminer le terme linéaire par un changement d'origine:

$$\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j}) \mapsto \mathcal{R}' = (O',\vec{i},\vec{j}).$$

Notons $\mathbf{X}_0$ l'affixe de O' dans le repère $\mathcal{R}$ et $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ l'affixe de M dans le repère $\mathcal{R}'$. L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'écrit

$${}^t\mathbf{X}'A\mathbf{X}' + 2\,{}^t\mathbf{X}'(A\mathbf{X}_0 +^t L) +^t \mathbf{X}_0A\mathbf{X}_0 + 2L\mathbf{X}_0 + d = 0.$$

Le terme linéaire s'annule ssi O' est le point d'affixe

$$\mathbf{X}_0 = -A^{-1}\,{}^tL$$

et dans ce cas l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ prend la forme

$$^t\mathbf{X}'A\mathbf{X}' + \delta_0 = 0.$$

A étant symétrique réelle, elle est à spectre réel $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ et diagonalisable dans une base orthonormée $(\vec{i}', \vec{j}')$. Soit $P \in O_2(R)$ la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{i}', \vec{j}')$ et $\mathbf{X}'' =^t P\mathbf{X}'$ l'affixe de M dans le repère $\mathcal{R}'' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$. L'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}''$ s'écrit

$$^t\mathbf{X}'' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{X}'' + \delta_0 = 0,$$

i.e.

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \delta_0 = 0.$$

A étant inversible, $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Une discussion des signes relatifs des valeurs propres et de δ_0 (qui peut être nul) conduit aux types suivants (à permutation de x'' et y'' près):

- $\mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{C}$ est le singleton $\{O'\}$.
- $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation type $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1$
- $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation type $\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 1$
- $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites vectorielles d'équations $y'' = \pm\sqrt{|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|}x''$. (Il s'agit d'un cône du plan.)

II. On suppose $A \neq 0$ de rang 1, i.e. $b^2 - ac = 0$.

L'une des valeurs propres de A est alors nulle, disons $\lambda_1 = 0$ et notons $\lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Il est ici préférable de commencer par le passage aux vecteurs propres de A et de discuter ensuite l'annulation éventuelle des termes linéaires par changement d'origine.

Soit donc $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ un repère orthonormé propre de A, P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{i}', \vec{j}')$ et $\mathbf{X}' =^t P\,\mathbf{X}$ l'affixe du point M dans $\mathcal{R}'$. L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit alors

$$^t\mathbf{X}' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{X}' + 2LP\mathbf{X}' + d = 0.$$

On effectue ensuite le changement $\mathcal{R}' \mapsto \mathcal{R}'' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ en cherchant O' de manière à simplifier au mieux la partie linéaire de l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}''$.

La discussion selon les signes relatifs et la valeur des coefficients de la matrice LP conduit aux types suivants:

- l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $y''^2 = \delta$, i.e. $\mathcal{C} = \emptyset$ pour $\delta < 0$, $\mathcal{C}$ est la droite $y'' = 0$ pour $\delta = 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion des 2 droites parallèles $y'' = \pm\sqrt{\delta}$ pour $\delta > 0$.
- l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $y''^2 = 2px$ et il s'agit d'une parabole.

54. Quadriques.

On se place dans l'espace affine R^3 rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle *quadrique* de R^3 le lieu géométrique des points dont les coordonnées (x, y, z) satisfont à une équation de la forme

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = 0$$

où $A \in S_3(R)$ est une matrice symétrique réelle non nulle, $L \in M_{1,3}(R)$ et $d \in R$. Une quadrique $\mathcal{Q}$ est donc le lieu des points dont les coordonnées dans un repère $\mathcal{R}$ annulent un polynôme de degré 2 en trois variables.

Comme pour les coniques du plan, la classification des quadriques se fait par réduction à des équations types à l'aide de changements de repères affines orthonormés. On distingue les situations suivant le rang de la matrice $A \neq 0$. En cours je n'ai fait qu'esquisser le cas de rang 3, i.e. $det(A) \neq 0$.

En procédant comme au point 53 I. un changement d'origine et ensuite le passage aux vecteurs propres conduit à une équation réduite de la quadrique $\mathcal{Q}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \delta_0 = 0$$

que l'on discute suivant la valeur de δ_0 et les signes relatifs des valeurs propres (ici non nulles) de A pour obtenir (à permutation des coordonnées près) les équations types

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \epsilon \frac{z''}{c^2} = \epsilon'$$

où $\epsilon \in \{+1, -1\}$ et $\epsilon' \in \{+1, 0, -1\}$.

- $\epsilon = +1$, $\epsilon' = 0$: $\mathcal{Q} = \{O'\}$.
- $\epsilon = -1$, $\epsilon' = 0$: $\mathcal{Q}$ est un cône.
- $\epsilon = +1$, $\epsilon' = +1$:$\mathcal{Q}$ est un ellipsoide.
- $\epsilon = -1$, $\epsilon' = +1$: $\mathcal{Q}$ est un hyperboloide à une nappe.
- $\epsilon = +1$, $\epsilon' = -1$: $\mathcal{Q} = \emptyset$.
- $\epsilon = -1$, $\epsilon' = -1$: $\mathcal{Q}$ est un hyperboloide à 2 nappes.